

Grafen

Introductie 45

Leerkern 47

4.1 Enkele grafische structuren 47

4.2 Wat is een graaf? 49

4.3 De verbindingsmatrix en een algemener graafbegrip 54

4.4 Wandelen in een graaf 58

4.4.1 Wandelingen 58

4.4.2 Paden 60

4.4.3 Afstanden 61

4.4.4 Cykels 62

4.4.5 Tweedelingsgrafen 64

4.4.6 Routes waarin elke lijn precies eenmaal voorkomt 68

4.5 Gewogen grafen 69

4.6 Gerichte grafen 70

Samenvatting 75

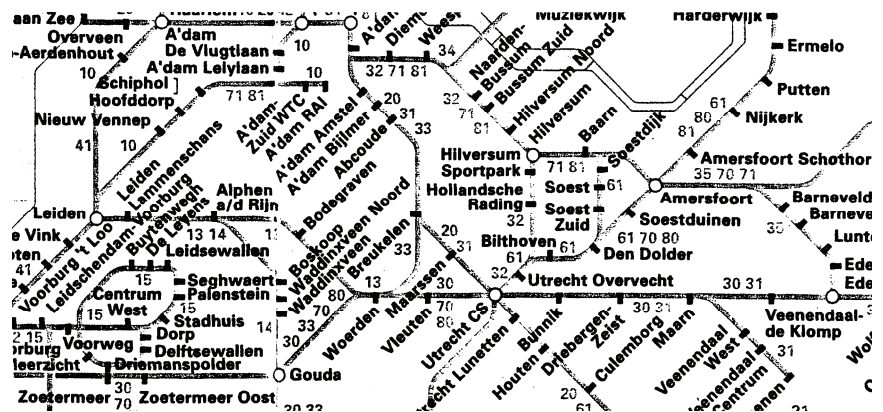
Zelftoets 76

Grafen

INTRODUCTIE

Deze en de volgende leereenheid bieden u een eerste kennismaking met de grafentheorie, een explosief groeiend vakgebied binnen de (discrete) wiskunde met toepassingen in velerlei, zeer verscheiden gebieden, waaronder de informatica en de besliskunde. Een karakteristiek kenmerk van de grafentheorie is de grote aanschouwelijkheid ervan. Dit blijkt al uit het volgende voorbeeld.

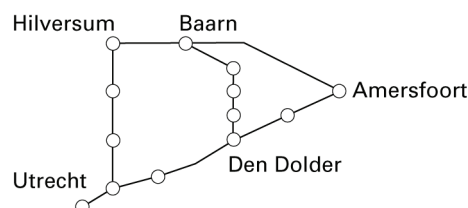
Stel we willen met de trein van A naar B . Voorin het spoorboekje zit een gestileerde kaart van het spoorwegnet van Nederland. Op deze kaart staan alleen de stations en de railverbindingen met daarbij de nummers van de tabellen waar de dienstregeling gevonden kan worden, zie figuur 4.1 voor een fragment van deze kaart.



FIGUUR 4.1 Een gedeelte van het spoorwegnet van Nederland

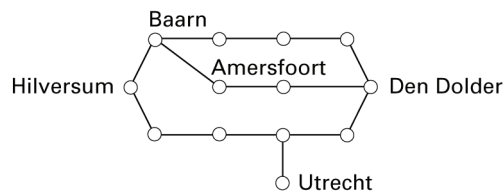
Bron: Spoorboekje Nederlandse Spoorwegen

Als het ons er slechts om te doen is uit te vinden op wélke manieren we van A naar B kunnen komen, dan hoeven we alleen het patroon van stations en verbindingen te kennen. In figuur 4.2 zien we een plaatje waarin de stations met punten (voor de duidelijkheid getekend als kleine cirkeltjes) en de railverbindingen met lijnen zijn weergegeven. Zo'n structuur van punten en verbindende lijnen noemen we een *graaf*.



FIGUUR 4.2 De graaf van een stukje spoorwegnet

In figuur 4.3 zien we een ander plaatje van dezelfde graaf. Hierin hebben we geen rekening gehouden met de precieze geografische ligging van de stations. Die doet namelijk niet ter zake voor het vinden van bijvoorbeeld alle mogelijke routes van Hilversum naar Den Dolder in dit stukje van het spoorwegnet. In een graaf gaat het niet om de ligging van de punten ten opzichte van elkaar, maar zuiver en alleen om het al of niet bestaan van verbindende lijnen tussen de punten.



FIGUUR 4.3 Een ander plaatje van dezelfde graaf

Kenmerkende vragen voor de grafentheorie zijn: welke verschillende routes zijn er van punt A naar punt B , wat is de kortste route van A naar B , is er een route te vinden die elk punt van de graaf precies éénmaal passeert, is er een route te vinden die elke lijn precies éénmaal doorloopt? Ga zelf na dat beide laatste vragen voor de graaf van figuur 4.3 ontkennend beantwoord moeten worden. Deze vragen zijn voor een spoorwegnet natuurlijk van weinig belang, maar we zullen in het vervolg voorbeelden zien van problemen waar de oplossing juist bestaat uit het beantwoorden van zulk soort vragen.

Een graaf is een typische discrete structuur. De punten zijn duidelijk van elkaar onderscheiden. Er komen wel lijnen in voor, maar een lijn moeten we als één object beschouwen, een plek ergens op een lijn heeft geen betekenis. Een lijn geeft een relatie aan tussen de punten die zij verbindt. Dat kan een echte verbinding zijn, zoals in het spoorwegnet, maar de punten zouden ook werkzaamheden kunnen voorstellen waarbij een lijn tussen twee punten aangeeft dat de betreffende werkzaamheden *niet* gelijktijdig kunnen worden uitgevoerd.

Deze leereenheid bestaat voornamelijk uit het introduceren van een aantal grondbegrippen uit de grafentheorie. Na een definitie van een begrip volgen meestal nog een aantal bijbehorende termen. Zo zullen we een woordenschat ontwikkelen waarmee we elementaire grafentheoretische problemen kunnen formuleren. Onder andere zullen we het voornoemde idee van het vinden van routes in een graaf nader uitwerken. In deze leereenheid zult u ook enkele grafentheoretische stellingen en bewijzen tegenkomen. Een bewijs is een sluitende redenering om uzelf en een ander te overtuigen van de juistheid van een stelling. De manier van redeneren in de grafentheorie is misschien heel anders dan u gewend bent. Daarom worden de belangrijkste stappen in de bewijzen steeds in de marge samengevat, om zo de structuur van de redenering duidelijk te maken.

LEERDOELEN

Na het bestuderen van deze leereenheid wordt verwacht dat u

- de definities van de grondbegrippen van de grafentheorie, voorzover in deze leereenheid behandeld, kunt geven en toepassen
- een pad van u naar v kunt vinden in een wandeling van u naar v
- van twee kleine grafen kunt vast stellen of ze isomorf zijn of niet
- van een graaf de verbindingsmatrix kunt geven en bij een verbindingsmatrix de graaf
- de in deze leereenheid behandelde stellingen kunt formuleren en bewijzen en eenvoudige vergelijkbare stellingen kunt bewijzen (stellingen 4.4 en 4.5 moet u wel kunnen formuleren, maar hoeft u niet te kunnen bewijzen)
- in een gewogen graaf een pad met minimaal gewicht tussen twee punten kunt vinden en een cykel met minimaal gewicht kunt vinden
- van een gerichte graaf de verbindingsmatrix kunt opstellen en bij een vierkante $(0, 1)$ -matrix de gerichte graaf kunt opstellen
- in een gerichte graaf een gericht pad tussen twee punten kunt vinden.

Studeeraanwijzing

Het aanschouwelijke karakter van de grafentheorie kunnen we uitstekend benutten om de intuïtie te ontwikkelen en de argumenten en redeneringen in de bewijzen te volgen. Houd daarom kladpapier en potlood bij de hand en maak bij het bestuderen van de definities, voorbeelden, stellingen en bewijzen steeds plaatjes van de bijbehorende grafen.

