

Logica in actie

HOOFDSTUK 8

Spel en logica van interactie

Spelen zijn een typisch menselijke activiteit, lopend vanaf kaartspelen of voetbal tot spelpatronen in algemeen economisch en sociaal gedrag. De Nederlandse historicus Johan Huizinga schreef er een beroemd boek over, met de mooie titel *Homo Ludens*. Maar ook wiskundigen zijn reeds vele malen in de geschiedenis door spelen geïnspireerd tot het opstellen van belangrijke theorieën. Zo komt het begrip waarschijnlijkheid uit de zestiende-eeuwse studie van kansspelen en weddenschappen. In de 20ste eeuw ontstond de ‘speltheorie’ als algemene analyse van rationeel gedrag van personen in interactie. Er zijn ook vele relaties tussen logica en speltheorie, waarvan we er een zullen bespreken aan het eind van dit hoofdstuk.

Daarmee is dit laatste thema in dit boek een vooruitblik op een bredere rol van de moderne logica als studie van intelligente interactie tussen mensen die communiceren, debatteren, en samen actie ondernemen om hun doelen te bereiken.

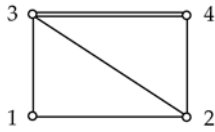
8.1 Winnende strategieën

VOORBEELD 8.1 *Het Blokkadespel*

Gegeven is een netwerk met plaatsen (aangegeven door punten) en paden (verbindingen tussen punten), en met een of andere startplaats. Er zijn twee spelers. ‘Loper’ is eerst aan zet, en moet proberen alle plaatsen in het netwerk te bezoeken langs openstaande paden, waarbij hij telkens een pad kiest vanuit zijn laatste plaats. ‘Remmer’ mag na elke stap van Loper een willekeurig pad verwijderen uit het netwerk. En zo verder, om en om. Het spel stopt als een speler geen zet meer kan doen. In dat geval heeft Loper gewonnen als elke plaats is bezocht, anders wint Remmer.

U kunt zich voorstellen dat Loper de gemiddelde NS-reiziger is, die probeert een reis langs verschillende stations te maken, en dat Remmer de NS-bedrijfsvoering voorstelt, die probeert zo efficiënt mogelijk verbindingen buiten werking te stellen.

Laten we eens zo'n spel bekijken:



Een mogelijk spelverloop is:

<i>Loper loopt van - naar</i>	<i>Remmer verwijdert een lijn van - naar</i>
1 - 3	3 - 2
3 - 4	4 - 2
4 - 3	1 - 2

Het is duidelijk dat Loper verliest, want 2 is nu onbereikbaar geworden. Maar bekijk nu eens het volgende verloop:

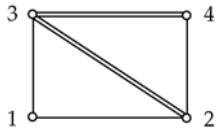
<i>Loper loopt van - naar</i>	<i>Remmer verwijdert een lijn van - naar</i>
1 - 2	2 - 3
2 - 4	4 - 3
4 - 3	

In dit geval heeft Loper gewonnen! In de meeste spelen kunnen beide spelers winnen of verliezen, afhankelijk van hoe ze spelen. Maar dit is niet alles. Want dit spel is welbeschouwd essentieel in het voordeel van Remmer. We zeggen dan ook: *'Remmer kan altijd winnen, hoe Loper ook speelt!'* Immers, als Loper naar 3 gaat, dan heeft Remmer genoeg tijd om in drie beurten punt 2 te 'isoleren'. Maar als Loper eerst naar punt 2 gaat, dan werkt het volgende. Laat Remmer in zijn eerste twee beurten de verbindingen tussen 3 en 4 weghalen. Dit dwingt Loper terug te keren op weg naar 3 of 4, en Remmer heeft dan tijd om één van deze twee plaatsen te isoleren. ◇

Strategie en
winnende strategie

De handelwijze van Remmer hiervoor, die op elk mogelijk gedrag van de tegenpartij een passend antwoord geeft, heet een *strategie*. In het algemeen is een strategie een serie zetten, of acties, waarbij elke volgende zet een der mogelijke keuzes is die de speler kan maken in de gegeven spelsituatie op dat moment. Een strategie die garandeert dat een speler altijd wint (hoe de ander ook speelt) heet een *winnende strategie* (of *winstrategie*).

VOORBEELD 8.2 Om nader te begrijpen wat een winstrategie is gaan we na welke speler een winnende strategie heeft in een Blokkadespel dat als volgt begint:



In dit geval heeft nu juist Loper een winnende strategie! We schetsen de redenering. Om te winnen, moet Loper eerst naar 2 gaan. Aldaar afkappen van een 2 - 3 of 2 - 4 helpt Remmer niet: Loper kan toch naar 3 en 4 komen. Weghalen van de twee 3 - 4 paden boven, zoals eerder, helpt dit keer echter ook niet - want dit laat Loper net genoeg tijd om eerst naar 4 te gaan en dan via 2 ook nog naar 3 te komen. \diamond

Nulsom-spel

Volgens een stelling uit 1913 van de wiskundige Zermelo is er in elk eindig spel van het zogenaamde type 'nul-som' - en elke versie van Blokkade is zo'n spelsoort - één speler met een winnende strategie. Een nulsom-spel is een spel waarbij voor elke eindtoestand geen twee verliezers of twee winnaars zijn. Er is één winnaar en één verliezer. Zo'n spel noemen we gedetermineerd als we voordat we beginnen te spelen al kunnen bepalen wie er kan winnen.