LEERKERN

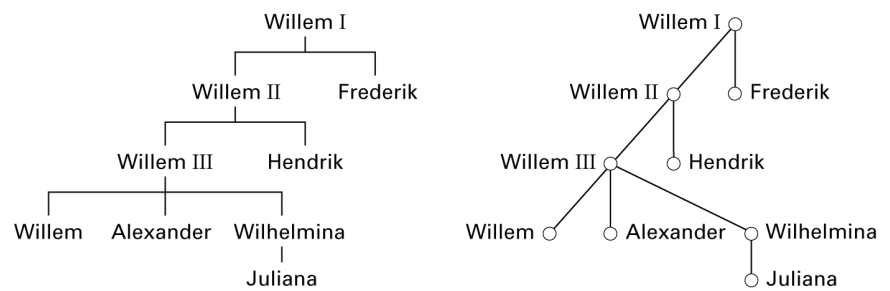
4.1 Enkele grafische structuren

Voor we het begrip graaf precies definiëren, zullen we eerst nog enkele voorbeelden bekijken van structuren die met een graaf gerepresenteerd kunnen worden.

Stamboom

VOORBEELD 4.1

Een *stamboom* kunnen we opvatten als een graaf. De punten zijn de stamhouder of stamhoudster en zijn of haar nakomelingen. Twee punten zijn verbonden door een lijn als het ene punt een ouder is van het andere (zie figuur 4.4). De graad van verwantschap tussen twee personen kunnen we eenvoudig uit de boom aflezen: A is n -degraads familie van B als we in n stappen van A naar B kunnen lopen door langs lijnen van punt naar punt te stappen. Merk op dat we zo van elk punt naar elk ander punt kunnen lopen, maar dat we niet een ‘rondje’ kunnen lopen. Het zal geen verbazing wekken dat we een graaf met zo’n structuur een *boom* noemen. In een boom groeien takken steeds verder uit in allerlei richtingen, maar groeien nooit meer aan elkaar vast en dus kunnen we in een boom geen ‘rondje’ langs de takken lopen. Bomen hebben in de informatica zoveel toepassingen dat we er de hele volgende leereenheid aan wijden.



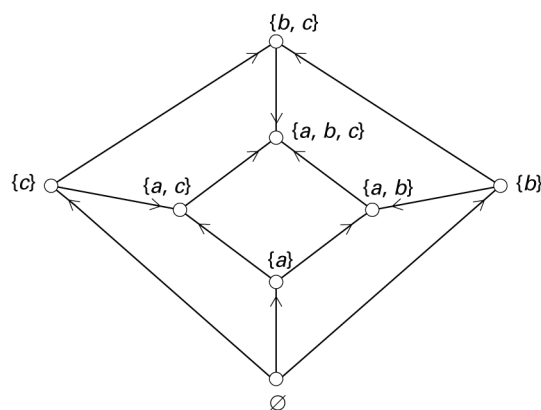
FIGUUR 4.4 Een stamboom met bijbehorende graaf

«

Ook wiskundige structuren kunnen we op grafische wijze analyseren. Een voorbeeld hiervan zagen we in de casus van dit blok. Een ander voorbeeld is het volgende.

Deelverzamelingen VOORBEELD 4.2

We beschrijven dit voorbeeld voor het algemene geval, maar we adviseren u het alleen uit te werken aan de hand van het geval in figuur 4.5. Zij X een verzameling met n elementen. We stellen elke deelverzameling van X voor door een punt en we trekken een pijl van het punt van deelverzameling A naar het punt van deelverzameling B als A een deelverzameling is van B met precies één element minder dan B . Zo krijgen we wat we een *gerichte graaf* noemen. De gerichte graaf van de deelverzamelingen van $X = \{a, b, c\}$ zien we in figuur 4.5. Er geldt nu dat C een deelverzameling is van B dan en slechts dan als we langs pijlen van C naar B kunnen lopen. Zo kunnen we van $C = \{c\}$ via $\{a, c\}$ naar $B = \{a, b, c\}$ lopen. Het aantal elementen van B is precies gelijk aan het aantal stappen dat we nodig hebben om langs pijlen van $\emptyset$ naar B te lopen. Probeer dit uit voor de verzameling $\{b, c\}$. De hier beschreven grafen komen uitgebreid aan bod in Discrete wiskunde B.

FIGUUR 4.5 De gerichte graaf van de deelverzamelingen van a, b, c

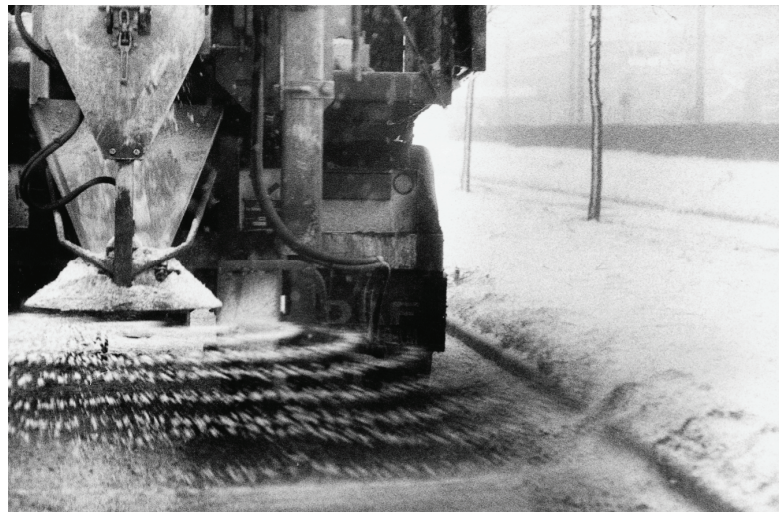
«

Besliskunde
Logistiek

VOORBEELD 4.3

We besluiten deze paragraaf met een toepassing in de besliskunde, en wel in de logistiek.

Stel het heeft geijzeld en we sturen een pekelwagen erop uit om de straten in een stadswijk te strooien. Dit strooien moet zo snel en efficiënt mogelijk gebeuren om gevaarlijke situaties en ongemak te minimaliseren. Dat wil zeggen dat de pekelwagen zo min mogelijk door straten moet rijden waar hij al eerder langs geweest is en al gestrooid heeft.



De stadsdeelraad schakelt een grafentheoreticus in om een optimale route voor de pekelwagen te ontwerpen. Deze gaat als volgt te werk. Van het stratenplan van de straten die gestrooid moeten worden, maakt zij een graaf: de kruispunten worden de punten van de graaf en de straatstukken tussen deze punten worden de lijnen van de graaf. Nu moet zij een zo kort mogelijke route door de graaf zoeken die elke lijn ten minste éénmaal bevat. Als het om een ingewikkeld stratenplan gaat, dan zal zij haar oplosmethode programmeren en de oplossing met behulp van een computer construeren. Een stukje van de benodigde grafentheorie zullen we in paragraaf 4.4.6 tegenkomen. Deze toepassing van de grafentheorie is daadwerkelijk gebruikt voor het vinden van optimale routes voor strooiploegen in grote steden in Europa. In de introductie stelden we de vraag naar het al of niet bestaan van een route in een graaf die elke lijn precies eenmaal bevat. Voor een spoorwegnet leek dit meer op een spelletje dan op een serieuze vraag. Maar nu blijkt het te gaan om de vraag of er een route voor de strooiploeg bestaat waarbij ze nooit langs reeds gestrooide wegen hoeft te rijden. Bij zo'n route is de strooiploeg natuurlijk het snelst klaar. «

4.2 Wat is een graaf?

Bij de voorgaande voorbeelden ging het steeds om een verzameling objecten (stations, familieleden, deelverzamelingen, kruispunten) waarbij tussen twee objecten al dan niet een relatie bestond (respectievelijk in de vorm van een spoorverbinding, de ouder-kind-relatie, de inclusie van deelverzamelingen, een verbindende straatweg). In een plaatje konden we dat heel sprekend weergeven met punten (kleine cirkeltjes) die al dan niet door lijnen of pijlen verbonden zijn. Zo verkregen we respectievelijk grafen en gerichte grafen. De laatste komen in paragraaf 4.6 aan de orde. We beperken ons nu eerst tot de 'gewone', dus ongerichte grafen.

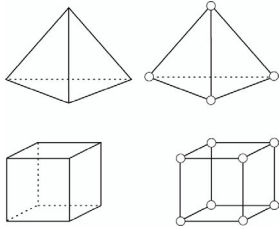
Graaf
Punt
Lijn

DEFINITIE 4.1

Een *graaf* G bestaat uit een eindige verzameling V , waarvan de elementen *punten* heten, en een verzameling E bestaande uit deelverzamelingen van V met twee punten. De elementen van E worden *lijnen* genoemd.