STELLING 8.1

Stelling van Zermelo

Elk eindig nulsom-spel is gedetermineerd.

Deze verrassend sterke stelling is redelijk eenvoudig te bewijzen. We illustreren de stelling aan de hand van een spelboom voor het Nim-spel. Een *spelboom* is een boom die: (i) als wortel de beginsituatie van een spel heeft, (ii) die in iedere knoop waarin speler i aan de beurt is m kinderen heeft die staan voor de speltoestanden die resulteren uit alle mogelijke zetten voor die speler, (iii) en die als bladeren de eindtoestanden van het spel heeft.

De stelling van Zermelo heeft maar weinig directe praktische betekenis. Het probleem is natuurlijk de omvang van de spelboom, en het terugrekenen vanuit de eindtoestanden is doorgaans ondoenlijk. Zermelo was zelf voornamelijk geïnteresseerd in spelen als schaken waarbij ook remise mogelijk is. In deze spelen garandeert zijn stelling dat één van beide spelers een strategie heeft om niet te verliezen. Het verschil tussen theorie en praktijk voor het schaakspel is immens. Een eeuw na het oorspronkelijke resultaat is nog steeds niet bekend welke speler deze niet-verliezende strategie heeft. Er zijn ruwweg twintig mogelijkheden per zet, en het totaal aantal mogelijk toegestane posities van de schaakstukken op het schaakbord is ongeveer 10^{120} . Dit getal komt ongeveer overeen met het aantal elementaire deeltjes in het zichtbare heelal! Niettemin is de denktrant in het hier gegeven bewijs wel richtinggevend voor de tegenwoordig gebruikte geoptimaliseerde methoden om spelen op te lossen.

VOORBEELD 8.4 In het Nim-spel is evenwel een elegante short-cut te geven om te bepalen wie er zal winnen. Laat n_1, n_2, \dots de aantallen lucifers zijn in stapeltjes. Het idee is nu deze getallen binair te schrijven en wel onder elkaar. Stel we beginnen met drie stapels met $n_1 = 5, n_2 = 9$ en $n_3 = 4$ lucifers. Of, in binaire notatie $n_1 = 101, n_2 = 1001$ en $n_3 = 100$. We tellen nu het totaal aantal enen op de n -de plaats van deze getallen en zetten die in een tabel eronder:

n_1		1	0	1
n_2	1	0	0	1
n_3		1	0	0
	1	2	0	2

In het voorbeeld geeft dit 1, 2, 0 en 2 enen. Een spel heet *gebalanceerd* als voor iedere positie in de binaire notatie het totaal aantal enen even of nul is. Anders noemen we het spel *ongebalanceerd*. In het gegeven geval is het spel ongebalanceerd omdat er maar één 1 staat op de meest linkse plaats.

Nu zijn er de volgende drie belangrijke feiten:

- Een gebalanceerd spel zal na iedere toegestane zet veranderen in een ongebalanceerd spel. Immers het aantal lucifers in één stapel zal gewijzigd worden, zodat in één rij sommigen enen in nullen veranderen en vice versa. Als in iedere kolom het aantal enen even was zal dat na de zet niet langer het geval kunnen zijn.
- Een ongebalanceerd spel *kan* met één toegestane zet veranderd worden in een gebalanceerd spel. Neem de hoogste (meest linkse) positie p waarin het aantal enen oneven is. Laat n_i het getal zijn dat op die positie een 1 heeft. Van deze stapel met n_i lucifers gaan we nu lucifers afhalen. Om dit aantal te bepalen doorlopen we de binaire representatie van dit getal vanaf de positie p naar rechts. Om te beginnen vervangen we de 1 op de p -de plaats door een 0. We gaan nu een positie naar rechts. Als dit een kolom

met een even aantal enen is, doen we niets. Als dit echter eveneens een kolom met een oneven aantal enen is, maken we er een 0 van als er een 1 stond en maken we er een 1 van als er een 0 stond. We herhalen nu deze procedure totdat we bij de kleinste (meest rechtse) positie zijn. In binaire notatie is het resultaat een getal n'_i . Neem nu $n_i - n'_i$ lucifers weg van de stapel met n_i lucifers om een gebalanceerd spel te bereiken.

– Een speler die aan zet is in een gebalanceerd spel zal nooit met die zet kunnen winnen, omdat er voor een gebalanceerd spel altijd minstens twee stapels moeten zijn.

De winnende strategie is dus om van een ongebalanceerd spel altijd een gebalanceerd spel te maken. Daarna kan de tegenstander het spel niet uitmaken. Dit betekent dat de speler die begint een winnende strategie heeft als de beginsituatie ongebalanceerd is. ◇

8.2 Spelen met voorkeuren

In toepassingen van speltheorie op echte situaties, volstaan deze ‘kale’ spelen niet langer. Mensen hebben in het algemeen veel ingewikkelder voorkeuren tussen uitkomsten dan ‘winnen’ versus ‘verliezen’.

VOORBEELD 8.5 *Verkiezingen*

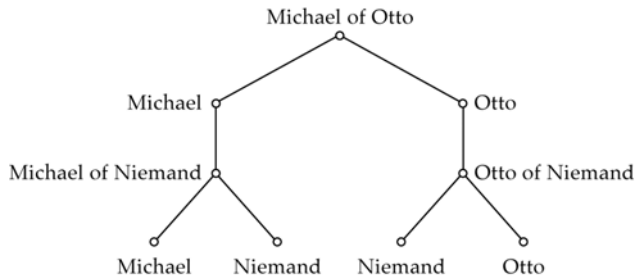
Marie, Natasha en Ofelia hebben een vrijkaartje over voor het Toonloos Ensemble. Ze kunnen stemmen over een keuze tussen Michael, Niemand en Otto om mee te nemen. Hun voorkeuren liggen als volgt:

	<i>Marie</i>	<i>Natasha</i>	<i>Ofelia</i>
1	Michael	Niemand	Otto
2	Niemand	Michael	Michael
3	Otto	Otto	Niemand

Eerst wordt gestemd over Michael of Otto, daarna over de resterende mogelijkheid hieruit of Niemand. Hoe moeten de dames stemmen? De volgende boom in de volgende figuur geeft de mogelijkheden weer.

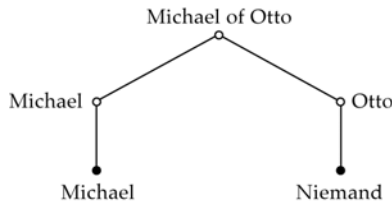
Als iedereen stemt volgens zijn voorkeur, dan wint Michael in de eerste ronde met twee tegen één, en vervolgens wint Michael ook tegen Niemand, eveneens met twee tegen één.

Maar als Natasha dit voorziet, dan kan ze beter haar stemgedrag in de eerste ronde veranderen - en tegen haar eigen voorkeur in stemmen!



Immers, als ze in die ronde stemt voor Otto in plaats van voor (haar voorkeur) Michael, dan wordt in die ronde Otto gekozen, waarna bij meerderheidsstemming daarna Niemand wint, hetgeen haar eerste voorkeur was. Zo bereikt ze dan uiteindelijk toch wat ze wil. Maar de andere spelers kunnen deze redenering ook zelf van te voren bedenken, en kunnen dus ook hun stemgedrag daarop aanpassen. Is hier een beste oplossing te vinden?

We denken op dezelfde manier als in voorbeeld 8.3 over het Nim-spel. We beginnen onderaan de spelboom en redeneren terug. (Dit proces heet 'backwards induction'.) In het laatste stadium weet elke speler wat er is gebeurd, en resteert slechts één eindkeuze. Afwijken van de eigen voorkeur heeft dan geen zin, dus bijvoorbeeld bij een keuze tussen Niemand en Otto komt Niemand uit de bus, en bij Niemand versus Michael juist Michael. Maar dan kunnen spelers in het stadium daarvoor van dit gedrag uitgaan:



Dit betekent dat een speler in de eerste ronde voor Michael moet stemmen als zij Michael verkiest boven Niemand en dat een speler in de eerste ronde voor Otto moet stemmen als ze Niemand verkiest boven Otto. In dat geval stemmen verstandige spelers aan het begin als volgt (en we zien dat in de eerste ronde dus zowel Natasha als Ofelia tegen hun 'echte' voorkeur in stemmen):

<i>Marie</i>	<i>Natasha</i>	<i>Ofelia</i>
Michael	Otto	Michael

Het resultaat is: Michael mag mee naar het concert.

◇

8.3 Strategisch evenwicht

We bekijken een spel met twee personen. Voor ieder paar van strategieën van de twee spelers zal er een unieke uitkomst zijn die verkregen wordt door de twee strategieën tegen elkaar te laten spelen. Deze uitkomst kan door beide spelers geëvalueerd worden.

DEFINITIE 8.1

Nash-evenwicht

Een tweetal strategieën, voor beide spelers één, is in *Nash-evenwicht* als geen van beide spelers de uitkomst kan verbeteren door van strategie te veranderen, aangenomen dat de andere speler niet van strategie verandert.

De definitie verwijst naar John Nash, aan wiens leven zelfs een film is gewijd: "A Beautiful Mind". Ze sluit met name niet uit dat de uitkomst verbetert als *beide* spelers tegelijk van strategie veranderen! We zullen hier voorbeelden van zien. Idealiter correspondeert zo'n evenwicht met stabiel gedrag voor rationele spelers. Met meer spelers is de definitie van strategisch evenwicht in wezen hetzelfde. In het bovenstaande verkiezingsspel gaat men eenvoudig na dat het zojuist gegeven stemgedrag voor de drie spelers een Nash-evenwicht vormt.