Puntenverzameling
Lijnenverzameling

Notatie

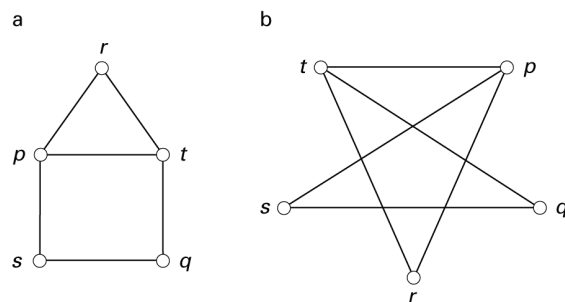


VOORBEELD 4.4

We noteren de graaf G met puntenverzameling V en lijnenverzameling E ook wel met (V, E) , dus $G = (V, E)$.

De reden dat we hier kiezen voor de notatie V en E is dat dit in de Engelse literatuur vrij algemeen gebeurt. In het Engels wordt dan een punt 'vertex' genoemd en een lijn 'edge'. Dit gebruik vindt zijn oorsprong in het feit dat in de vorige eeuw grafen ook bestudeerd werden als de hoekpunten (Engels: vertices) en ribben (Engels: edges) van een veelvlak. Overigens komen ook andere benamingen en notaties in de literatuur voor, zodat het altijd goed is bij het raadplegen van een boek of artikel over grafentheorie eerst even na te gaan welke terminologie de schrijver gebruikt.

De graaf G in figuur 4.6a heeft als puntenverzameling $\{p, q, r, s, t\}$. We noteren de lijn $\{p, r\}$ tussen p en r voor het gemak met pr , enzovoort. Zo wordt de lijnenverzameling $\{pr, ps, pt, qs, qt, rt\}$. In figuur 4.6b zien we nog een plaatje van G . In dit plaatje snijden de lijnen pr en qs elkaar, maar dankzij onze afspraak om de punten van de graaf met kleine cirkeltjes weer te geven, zullen we dit snijpunt niet als een punt van G lezen. Het snijpunt heeft dus in G geen enkele betekenis. Dit geldt ook voor de overige snijpunten. Dat beide figuren plaatjes van dezelfde graaf zijn, kunnen we controleren door in beide plaatjes na te gaan of dezelfde punten met elkaar verbonden zijn. Inderdaad is p zowel in figuur 4.6a als figuur 4.6b verbonden met r, t en s en niet met q , enzovoort. Ga dit na.

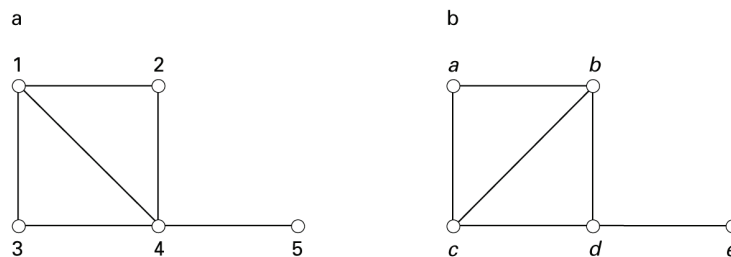


FIGUUR 4.6 Twee plaatjes van dezelfde graaf

«

OPGAVE 4.1

Geef van de grafen in figuur 4.7 de puntenverzameling en de lijnenverzameling.



FIGUUR 4.7 Twee grafen

Verbinden
Uiteinde
Buur
Incident
Incidentie

Om het spreken over grafen te vergemakkelijken, voeren we een aantal termen in.

Als u en v punten zijn en $\{u, v\}$ is een lijn, dan noteren we deze lijn, net als in voorbeeld 4.4, voortaan met uv , of, wat natuurlijk ook kan, met vu . We zeggen dat lijn uv de punten u en v *verbindt*. We noemen u en v de *uiteinden* van de lijn uv , en we zeggen dat u en v *buren* van elkaar zijn, of dat de punten u en v *incident* zijn met de lijn uv . Of nog anders gezegd, er bestaat een *incidentie* tussen punt u en lijn uv . Het lijkt op het eerste gezicht overbodig om verschillende termen in te voeren voor het zelfde verschijnsel, maar soms is de ene term handiger en soms de andere. Een bijkomend voordeel is dat men de term kan kiezen die het dichtst bij de eigen intuïtie aansluit, waardoor het gemakkelijker is het begrip te onthouden en er mee te werken. Deze rijkdom aan taal is ook een kenmerk van de grafentheorie.

VOORBEELD 4.5 In de graaf van figuur 4.6 zijn p en r uiteinden van de lijn pr , zijn r , s , en t de buren van p , zijn q en t incident met qt , en is punt s betrokken bij twee incidenties, namelijk met de lijnen ps en qs . «

OPGAVE 4.2

Beantwoord de volgende vragen voor de graaf uit figuur 4.6.

- Wat zijn de buren van s , en wat die van t ?
- Bij hoeveel incidenties is punt t betrokken?
- Hoeveel incidenties zijn er in totaal in de graaf?
- Ziet u een relatie tussen het totaal aantal incidenties en het aantal lijnen in deze graaf?

We hebben nogal de nadruk gelegd op het belang van het tekenen van plaatjes, die een goede leidraad zijn voor onze intuïtie. Maar niet elk plaatje is even goed 'leesbaar'. Zo kunnen veel snijpunten die leesbaarheid negatief beïnvloeden. In figuur 4.6 is het linkerplaatje veel overzichtelijker dan het rechterplaatje. Van grotere grafen is het vaak niet mogelijk om een goed leesbaar plaatje te tekenen. Ook voor het 'goed' tekenen van grafen is inmiddels de nodige theorie en programmatuur ontwikkeld.

OPGAVE 4.3

Teken een plaatje van de graaf G' met $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ als puntenverzameling en waarin twee punten i en j zijn verbonden als ze ten minste 2 verschillen. Zo is punt 2 verbonden met de punten 4 en 5 maar niet met de punten 1 of 3.

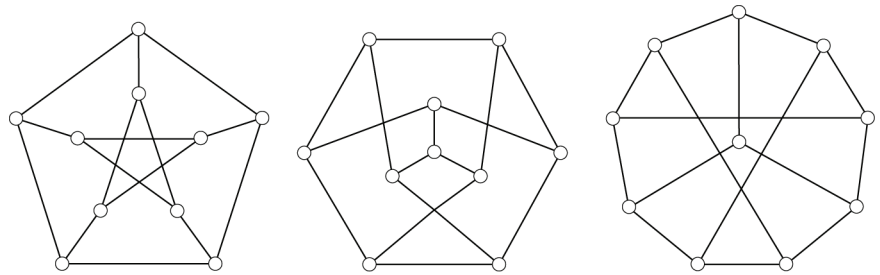
Als we de graaf G van voorbeeld 4.4 vergelijken met de graaf G' van opgave 4.3, dan lijkt het erop dat ze hetzelfde zijn. Preciezer gezegd, als we in G uit voorbeeld 4.4 de namen van de punten als volgt veranderen: $p \rightarrow 1, q \rightarrow 2, r \rightarrow 3, s \rightarrow 4, t \rightarrow 5$, dan gaat G over in de graaf G' uit opgave 4.3, waarbij punten die in G met elkaar verbonden zijn, overgaan in punten die in G' met elkaar verbonden zijn. Dit verschijnsel noemen we *isomorfie*.

Isomorfie

VOORBEELD 4.6

Petersen-graaf

In figuur 4.8 ziet u drie plaatjes van grafen die er op het eerste gezicht nogal verschillend uitzien. De eerste heeft een 'buitenrand' met vijf punten, de tweede een met zes punten, en de derde een met negen punten. Toch blijken deze drie grafen 'hetzelfde' of isomorf te zijn. We kunnen dit aantonen door de punten zo te nummeren dat punten i en j verbonden zijn in de ene graaf dan en slechts dan als ze verbonden zijn in de andere graaf, zie hiervoor opgave 4.4. Deze graaf is genoemd naar zijn ontdekker: hij heet de *petersengraaf*.



FIGUUR 4.8 Drie plaatjes van de petersengraaf

«

De petersengraaf heeft zeer veel bijzondere eigenschappen of mist juist hele belangrijke eigenschappen. Op de meest onverwachte plaatsen duikt hij op in de grafentheorie. In 1993 is er zelfs een boek verschenen dat geheel gewijd is aan de petersengraaf en aan alle tot dan toe bekende resultaten waar de petersengraaf als voorbeeld of als tegenvoorbeeld in voorkomt.