Het verkiezingsvoorbeeld was een ander soort spel dan het eerdere Blokade, of het schaakspel. Spelers moesten namelijk in elke ronde tegelijk zetten, zonder te weten wat de anderen doen in dezelfde beurt. Veel voorbeelden in de speltheorie zijn van deze aard, met name zogenaamde 'strategische spelen', die worden weergegeven door een matrix van uitkomsten, waarbij de rijen de strategie van de eerste speler geven en de kolommen de strategie van de tweede speler. Een paar getallen (i, j) in de matrix geeft de uitkomsten die de rijspeler en kolomspeler (in die volgorde) aan de relevante uitkomst toekennen. Hier zijn een aantal beroemde 2×2 voorbeelden: twee spelers en twee strategieën, waarbij de strategieën uit één zet bestaan.

VOORBEELD 8.6 *Prisoners' Dilemma*

Een onvervalste evergreen. In de klassieke opzet betreft het twee arrestanten, verdachte 1 en verdachte 2. Er is niet genoeg bewijsmateriaal voor een zware veroordeling. Als beiden blijven zwijgen krijgen ze ieder maar één jaar gevangenisstraf. Als echter (precies) één van beiden bekent, dan gaat deze vrijuit en de andere gaat voor tien jaar de gevangenis in. Als beiden bekennen krijgen ze ieder vijf jaar straf. Hier is de matrix die het probleem weergeeft.

	zwijg	beken
zwijg	(-1, -1)	(-10, 0)
beken	(0, -10)	(-5, -5)

In dit geval is er een duidelijk Nash-evenwicht, namelijk (beken, beken). Het is een Nash-evenwicht omdat: als verdachte 2 'beken' kiest, dan is voor verdachte 1 de opbrengst -5 (eerste argument) in $(-5, -5)$ beter dan de opbrengst -10 in $(-10, 0)$, dus is het voor verdachte 1 beter ook de keuze 'beken' te houden; en als verdachte 1 'beken' kiest, is het voor verdachte 2 om diezelfde reden ook beter de keuze 'beken' te houden, want voor 2 geldt ook dat de opbrengst -10 in uitkomst $(0, -10)$ slechter is dan de opbrengst -5 in $(-5, -5)$. De situatie is natuurlijk symmetrisch voor 1 en 2, maar dat hoeft niet altijd het geval te zijn.

Het paar (beken, beken) is het enige Nash-evenwicht in dit voorbeeld. Namelijk: (zwijg, zwijg) is geen Nash-evenwicht, want als 2 zwijg kiest is het voor 1 beter om beken te kiezen: opbrengst 0 in plaats van -1 . En (beken, zwijg) is ook geen Nash-evenwicht, want als 1 beken kiest is het voor 2 beter om van keuze te wisselen en ook beken te kiezen: opbrengst -5 in plaats van -10 ! Evenzo is (zwijg, beken) geen Nash-evenwicht.

Het zal er dus op uitdraaien dat ze vijf jaar gevangenisstraf oplopen. De twee spelers worden dus niet geleid tot coöperatief gedrag, terwijl dat ze tot collectief zwijgen had kunnen aanzetten wat maar één jaar gevangenisstraf voor beiden had betekend. \diamond

In het voorgaande voorbeeld is het zelfs ongeacht wat verdachte 2 doet, voor verdachte 1 altijd gunstiger om te bekennen. Als er voor een gegeven speler een strategie is die altijd te verkieszen is onafhankelijk van wat de andere spelers doen, dan spreken we van een *dominante strategie*. Verdachte 1 heeft dus een dominante strategie. Hetzelfde geldt in dit voorbeeld trouwens voor verdachte 2.

VOORBEELD 8.7 Voorbeeld 8.6 kan in verschillende andere vormen geformuleerd worden. Een typisch voorbeeld daarvan is niet-coöperatief gedrag tussen concurrerende bedrijven. Stel Coca Cola en Pepsi hebben een afspraak gemaakt om frisdrank tegen een hoge prijs te verkopen. De winst is dan (in een bepaalde eenheid) zes voor iedere fabrikant. Maar ieder van beide heeft de mogelijkheid deze afspraak te schenden en tegen een lagere prijs te verkopen. In dat geval zal degene met de lage prijs acht eenheden verdienen, tegen twee voor de fabrikant van het hooggeprijsde product. Als beide partijen de afspraak schenden blijft slechts een winst van drie voor ieder over. De situatie kan worden weergegeven in de volgende tabel.

	<i>hoog</i>	<i>laag</i>
<i>hoog</i>	(6, 6)	(2, 8)
<i>laag</i>	(8, 2)	(3, 3)

Ook hier is de niet-coöperatieve versie (laag, laag) de evenwichtssituatie. Rationeel gedrag voorspelt dus dat beide partijen de afspraak zullen schenden. Kartelvorming had hier voor een veel beter resultaat voor beide partijen gezorgd. ◇

VOORBEELD 8.8 In een derde variant bekijken we de samenwerking tussen twee studenten Johan en Robbert die samen een scriptie moeten schrijven. Er zijn twee mogelijkheden: hard werken en alles op tijd afmaken, of lui zijn en zien waar het schip strandt. Als beiden hard werken is de winst (6, 6). Als beiden lui zijn is het resultaat (3, 3). De grootste uitkomst is voor Robbert het grootst (8) als hij niets doet en Johan de scriptie met veel extra werk laat afmaken (voor de daarom magere beloning van 2), en vice versa. Dit geeft exact de vorige tabel. Het Nash-evenwicht voorspelt dus dat samenwerking bij scripties zou moeten stranden. Gelukkig is dit niet waar, en dat komt omdat je daarna nog wel eens met dezelfde persoon zou moeten kunnen samenwerken. Maar dat is een heel ander verhaal, waarin we bepaalde spelen eindig vaak of oneindig vaak herhalen: we definiëren daarmee dus eigenlijk een ander *spel*. In dat geval kan ‘je allebei inspinnen’ (gelukkig) toch een evenwichtssituatie zijn. ◇

In al deze gevallen is communicatie een duidelijke manier om tot coöperatief gedrag te komen (en, zoals aangestipt, maakt herhaaldelijk het spel spelen ook een verschil). Als de twee arrestanten informatie kunnen uitwisselen en elkaar genoeg vertrouwen kunnen ze afspreken beiden te zwijgen. In het geval van kartelvorming zijn dit soort (geheime) prijsafspraken nu juist verboden en aan inspectie onderhevig. Maar dat komt omdat het evenwicht ‘(laag, laag)’ overeenkomt met de situatie van vrije concurrentie die het meest in het belang van de consument geacht wordt.

8.4 Logica en spel

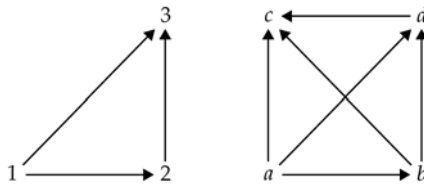
We hebben nu een aantal voorbeelden gezien van de formele analyse van spelsituaties, waarin we wiskundig precieze conclusies over rationeel spelgedrag kunnen maken. Tot zover leek het echter weinig met logica te maken te hebben. Er zijn echter vele verbanden en overeenkomsten tussen logica en speltheorie. De globale overeenkomst is dat veel in de logica gezien kan worden als een nulsom-spel tussen twee spelers: de uitkomsten zijn ‘waar’ en ‘onwaar’, de ene speler probeert gelijk te krijgen, en de andere speler probeert het ongelijk van de ene speler te bereiken. Zetten in zo’n spel komen overeen met het aanvoeren van argumenten voor en tegen een bepaalde conclusie. En net als in de rechtspraak en in de retorica gaat het niet alleen om gelijk *hebben* maar ook om gelijk *krijgen*, en speelt het een rol hoeveel zetten je kunt doen (hoeveel argumenten de verdediging kan aanvoeren) binnen de beperkte tijd die je hebt om je gelijk te kunnen halen. Logische spelen voor meer dan twee spelers en meer dan twee posities zijn

nauwelijks bestudeerd, hoewel een debat naast twee partijen natuurlijk best nog een ‘scheidsrechter’ zou kunnen hebben.

De argumentatietheorie, die teruggaat op de voorgeschiedenis van de logica in de Griekse oudheid, getuigt van dit karakter van de logica als spel. Dit werd opnieuw een levendig vakgebied na het werk van Lorenzen in de jaren 1950. Ook uit die tijd dateren spelen waarin een predikaatlogische formule ‘waar bewezen kan worden’ in het licht van tegenzetten door een logische tegenstander. Voor wie het programma ‘Tarski’s World’ wel eens heeft gezien: in dit programma is een voorbeeld hiervan het zogenaamde ‘Hintikka game’ dat je met de computer kunt spelen.

Er zijn ook spelen om de modelvergelijkingstaak uit het vorige hoofdstuk spelenderwijs uit te voeren. Een van deze benaderingen staat bekend als Ehrenfeucht-Fraïssé-spelen. Gegeven twee structuren die bestaan uit een verzameling objecten met relaties daartussen, probeert in dat spel een ‘Spoiler’ (Bederver) te bewijzen dat ze verschillend zijn, en een ‘Duplicator’ (Verdubbelaar) dat ze hetzelfde zijn. We beperken ons tot één voorbeeld om dit toe te lichten.

VOORBEELD 8.9 Gegeven zijn de twee modellen Drie (links) en Vier (rechts), in onderstaande figuur.



Een spelverloop is als volgt.

Van tevoren wordt afgesproken hoeveel zetten het spel duurt. Bijvoorbeeld: twee zetten.

Bederver kiest nu een model en een punt in dat model, bijvoorbeeld het model links en het punt 3. Verdubbelaar moet dan een punt in het andere model kiezen. Als hij goed speelt, kiest hij het punt dat hij het meest vindt lijken op de keuze van Bederver. Bijvoorbeeld, Verdubbelaar kiest rechts het punt d .

Nu mag Bederver opnieuw een model kiezen en een punt daarin, bijvoorbeeld opnieuw links en daarin punt 1. Daarna moet Verdubbelaar in het andere model opnieuw een punt kiezen, bijvoorbeeld a .

Beide spelers hebben nu twee zetten gedaan en het spel is uit. We beperken beide modellen nu tot de geselecteerde punten, met behoud van alle verbandingen tussen die punten. Met andere woorden, links houden we $1 \rightarrow 3$, en rechts houden we $a \rightarrow d$.