De Deen Julius Petersen, 1839-1910, was in zijn land een belangrijke figuur. Hij heeft zeer veel gedaan voor de verbetering van het wiskundeonderwijs. De leerboeken die hij schreef, werden tot in de jaren vijftig van de twintigste eeuw op school gebruikt. Verder droeg hij veel bij aan het culturele leven in Kopenhagen. Hij heeft een fundamentele bijdrage geleverd aan de toepassing van wiskunde in de economische theorie en schreef vele artikelen over meetkundige en algebraïsche problemen. Zijn belangrijkste artikel was meteen het eerste fundamentele artikel in de geschiedenis over een grafentheoretisch probleem.

Petersen was zich daar zelf niet van bewust, hij probeerde een algebraïsch probleem op te lossen en was door zijn vriend, de Engel-se wiskundige James Joseph Sylvester, gewezen op de mogelijkheid om er grafen bij te gebruiken. Deze Sylvester had het begrip enkele jaren eerder, in 1878, ingevoerd om daarmee een gemeenschappelijke basis te ontwikkelen voor de scheikunde, de mechanica en de algebra. Dat is niet mogelijk gebleken. Maar als zelfstandige theorie met vele toepassingen in de wiskunde en daarbuiten heeft de grafentheorie, vooral sinds 1960, een enorme vlucht genomen.

OPGAVE 4.4

Nummer in figuur 4.8 in de linkergraaf de buitenrand met de wijzers van de klok mee van 1 t/m 5, en nummer de punten van de ster in het binnengebied met 6 t/m 10 zó dat 1 met 6 verbonden is, 2 met 7, enzovoort. Nummer in de middelste graaf vier opeenvolgende punten van de buitenrand met 1 t/m 4, en nummer ook in de rechtergraaf vier opeenvolgende punten op de buitenrand met 1 t/m 4. Zoek nu de gemeenschappelijke buur van 1 en 4 en geef die nummer 5. Maak deze nummeringen nu zo af dat i en j in de middelste graaf en de rechtergraaf verbonden zijn dan en slechts dan als ze verbonden zijn in de linkergraaf.

In de grafentheorie beschouwen we isomorfe grafen meestal als dezelfde graaf. Als we namelijk een eigenschap afleiden voor een bepaalde graaf G , dan hebben alle grafen die isomorf zijn met G , natuurlijk diezelfde eigenschap. Een probleem bij toepassingen is echter dat het vaak om grafen met veel punten en lijnen gaat, waardoor het heel lastig kan zijn om vast te stellen of twee grafen wel of niet isomorf zijn.

OPGAVE 4.5 (Aanw)

Laat zien dat de grafen uit figuur 4.7 niet isomorf zijn.

In opgave 4.2 werd gevraagd het totaal aantal incidenties in de graaf van figuur 4.6 te tellen. Waarschijnlijk heeft u dat gedaan door per punt het aantal incidenties te tellen. Zo komen we tot het volgende begrip.

Graad

DEFINITIE 4.2

Zij $G = (V, E)$ een graaf. De *graad* $d(v)$ van een punt v van G is het aantal incidenties waarbij v betrokken is.

OPGAVE 4.6

- Bepaal de graden van de punten van de grafen in figuur 4.7.
- Kan uit het antwoord op onderdeel a al geconcludeerd worden dat de twee grafen van figuur 4.7 niet isomorf zijn?

Geïsoleerd punt

Eindpunt

Merk op dat de graad van v gelijk is aan het aantal burens van v . Een punt met graad nul noemen we een *geïsoleerd punt*, we kunnen zo'n punt nooit vanuit een ander punt langs lijnen bereiken. Een punt met graad 1 in een graaf heet een *eindpunt*. Zo zijn de punten onderin een stamboom eindpunten. En de beide grafen van figuur 4.7 hebben elk één eindpunt. We zijn nu zover dat we ons eerste, elementaire resultaat in de grafentheorie kunnen afleiden: de som van de graden van de punten in een graaf G is gelijk aan tweemaal het aantal lijnen in G . Deze relatie kwamen we al tegen in opgave 4.2d. In stelling 4.1 noteren we de som van de graden met het symbool Σ ; indien u hier niet mee bekend bent, raadpleeg dan eventueel formule 8.1 en de toelichting erop.

STELLING 4.1

In een graaf $G = (V, E)$ geldt

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Het aantal incidenties vanuit de punten gezien

Het aantal incidenties vanuit de lijnen gezien

Bewijs

Om de stelling te bewijzen, tellen we het aantal incidenties in G op twee manieren. Eerst tellen we de incidenties uitgaande van de punten. Een punt v is bij $d(v)$ incidenties betrokken, dus de som van de graden van alle punten levert het totale aantal incidenties in G op.

Aan de andere kant is elke lijn bij twee incidenties betrokken, dus ook $2|E|$ geeft het aantal incidenties in G .

Of we op de ene of de andere manier het aantal incidenties tellen, doet er niet toe. In beide gevallen moet het resultaat hetzelfde zijn, dus is de som van de graden gelijk aan tweemaal het aantal lijnen. $\square$

Uit deze stelling volgt dat de som van alle graden in een graaf altijd even is. Hoe zit het met de graden zelf?

OPGAVE 4.7

Probeer eens een graaf met 5 punten te tekenen waarvan alle graden even zijn en eentje waarvan alle graden oneven zijn.

De som van alle graden, zoals volgt uit stelling 4.1, is een even getal, en is gelijk aan de som van de even graden en de oneven graden. De som van een willekeurig aantal even getallen is zelf even, dus de som van de even graden is even. Hieruit volgt dat de som van de oneven graden ook even moet zijn. Dit laatste kan alleen het geval zijn als er een even aantal punten is met oneven graad. Deze observatie vinden we belangrijk genoeg om haar als apart resultaat te formuleren.

STELLING 4.2

Het aantal punten met oneven graad in een graaf is even.

OPGAVE 4.8 (Aanw)

Teken een graaf met 6 punten, waarvan één met graad 5, één met graad 3 en alle overige met graad 4. Hoeveel niet-isomorfe grafen zijn er van dit type?

OPGAVE 4.9

Teken een plaatje van de volgende twee grafen.

- a Graaf G heeft als puntenverzameling de landen van de Europese unie, en twee landen zijn verbonden in G als ze een stuk grens gemeenschappelijk hebben. Zo is het punt 'België' verbonden met de punten 'Nederland', 'Duitsland', 'Luxemburg' en 'Frankrijk', maar niet met de overige punten Denemarken, Finland, Griekenland, Ierland, Italië, Oostenrijk, Portugal, Spanje, Groot-Brittannië, Zweden (we nemen hier de 15 leden van de Unie uit 1995).
- b Graaf H heeft als punten de deelverzamelingen van $\{1, 2, 3\}$, en twee deelverzamelingen verbinden we door een lijn als ze een lege doorsnede hebben.

4.3 De verbindingsmatrix en een algemener graafbegrip

Bij allerlei toepassingen gaat het om grafen met zeer veel punten en zeer veel lijnen. Of het gaat erom in korte tijd een oplossing te vinden, zoals het opstellen van routebeschrijvingen voor de wagens van de bezorgdienst van Van Gend en Loos aan het begin van elke dag. Of een bestaande oplossing moet door gewijzigde omstandigheden snel aangepast worden. Van het laatste is bijvoorbeeld sprake bij de dagelijkse roosterwijzigingen op een school. In zulke gevallen zouden we het probleem graag geautomatiseerd willen oplossen. Dan kunnen we niet meer met plaatjes werken, maar hebben we een *representatie van een graaf* nodig die in een computer kan worden opgeslagen. Let wel, voor zo'n representatie moeten we de punten nummeren of op een andere manier van een label voorzien.

We spreken dan van een *genummerde* of *gelabelde* graaf. Merk op dat een graaf verschillende nummeringen van zijn punten kan hebben. Er zijn meerdere representaties mogelijk. Alle hebben hun voor- en nadelen. Het hangt van het probleem en van de structuur van de graaf af met welke representatie het meest efficiënt gewerkt kan worden.