Als er nu *geen* structureel verschil is tussen de beide modellen, dan heeft Verdubbelaar gewonnen; hij is er immers in geslaagd de structuur te

verdubbelen, dat wil zeggen precies hetzelfde te krijgen. Anders heeft Bederver gewonnen: zij heeft de poging van Verdubbelaar om de structuur te kopiëren succesvol weten te bederven.

In dit voorbeeld heeft Verdubbelaar gewonnen: er is (alleen) een pijl van 1 naar 3, maar ook (alleen) een pijl van a naar d . Daarbij is tevens van belang dat 1 met a correspondeert (de keuzes in de eerste zet) en 3 met d correspondeert (de keuzes in de tweede zet). Als de uitkomst rechts niet $a \rightarrow d$, maar $d \leftarrow a$ was geweest (het resultaat van het spelverloop waarbij Verdubbelaar eerst a en dan d had gekozen), dan had Bederver toch gewonnen: er is immers een pijl van 1 naar 3, maar niet van d naar a .

Bederver en Verdubbelaar spelen nog een keer. Ze mogen nu ieder vier zetten doen. Het spel verloopt als volgt:

B	V
1	a
d	3
2	b
3	d

Opnieuw wint Verdubbelaar! Maar nu heeft Bederver het toch niet goed gespeeld. Bederver had namelijk beter een andere laatste zet kunnen doen:

B	V
1	a
d	3
2	b
c	3

Nu heeft Bederver (terecht!) gewonnen, want er is een pijl van d naar c maar geen pijl van 3 naar 3. Bederver moet dus niet zomaar wat doen, maar een goede strategie opzetten om het spel te kunnen winnen.

Dit spel kan gespeeld worden met de modellen voor de predikaatlogica uit hoofdstuk 4 maar ook met de modellen voor de modale logica zoals die in voorbeeld 7.3 in het hoofdstuk over complexiteit. Bij de twee modellen in dat voorbeeld kan Bederver nooit winnen. Dat is daarmee een andere manier om te bewijzen dat die modellen dezelfde informatie-inhoud hebben. \diamond

In dit laatste voorbeeld zien we opnieuw verschillende logische thema's bij elkaar komen, en doorvlochten worden met speltheorie. Het uitvoeren van een spel tussen Bederver en Verdubbelaar kunnen we weergeven in een *spelboom*, met uitkomsten winnen en verliezen, en de Stelling van Zermelo

toont aan dat de uitkomst van zo'n spel gedetermineerd moet zijn. En het bepalen of twee modellen dezelfde informatie-inhoud hebben, is zoals al gezegd een *vergelijkingstaak* (model comparison) uit hoofdstuk 7 - waarbij van het grootste belang is wat de complexiteit is om zo'n taak uit te voeren. Kort gezegd, logische taken hebben een spelkarakter, en daarmee past de logica ook goed bij de analyse van spelen.

8.5 Het ultimatumspel

Net als bij gewoon redeneren is er ook bij spelmodellen een vraag naar de aansluiting bij feitelijk menselijk gedrag. En dan blijken duidelijke discrepanties tussen speltheorie en praktijk.

In het bijzonder is het niet duidelijk dat mensen in alle omstandigheden zich uitsluitend door rationele overwegingen laten leiden van eigenbelang. Een goed voorbeeld is het *ultimatumspel* dat recent veel in de belangstelling heeft gestaan.

In dit spel met twee spelers wordt een aanzienlijke som, zeg 100.000 euro aan speler 1 gegeven. Speler 1 mag dit bedrag over de twee spelers verdelen. Vervolgens mag speler 2 besluiten of beide spelers de toegekende bedragen mogen houden of niet. Dat wil zeggen, als speler 2 akkoord is krijgt hij het percentage dat speler 1 hem heeft toegedacht en mag speler 1 de rest houden. Als speler 2 niet akkoord is krijgen beide spelers helemaal niets. Het spel wordt slechts één keer gespeeld en de spelers zijn onbekenden en zullen elkaar ook niet opnieuw ontmoeten.

De rationele keuzetheorie zegt dat speler 2 altijd moet accepteren zolang hij maar iets krijgt toegewezen, ongeacht hoe klein het bedrag is. Zelfs als speler 1 maar één euro 'fooi' geeft en zelf de resterende 99.999 houdt, kan speler 2 toch een winst van één boeken. Het alternatief is namelijk helemaal niets. Toch zal in de praktijk speler 2 geneigd zijn nee te zeggen als het toegewezen bedrag laag is. Een percentage van minstens 30 % wordt als redelijk ervaren.

Eén van de mogelijke verklaringen is dat wij mensen toch zo geprogrammeerd zijn dat we rekening houden met het lange termijn effect van de beslissing. Het zou wel eens zo kunnen zijn dat onze reputatie een deuk oploopt als we een belachelijk lage fooi accepteren. We zouden de naam krijgen 'goedkoop' te zijn, en dat zou ons later duur kunnen komen te staan.

Juist het feit dat we dit soort extra redeneringen willen begrijpen, brengt dan de logica weer 'in het spel': nog onlangs kreeg Robert Aumann de Nobelprijs voor de Economie voor zijn baanbrekende werk aan onder meer systemen van kennilogica die analyseren op grond van welke informatie over elkaar, spelers hun spelgedrag kiezen.