Genummerde graaf

Matrix

Een veel toegepaste representatie maakt gebruik van een $n \times n$ -matrix. Zo'n $n \times n$ -matrix is een vierkant schema van getallen met n rijen en n kolommen (zie figuur 4.9b). Hier volstaat deze omschrijving van een matrix. In blok 7 worden matrices op een andere manier gebruikt. Een punt van de graaf komt overeen met een rij én een kolom in de verbindingsmatrix en een lijn wordt in de verbindingsmatrix met een 1 aangegeven: zo betekent de eerste rij (0 1 0 1 0) in de matrix in figuur 4.9b dat punt 1 verbonden is met de punten 2 en 4, omdat in deze eerste rij een 1 staat in de tweede en de vierde kolom. En de tweede rij (1 0 0 0 1) betekent dat punt 2 verbonden is met de punten 1 en 5, omdat in deze tweede rij in de eerste en de vijfde kolom een 1 staat, enzovoort. De algemene formulering luidt als volgt.

Verbindingsmatrix

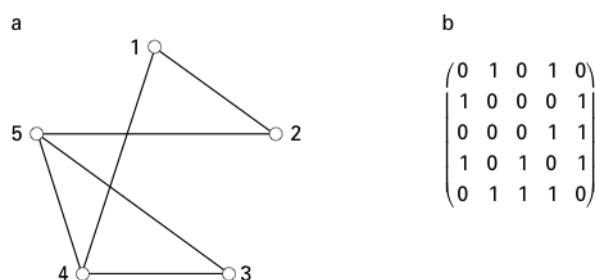
DEFINITIE 4.3

Zij $G = (V, E)$ een genummerde graaf met $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. De *verbindingsmatrix* van G is de $n \times n$ -matrix $A = (a_{ij})$, waarin a_{ij} het getal is in de i -de rij en de j -de kolom, waarvoor geldt:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } v_i \text{ en } v_j \text{ verbonden zijn} \\ 0 & \text{in de overige gevallen} \end{cases}$$

In de taal van de matrixtheorie is de verbindingsmatrix van een graaf een symmetrische (0, 1)-matrix met nullen op de hoofddiagonaal. De hoofddiagonaal bestaat uit de elementen a_{ii} , met $i = 1, 2, \dots, n$. De hoofddiagonaal loopt dus schuin van links boven naar rechts beneden. Symmetrisch wil zeggen dat $a_{ij} = a_{ji}$ voor $i = 1, 2, \dots, n$ en $j = 1, 2, \dots, n$. Of anders gezegd, de matrix is symmetrisch als we dezelfde matrix krijgen bij spiegelen om de hoofddiagonaal. De letter A , waarmee we de matrix noteren, komt van het Engelse woord 'adjacency matrix' ('adjacent' is Engels voor aangrenzend en staat voor onze term 'verbonden').

VOORBEELD 4.7



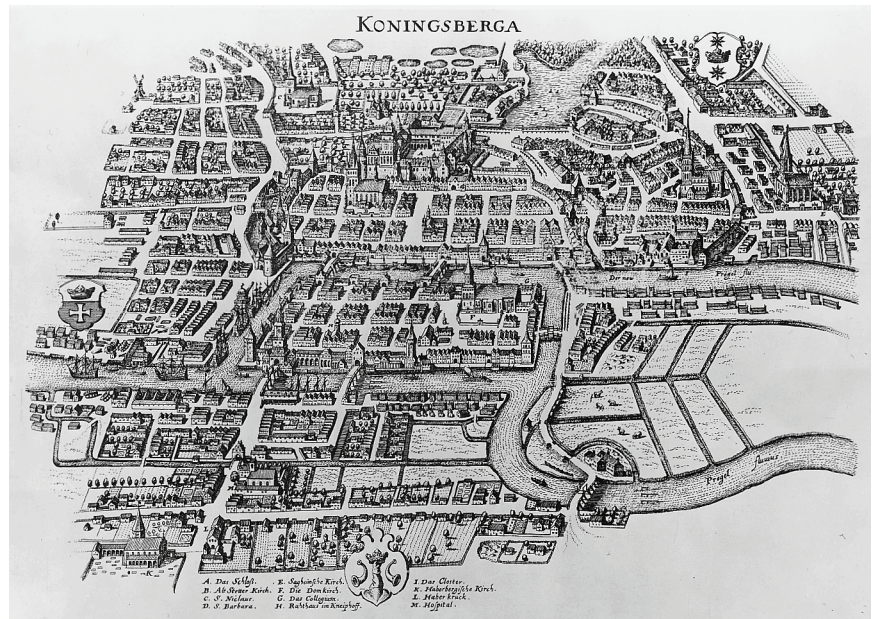
FIGUUR 4.9 Een genummerde graaf G met verbindingsmatrix A «

OPGAVE 4.10

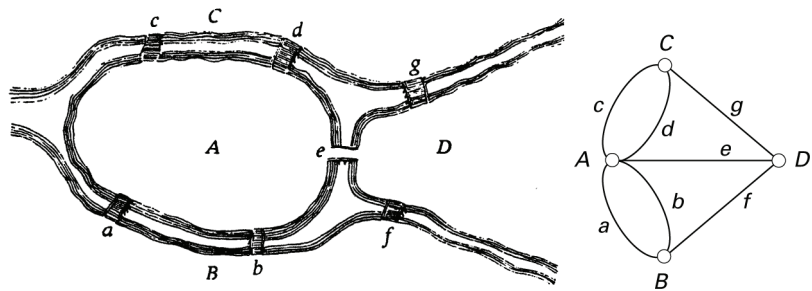
- Ga na dat de matrix in figuur 4.9b inderdaad symmetrisch is, dat wil zeggen dat $a_{ij} = a_{ji}$ voor $i = 1, 2, \dots, 5$ en $j = 1, 2, \dots, 5$.
- Controleer de juistheid van de derde, vierde en vijfde rij aan de hand van de graaf in figuur 4.9a.
- Stel dat in de graaf in figuur 4.9a de lijn $\{1, 5\}$ wordt toegevoegd, wat voor verandering houdt dat in voor de matrix in figuur 4.9b?

Koningsbergen

Stel dat we in een stad met rivieren, grachten en bruggen het patroon van bruggen bestuderen. Dan kunnen we de door water omgeven stadsdelen met punten weergeven en elke brug door een lijn tussen de bijbehorende punten. In figuur 4.10 zien we een overzicht van het achttiende-eeuwse Koningsbergen met een eiland in de rivier de Pregel, die zich daarna splitst, en een zevental bruggen tussen de verschillende oevers. Een schematische weergave van de bruggen en de bijbehorende 'bruggengraaf' ziet u in figuur 4.11.



FIGUUR 4.10 Königsbergen in het begin van de achttiende eeuw



FIGUUR 4.11 Het schema van bruggen in Koningsbergen met bijbehorende 'bruggengraaf'



Leonhard Euler

Volgens overlevering vroegen de inwoners van het achttiende-eeuwse *Koningsbergen* zich af of het mogelijk was de zondagse wandeling zo in te richten dat men elk van de zeven bruggen in Koningsbergen precies één keer overstak. Men probeerde een oplossing te vinden door week in week uit een andere route uit te stippelen.

De Zwitserse wiskundige Leonhard Euler, geboren te Basel in 1707 en overleden te Sint Petersburg in 1783, hoorde van dit probleem en pakte het meteen systematisch aan door het probleem voor willekeurige patronen van eilanden en bruggen te analyseren.

Euler is een van de meest productieve wiskundigen aller tijden. Zijn boeken, artikelen, manuscripten en brieven beslaan in de uitgave van zijn volledige werken een kleine 37 000 bladzijden. In 1736 verscheen van zijn hand in de *Verhandelingen van de Keizerlijke Akademie van Wetenschappen van Sint Petersburg* een artikel getiteld *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, hetgeen betekent 'Oplossing van een probleem betreffende de meetkunde van positie', waarin hij de analyse van het bruggenprobleem publiceerde. Euler gebruikte geen grafen bij zijn analyse. Hij zou dit ook niet gedaan kunnen hebben, want die werden pas een kleine anderhalve eeuw later, in 1878, door J.J. Sylvester ingevoerd.

Overigens zij opgemerkt dat in de Tweede wereldoorlog het oude hart van Koningsbergen is verwoest. Na de oorlog is het grootste deel van Oost-Pruisen, waar Koningsbergen lag, bij de toenmalige Sovjetunie ingelijfd. Koningsbergen heet sindsdien Kaliningrad.

Op de oplossing van het probleem voor willekeurige bruggengrafen komen we terug in paragraaf 4.4.6.

PUZZEL (facultatief)

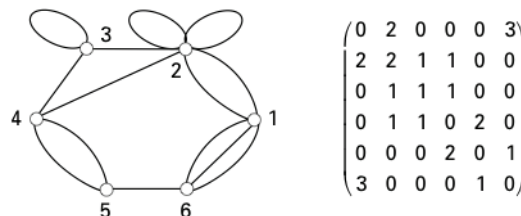
Probeer eens, zonder alle mogelijke wandelingen te controleren, een argument te vinden waarom een wandeling in Koningsbergen, waarbij elke brug precies eenmaal wordt overgestoken, niet bestaat.

Multigraaf Lus

We bekijken nu eerst een merkwaardigheid van de bruggengraaf.

U ziet dat er meerdere lijnen tussen twee punten kunnen lopen. Zo'n graaf noemen we een *multigraaf*. In een multigraaf laten we ook lussen toe. Een *lus* is een lijn die een punt met zichzelf verbindt. Dat zou bijvoorbeeld een brug kunnen zijn die een baai oversteekt. We maken gebruik van de verbindingsmatrix om dit algemener begrip multigraaf te introduceren. Zij $M = (m_{ij})$ een symmetrische $n \times n$ -matrix met als elementen m_{ij} , getallen uit $\mathbb{N}$. We kunnen M representeren met behulp van een plaatje: we tekenen n punten (cirkeltjes) genummerd van 1 t/m n . We verbinden punt i en punt j met m_{ij} lijnen en tekenen m_{ii} lussen bij punt i . Dan is M de *verbindingsmatrix* van de bijbehorende multigraaf.

VOORBEELD 4.8



FIGUUR 4.12 Een verbindingsmatrix met bijbehorende multigraaf «

Meervoudige lijn

In een multigraaf zijn de lijnen niet meer eenduidig bepaald door uiteinden.

Als m_{ij} groter is dan 1 (met $i \neq j$), dan noemen we de m_{ij} lijnen die de punten i en j verbinden, een *meervoudige lijn*. Zo vormen de drie lijnen tussen de punten 1 en 6 een drievoudige lijn. Een heel belangrijk verschil tussen een (gewone) graaf en een multigraaf is dat in de laatste een lijn niet meer eenduidig bepaald is door haar uiteinden: twee verschillende lijnen kunnen dezelfde uiteinden hebben. Dit heeft nogal wat consequenties. Zo is in een multigraaf de graad van een punt u (dit is het aantal incidenties waar u bij betrokken is) niet noodzakelijk gelijk aan het aantal buuren van dat punt. Merk op dat een lus aan beide uiteinden incident is met hetzelfde punt en dus 2 bijdraagt aan de graad van dat punt.

OPGAVE 4.11

Bepaal in de multigraaf van figuur 4.12 het aantal incidenties waarbij punt 1 betrokken is. Wat zijn de buuren van 1 (dat wil zeggen de punten die door een lijn met 1 verbonden zijn)?

Simpele graaf
Enkelvoudige graaf

Wat de multigrafen betreft, laten we het in deze cursus hierbij. Zij hier nog opgemerkt dat in sommige boeken het woord graaf gebruikt wordt voor wat wij hier een multigraaf noemen. In dat geval wordt onze graaf (zonder meervoudige lijnen of lussen) een *simpele* of *enkelvoudige graaf* genoemd.

4.4 Wandelen in een graaf

Veel problemen in de grafentheorie of in de toepassingen ervan betreffen het van punt naar punt gaan langs lijnen in de graaf. We zagen dat al bij het ‘strooiploegenprobleem’. Voor het efficiënt oplossen van dit probleem is nog heel wat theorie vereist, veel meer dan we hier kunnen behandelen. Een aantal van de fundamentele begrippen die voor dit soort problemen nodig zijn, worden in deze paragraaf ingevoerd. De terminologie die we kiezen, sluit zoveel mogelijk aan bij het aanschouwelijke karakter van de grafentheorie.

4.4.1 WANDELINGEN

Hoe vertaalt een wandeling in Koningsbergen zich in een ‘wandeling’ in de bruggengraaf? We beginnen in een punt, steken een brug, dus een lijn, over naar een ander punt, enzovoort. Maak zo maar eens een wandeling in de bruggengraaf van figuur 4.11 die zeven bruggen bevat. We maken dus een rij van afwisselend punten en lijnen, waarbij elke lijn het vorige met het volgende punt verbindt.

Wandeling

Lengte van een
wandeling

DEFINITIE 4.4

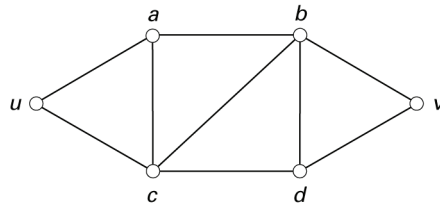
Een *wandeling* van v_0 naar v_k in een graaf G is een rij $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$ bestaande uit afwisselend punten en lijnen, waarin $v_0, v_1, \dots, v_k$ punten en $e_1, e_2, \dots, e_k$ lijnen zijn, waarbij v_{i-1} en v_i de uiteinden zijn van de lijn e_i , voor $i = 1, 2, \dots, k$. Het getal k , dit is het aantal lijnen in de rij, is de *lengte van de wandeling*.

Notatie

Zij $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$ een wandeling in een graaf G . Omdat we ons verder beperken tot gewone grafen, dus zonder meervoudige lijnen, wordt elke lijn vastgelegd door haar uiteinden. Daarom kunnen we de wandeling van v_0 naar v_k ook noteren met $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$.

De pijlen schrijven we tussen de punten om duidelijk aan te geven dat het hier om een wandeling gaat en niet om zomaar een rij punten of eventueel een verzameling. Merk op dat een punt of een lijn meerdere malen in de wandeling kan voorkomen.

VOORBEELD 4.9



FIGUUR 4.13 Vele mogelijkheden voor wandelingen van u naar v

We geven enkele wandelingen in de graaf van figuur 4.13.

- a $u \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow v$ is een wandeling van u naar v met lengte 5
- b $u \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow v$ is een wandeling met lengte 6; merk op dat we het punt c tweemaal gebruikt hebben
- c $u \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow v$ is een wandeling met lengte 6; merk op dat we de lijn tussen a en b tweemaal gebruikt hebben
- d $u \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow v$ is een wandeling met lengte 3
- e $u \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow v \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow u$ is een wandeling met lengte 8
- f $v \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow v$ is een wandeling met lengte 5

Beginpunt
Eindpunt

Zij $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$ een wandeling in een graaf G . We noemen v_0 het *beginpunt* en v_k het *eindpunt* van de wandeling. De lengte van de wandeling is, plastisch gezegd, het aantal 'stappen' in de wandeling, waarbij een stap bestaat uit het langs een lijn naar het volgende punt van de wandeling gaan. Een lijn $e = vw$ met haar uiteinden v en w kunnen we opvatten als een wandeling $v, e, w = v \rightarrow w$ bestaande uit één stap, dus met lengte 1, en een punt u kunnen we opvatten als een wandeling met lengte nul.

Gesloten wandeling

Als in een wandeling met positieve lengte begin- en eindpunt hetzelfde punt van de graaf zijn, dan noemen we de wandeling een *gesloten wandeling*. Als begin- en eindpunt verschillend zijn of de lengte van de wandeling nul is, dan hebben we het over een *open wandeling*.

Open wandeling

OPGAVE 4.12

Beschouw de graaf uit figuur 4.13.

- a Maak een wandeling van u naar v met lengte 8.
- b Bestaat er een wandeling van u naar v met lengte 2?
- c Welke van de wandelingen uit voorbeeld 4.9 zijn gesloten en welke open?

Het is natuurlijk maar de vraag of er tussen elk tweetal punten van een graaf wel altijd een wandeling bestaat. Daarom gebruiken we de volgende begrippen.

Samenhangend
Onsamenhangend

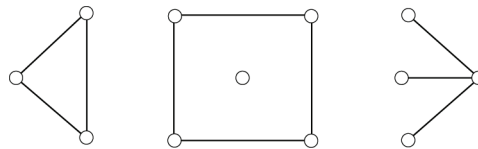
DEFINITIE 4.5

Een graaf is *samenhangend* als er tussen elk tweetal punten van de graaf een wandeling bestaat en *onsamenhangend* als dat niet het geval is.