Samenvatting

Een spel wordt gespeeld door verschillende spelers, die tegelijk of na elkaar zetten doen. Een manier van spelen die garandeert dat je altijd wint, wat de tegenstander ook doet, is een winstrategie. In een nulsom-spel zijn maar twee uitkomsten mogelijk: winnen en verliezen. Er is maar één winnaar. De stelling van Zermelo zegt dat ieder eindig nulsom-spel gedetermineerd is. Een gebruikelijke representatie voor spelen waarbij de spelers tegelijkertijd zetten doen is een $m \times n$ matrix waarin de uitkomsten staan voor ieder van de m strategieën van de ene speler in combinatie met ieder van de n strategieën van de andere speler. Een strategieënpaar voor twee spelers is in Nash-evenwicht als geen van beide spelers de uitkomst kan verbeteren door van strategie te veranderen als de andere speler niet van strategie verandert.

Er zijn vele verbanden tussen logica en speltheorie. Zo is er de globale overeenkomst dat veel in de logica gezien kan worden als een nulsom-spel tussen twee spelers: de uitkomsten zijn 'waar' en 'onwaar', de ene speler probeert gelijk te krijgen, en de andere speler probeert het ongelijk van de ene speler te bereiken. Zetten in zo'n spel komen overeen met het aanvoeren van argumenten voor en tegen een bepaalde conclusie. Maar ook wordt de logica tegenwoordig gebruikt om informatie en redeneren te analyseren van actoren die een optimaal gedrag nastreven in elk willekeurig spel, of dat nu een logisch doel heeft of niet.

Dit document bevat hoofdstuk 8 van de cursus Logica in actie. De volledige cursus is beschikbaar op <http://www.spinoza.ou.nl>.

© Open Universiteit Nederland; Uitgeverij: Sdu Uitgevers, 's-Gravenhage.



Dit materiaal is gelicentieerd onder een [Creative Commons Licentie](#). Zie de licentie voor details. The content on this site is licensed under a [Creative Commons Licentie](#). See licence for more details.

Opgaven

OPGAVE 8.1 Bewijs dat er in voorbeeld 8.2 voor Loper geen winnende strategie is waarbij hij eerst naar knoop 3 gaat.

OPGAVE 8.2 Beschouw de volgende beginsituatie voor het Nim-spel (zie voorbeeld 8.3).

n_1		1	0	1
n_2	1	0	0	1
n_3		1	1	0

Is deze situatie gebalanceerd of niet? Wie kan dus winnen? Geef een mogelijk spelverloop.

OPGAVE 8.3 Een andere bekende vorm van het Prisoners' Dilemma is de wapenwedloop, met als strategieën 'ontwapenen' en 'bewapenen'. Bijvoorbeeld in onderstaande vorm.

		<i>ontwapenen</i>	<i>bewapenen</i>
<i>ontwapenen</i>	(3, 3)	(0, 4)	
<i>bewapenen</i>	(4, 0)	(1, 1)	

De partijen worden naar het Nash-evenwicht 'bewapenen' gedreven, ook al is het in ieders belang te ontwapenen. Een variatie hierop is als volgt:

		<i>ontwapenen</i>	<i>bewapenen</i>
<i>ontwapenen</i>	(3, 3)	(0, 4)	
<i>bewapenen</i>	(4, 0)	(-10, -10)	

Met andere woorden: de uitkomst van 'allebei bewapenen' is hier sterk negatief voor beide partijen (MAD: 'mutually assured destruction'). Laat zien dat (bewapenen, bewapenen) nu geen Nash-evenwicht meer is. Is een van de andere combinaties nu wel een Nash-evenwicht?

OPGAVE 8.4 Neem de modellen van voorbeeld 6.7 en voorbeeld 6.10. Laat met een Ehrenfeucht-Fraïssé-spel van twee zetten zien dat deze niet dezelfde informatie bevatten. (Vergeet niet dat alle toestanden ook reflexieve pijlen hebben).

Uitwerkingen van de opgaven bij hoofdstuk 8

8.1 In voorbeeld 8.2 heeft Loper geen winnende strategie waarbij hij eerst naar knoop 3 gaat. Stel dat Loper naar knoop 3 gaat. Wat kan Remmer doen om te verhinderen dat Loper 4 en 2 kan bereiken? Het verwijderen van 1 - 3 of 1 - 2 is zinloos omdat dit niet verhindert dat Loper via de snellere 3 - 2 toch bij 2 kan komen. (U kunt dit eventueel tot in detail uitspelen, als dit u nog niet overtuigt.) De andere mogelijkheden zijn: 3 - 2, 2 - 4, of 3 - 4 verwijderen.

Als Remmer 3 - 2 verwijdert, gaat Loper met de resterende 3 - 2 naar 2. Daarna kan Remmer 2 - 4 verwijderen, of niet. Zo niet, dan doet Loper 2 - 4: gewonnen. Zo wel, dan gaat Loper over 3 - 2 terug naar 3, waarna er nog twee verbindingen 3 - 4 resteren. Hiervan kan Remmer er maar één verwijderen. Loper's volgende zet is dan 3 - 4. Wederom gewonnen.