Component

Een onsamenvhangende graaf bestaat uit een aantal samenhangende stukken, die we de *componenten* van de graaf noemen. Tussen twee componenten bestaat geen enkele verbinding. De graaf in figuur 4.14 is onsamenvhangend en heeft vier componenten, waarvan er één een geïsoleerd punt is. Een andere manier om te zeggen dat een graaf samenhangend is, is dat de graaf maar één component heeft.

VOORBEELD 4.10



FIGUUR 4.14 Een onsamenvhangende graaf met vier componenten «

4.4.2 PADEN

In een wandeling kunnen punten (en lijnen) vaker voorkomen. Wandelingen waarin dat niet gebeurt, spelen een speciale rol in de grafentheorie.

Pad

DEFINITIE 4.6

Een *pad* in een graaf G is een wandeling waarin geen punt meer dan eenmaal voorkomt.

Let wel, een pad is dus altijd open. Merk op dat, als punten niet vaker voorkomen, lijnen dan zeker niet vaker kunnen voorkomen. Uit de definities van pad en wandeling volgt dat de lengte van een pad het aantal lijnen is in het pad. Een pad met lengte k heeft dus k verschillende lijnen en $k + 1$ verschillende punten. Een lijn $e = vw$ met haar uiteinden v en w kunnen we opvatten als een pad $v, e, w = v \rightarrow w$ met lengte 1, en een punt u kunnen we opvatten als een pad met lengte nul.

VOORBEELD 4.11

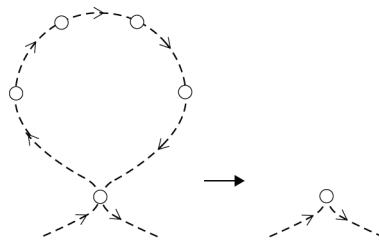
Bekijk voorbeeld 4.9. Welke van de in dit voorbeeld genoemde wandelingen is een pad? Alleen die van a en d zijn paden. Daarbij is d een zogeheten kortste pad, want een pad met lengte 2 of korter tussen u en v bestaat niet. Merk op dat we uit wandeling b een pad kunnen maken door het stukje $\rightarrow b \rightarrow a \rightarrow c$ weg te snijden. We houden dan het pad $u \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow v$ over. «

In voorgaand voorbeeld zien we dat we, door eventueel stukken van de wandeling weg te laten, uit de wandeling van u naar v een pad van u naar v kunnen maken.

Een wandeling van u naar v bevat altijd een pad van u naar v .

Dit geldt altijd: een wandeling van u naar v bevat een pad van u naar v . In kleine voorbeelden zien we dat onmiddellijk, maar als de graaf heel groot is, dat wil zeggen: heel veel punten en lijnen heeft, dan kunnen we dat niet meer met het blote oog waarnemen. Om een pad in de wandeling te vinden, hebben we dan een procedure nodig die we kunnen volgen en zo nodig programmeren zodat we het vinden van het pad aan de computer kunnen overlaten. In de omgangstaal kunnen we zo'n procedure als volgt beschrijven:

- begin in de wandeling $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$ te lopen vanuit het beginpunt v_0
- zodra we in een punt aankomen waar we al een keer eerder waren, zeg $v_i = v_j$, dan snijden we het stuk van de wandeling tussen v_i en v_j weg (zie figuur 4.15), dat wil zeggen: we houden de wandeling $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_i \rightarrow v_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow v_k$ over
- dit wegsnijden herhalen we waar nodig tot we in het eindpunt v_k zijn aangeland.



FIGUUR 4.15 Wegsnijden van een stuk uit een wandeling

OPGAVE 4.13

Pas de hiervoor beschreven procedure toe om via wegsnijden een pad te maken uit de wandeling $u \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 3 \rightarrow 11 \rightarrow 12 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow v$.

Merk op dat we een pad van u naar v ook in omgekeerde richting kunnen doorlopen, waarmee we een pad van v naar u krijgen met dezelfde lengte. In veel situaties, als er sprake is van 'tweerichtingsverkeer', interesseert het ons niet of het pad dat we bekijken, een pad van u naar v of een pad van v naar u is.

We spreken dan van een *pad* tussen u en v .

Pad tussen u en v

4.4.3 AFSTANDEN

De afstand tussen twee punten in een stad kunnen we hemelsbreed meten, maar daar hebben we niet zoveel aan als we van het ene punt naar het andere punt toe moeten. Dan is de lengte van de kortste weg, dus langs kruispunten en verbindende stukken straat, veel belangrijker. Deze kijk op afstand nemen we over voor grafen.

Afstand

DEFINITIE 4.7

Zij G een graaf. Voor twee punten u en v in dezelfde component van G is de *afstand* $d(u, v)$ tussen u en v de lengte van een kortste pad tussen u en v . Voor twee punten in verschillende componenten van G wordt de afstand op oneindig gesteld.

OPGAVE 4.14

Wat is de afstand tussen u en v in de graaf van figuur 4.13, en wat is de afstand tussen a en d in dezelfde graaf? Zijn er punten in deze graaf te vinden op afstand 4 van elkaar?

Intuïtief ziet dit afstandsbebegrip er heel bruikbaar uit. Maar we willen wel graag dat het aan de volgende eis voldoet. Als we van punt u naar punt v gaan en we maken een 'omweg' over punt x , dan mag dat niet korter zijn dan als we 'rechtstreeks' van u naar v gaan. Dat we met onze intuïtie op het goede spoor zaten, blijkt uit de volgende stelling.

STELLING 4.3

Zij $G = (V, E)$ een graaf. Dan is $d(u, v) \leq d(u, x) + d(x, v)$ voor elk drietal punten u, v en x van G .

Bewijs

Voeg kortste u, x -pad samen met kortste x, v -pad. Deze wandeling is ten minste even lang als kortste u, v -pad.

Laat u, v en x drie willekeurige punten zijn van G , en zeg dat $d(u, x) = k$ en $d(x, v) = m$. Zij $u \rightarrow u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_{k-1} \rightarrow x$ een kortste pad van u naar x , en zij $x \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{m-1} \rightarrow v$ een kortste pad van x naar v . Dan is $u \rightarrow u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_{k-1} \rightarrow x \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{m-1} \rightarrow v$ een wandeling van u naar v met lengte $k + m$. Een kortste pad tussen u en v zal nooit langer zijn dan de aldus geconstrueerde wandeling, en dus heeft een kortste pad tussen u en v een lengte van ten hoogste $k + m$, hetgeen we bewijzen moesten. $\square$

Merk op dat in voorgaand bewijs de twee paden wel eens meer punten gemeenschappelijk kunnen hebben dan alleen x . Daarom konden we alleen maar zeggen dat $u \rightarrow u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_{k-1} \rightarrow x \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{m-1} \rightarrow v$ een wandeling is; het hoeft immers geen pad te zijn.

OPGAVE 4.15

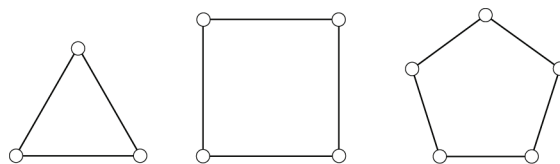
- a Maak een voorbeeld van een graaf met kortste paden $u \rightarrow u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_{k-1} \rightarrow x$ van u naar x , en $x \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{m-1} \rightarrow v$ van x naar v , waarbij $u \rightarrow u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_{k-1} \rightarrow x \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{m-1} \rightarrow v$ geen pad is.
- b Maak een voorbeeld van een graaf met kortste paden $u \rightarrow u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_{k-1} \rightarrow x$ van u naar x en $x \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{m-1} \rightarrow v$ van x naar v waarbij $u \rightarrow u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_{k-1} \rightarrow x \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{m-1} \rightarrow v$ ook een pad is en geen enkel punt gemeen heeft met een kortste pad van u naar v .

Driehoeks-ongelijkheid

De ongelijkheid $d(u, v) \leq d(u, x) + d(x, v)$ staat bekend als de *driehoeksongelijkheid*. De driehoeksongelijkheid komt ook voor in andere onderdelen van de wiskunde waar een afstandsbegrip een rol speelt.

4.4.4 CYKELS

Bij wandelingen hebben we gesloten en open wandelingen. Een pad is een open wandeling waarin alle punten verschillend zijn. Gesloten wandelingen waarin alle punten verschillend zijn (behalve natuurlijk begin- en eindpunt), spelen, net als paden, een zeer belangrijke rol. Daarom krijgen ook zij een eigen naam: *cykel*, uit te spreken als siekel. In figuur 4.16 ziet u een plaatje van een cykel met lengte 3, één met lengte 4 en één met lengte 5.