Echter... laat Remmer nu eens 4 - 2 verwijderen. Als Loper eerst 3 - 2 doet, verwijdert Remmer een 3 - 4, en nadat Loper een 2 - 3 terugdoet, verwijdert Remmer de andere 3 - 4. Stuck! Als Loper in plaats daarvan eerst 3 - 4 doet, verwijdert Remmer een 3 - 2, en nadat Loper dan noodgedwongen terugkeert met 4 - 3, verwijdert Remmer de andere 3 - 2. Loper kan nu nog doorgaan via 3 - 1, waarna Remmer 1 - 2 verwijdert. Ook hier heeft Remmer gewonnen. (We hadden natuurlijk ook meteen met dit geval kunnen beginnen waarin Remmer 4 - 2 verwijdert, zodat we het geval 3 - 2 niet meer hoefden te bespreken; maar zo was het spannender.)

8.2 De beginsituatie is:

n_1	1	0	1
n_2	1	0	0
n_3	1	1	0
	1	2	1
	2	1	2

We hebben onder iedere kolom het aantal 1-en geteld. Deze situatie is ongebalanceerd, want er zijn posities waarin het aantal 1-en oneven is. Dit betekent dat speler 1 kan winnen. Hiervoor moet die speler natuurlijk van deze ongebalanceerde situatie een gebalanceerde maken! Hiervoor moet speler 1 in één keer de twee oneven kolommen even zien te maken. Dit kan door van stapel n_2 drie lucifers over te laten (1 haalt er dus zes weg). De spelsituatie is nu:

n_1	1	0	1
n_2	1	1	1
n_3	1	1	0

2 2 2

Deze situatie is gebalanceerd. Wat 2 ook doet, de situatie zal nu ongebalanceerd worden. Om het spel niet al te lang te laten duren (en waarom zouden we ook, want 1 en 2 weten toch al hoe het moet aflopen), laten we 2 het stapeltje n_1 weghalen. De situatie is nu:

n_2	1	1
n_3	1	0
	1	2
	1	1

Hierop antwoordt 1 met het verwijderen van drie lucifers van de stapel n_3 met zes. (En dit is de enige manier waarop 1 kan winnen!) De situatie wordt nu:

n_2	1	1
n_3	1	1
	2	2

Speler 2 heeft er genoeg van, en verwijdert stapel n_2 , waarna speler 1 stapel n_3 verwijdert. Speler 1 heeft inderdaad gewonnen.

8.3 Gegeven is de strategische matrix:

	<i>ontwapenen</i>	<i>bewapenen</i>
<i>ontwapenen</i>	(3, 3)	(0, 4)
<i>bewapenen</i>	(4, 0)	(-10, -10)

Het strategiepaar (bewapenen, bewapenen) is geen Nash-evenwicht. Laat 1 de rijspeler zijn en 2 de kolomspeler. Stel dat 1 aanneemt dat 2 'bewapenen' kiest. Als 1 in plaats van 'bewapenen' voor 'ontwapenen' kiest, is de winst 0 in plaats van -10. Het is dan dus beter te ontwapenen. Het strategiepaar (bewapenen, bewapenen) is dus geen Nash-evenwicht.

Neem nu het paar (ontwapenen, ontwapenen). Als 1 aanneemt dat 2 ontwapent, dan heeft het voor 1 zin te gaan bewapenen, omdat haar uitkomst dan 4 is in plaats van 3. Dus (ontwapenen, ontwapenen) is evenmin een Nash-evenwicht.

We onderzoeken nu het paar (bewapenen, ontwapenen). Stel nu dat 2 aanneemt dat 1 voor bewapenen kiest. Voor 2 heeft het dan geen zin van strategie te veranderen, omdat zijn uitkomst in het alternatief (bewapenen, bewapenen) dan nog lager is: -10 in plaats van 0 . Voor 1 heeft het ook geen zin van strategie te veranderen, omdat de alternatieve opbrengt 3 in (ontwapenen, ontwapenen) kleiner is dan 4 . Het paar (bewapenen, ontwapenen) is dus een Nash-evenwicht. Evenzo is het paar (ontwapenen, bewapenen) een Nash-evenwicht.

Ook al hebben we nu twee Nash-evenwichten, het lijkt op grond hiervan nog niet duidelijk wat nu voor 1 en 2 de beste strategie is. Een antwoord hierop is te geven als we het begrip 'gemengde strategie' erbij betrekken - dit voert hier echter te ver.

- 8.4 Bederver kan (bijvoorbeeld) als volgt in twee zetten winnen: Bederver kiest $rw b$ in 6.10. Verdubbelaar kiest $rw b$ in 6.7. Bederver kiest wrb in 6.10. Verdubbelaar kiest rbw in 6.7. Er is nu een structureel verschil, want er is wel een 3-pijl van $rw b$ naar wrb in de restrictie van 6.10 tot de twee gekozen toestanden, maar er is niet een 3-pijl van $rw b$ naar rbw in de restrictie van 6.10 tot de twee gekozen toestanden. Merk op dat na de tweede keuze van Bederver Verdubbelaar echt niet kan winnen, want de andere keuze $rw b$ voor Verdubbelaar leidt evenmin tot succes.