FIGUUR 4.16 De cyclen met lengte 3, 4 en 5

Cykel

DEFINITIE 4.8

Een *cykel* met lengte k in een graaf G is een gesloten wandeling $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow v_0$ met lengte k waarin de punten $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$ *alle* verschillend zijn en waarin alle lijnen verschillend zijn.

OPGAVE 4.16

Welke van de wandelingen in voorbeeld 4.9 is een cykel?

Een cykel met lengte k heeft dus k verschillende punten en k verschillende lijnen. De lengte van een cykel is natuurlijk het aantal lijnen in de cykel. Een cykel met even lengte noemen we een *even cykel* en een cykel met oneven lengte een *oneven cykel*. In een multigraaf kunnen lussen en meervoudige lijnen voorkomen. Een lus e met uiteinde u kunnen we opvatten als een cykel u, e, u . Deze cykel heeft lengte 1. Als we twee lijnen e en f nemen van een meervoudige lijn tussen u en v , dan is u, e, v, f, u een cykel met lengte 2. In een gewone graaf, dus zonder lussen of meervoudige lijnen hebben eventuele cycli een lengte van ten minste 3.

OPGAVE 4.17

Geef in de graaf van figuur 4.13 een cykel aan met lengte 3, lengte 4, lengte 5 en lengte 6. Bestaat er in deze graaf ook een cykel met lengte 7?

Volgens definitie 4.8 heeft de cykel $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow v_0$ een beginpunt v_0 en een oriëntatie, aangegeven door de pijlen. Door in een ander punt te beginnen, krijgen we formeel een andere cykel, maar we lopen nog wel steeds hetzelfde ‘rondje’ in de graaf. Vandaar dat we dan toch van dezelfde cykel spreken. Net zoals bij paden zullen we in het geval van ‘tweerichtingsverkeer’ afzien van de oriëntatie van de cykel. We zagen hiervoor dat elke wandeling tussen u en v een pad tussen u en v bevat. Is het nu ook zo dat elke gesloten wandeling een cykel bevat? We zien eenvoudig dat dit niet altijd het geval is. Neem maar een pad van u naar v , doorloop dat eerst van u naar v en dan in omgekeerde richting van v naar u . Dit is een gesloten wandeling die duidelijk geen cykel bevat. Algemener kunnen we gesloten wandelingen maken zonder cycli door nooit een ‘ommetje’ te maken en geregeld ‘op onze schreden terug te keren’. Bij zo’n wandeling gaan we na elke keer dat we door een lijn heen gaan ook een keer door die lijn terug. Dus elke lijn komt een even aantal keren in zo’n wandeling voor, zodat de wandeling een even lengte heeft. Hoe zit dat met gesloten wandelingen met oneven lengte? Merk op dat het bewijs van de volgende stelling niet alleen een redenering is om ons van de juistheid van de stelling te overtuigen. Het is ook een beschrijving van een procedure om in een gesloten wandeling met oneven lengte daadwerkelijk een oneven cykel te vinden. Het bewijs van stelling 4.4 behoort niet tot de tentamenstof. We raden u aan het toch door te nemen om uw vaardigheid te vergroten in het leveren van elementaire bewijzen.

STELLING 4.4

Een gesloten wandeling met oneven lengte bevat een oneven cykel.

Bewijs

Loop tot een punt waar u eerder was.

Stuk tussen eerste en tweede bezoek aan dit punt is gesloten wandeling.

Als oneven, dan oneven cykel. Zij $Q = v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow v_k \rightarrow v_0$ een gesloten wandeling met oneven lengte. We beginnen in v_0 te lopen net zo lang tot we in een punt komen waar we al eerder waren (dit moet eens gebeuren omdat we in ieder geval in v_0 terugkomen), zeg dat v_i en v_{i+r} hetzelfde punt zijn, voor zekere $r > 0$. Dan is $v_i \rightarrow v_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{i+r}$ een gesloten wandeling waarin, afgezien van begin- en eindpunt, elk punt

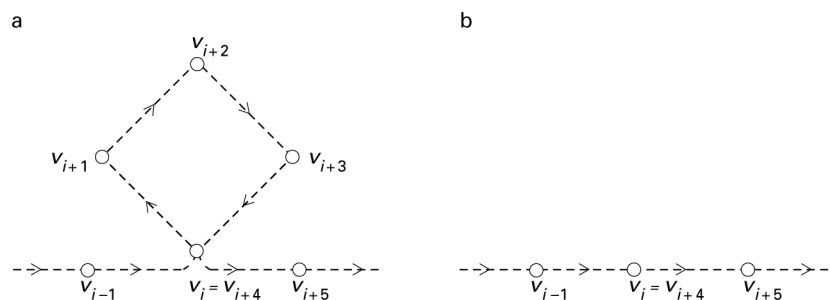
Als even, dan
wegsnijden.

Herhaal tot oneven
cykel overblijft.

Dit lukt omdat V
eindig is.

ten hoogste eenmaal voorkomt, zie figuur 4.17a. Als r oneven is, dan is deze gesloten wandeling een oneven cykel en hebben we een oneven cykel gevonden. Als r even is, dan snijden we het stuk tussen v_i en v_{i+r} uit de wandeling weg en houden een kortere oneven gesloten wandeling over, zie figuur 4.17b.

We herhalen het voorgaande, dat wil zeggen dat we in v_0 beginnen te lopen net zo lang tot we in een punt komen waar we al eerder waren, enzovoort. Dit doen we net zo lang tot we wel een keer een oneven gesloten wandeling die een oneven cykel is tegenkomen. Dat dit (ooit) zal gebeuren, weten we omdat we natuurlijk niet oneindig vaak even stukken met positieve lengte uit een oneven wandeling weg kunnen snijden.



FIGUUR 4.17 Wegsnijden van een even stuk

□

OPGAVE 4.18

Wat is de minimale lengte van een even stuk wandeling dat we moeten wegsnijden in het bewijs van stelling 4.4?

4.4.5 TWEEDELINGSGRAFEN

Uit het voorgaande blijkt dat even en oneven cyclen een verschillende rol spelen. Dit blijkt des te sterker voor de volgende klasse van grafen, wederom een belangrijke klasse in zowel de theorie als de toepassingen.

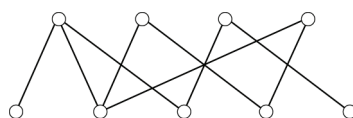
Tweedelingsgraaf

DEFINITIE 4.9

Een graaf $G = (V, E)$ is een *tweedelingsgraaf* als de puntenverzameling V verdeeld kan worden in twee delen V_1 en V_2 zodat $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, en zodat elke lijn in G een uiteinde in V_1 en een uiteinde in V_2 heeft.

Tweedeling
Bipartiete graaf

We noteren de tweedelingsgraaf $G = (V, E)$ met *tweedeling* V_1, V_2 ook wel met $G = (V_1, V_2; E)$. Een tweedelingsgraaf wordt vaak *bipartiete graaf* genoemd. Een beeldende manier om aan te geven dat een graaf een tweedelingsgraaf is, is de punten van V_1 rood te kleuren en die van V_2 blauw, zodat elke lijn een rood en een blauw uiteinde heeft. In een plaatje tekenen we de punten in het ene part boven en van het andere part onder, zoals in figuur 4.18. Dan loopt elke lijn dus van boven naar beneden. Natuurlijk kunnen we de graaf ook tekenen met linker- en rechterpunten, waarbij elke lijn van links naar rechts loopt.



FIGUUR 4.18a Een tweedelingsgraaf met boven- en onderpunten

STELLING 4.5

Figuur 4.18a illustreert een voor de hand liggend voorbeeld van een tweedeling. Maar definitie 4.9 is ruim: een tweedelingsgraaf kan ook uit meerdere samenhangende componenten en/of zelfs geïsoleerde punten bestaan. Zolang we de punten maar kunnen verdelen in twee verzamelingen V_1 en V_2 en de eventueel (maar niet noodzakelijkerwijze) aanwezige lijnen voldoen aan het criterium van de definitie is er sprake van een tweedelingsgraaf. Een complexer voorbeeld zien we in 4.18b. De plaatsing van de geïsoleerde punten 4, 5 en 6 in V_1 of V_2 kan overigens volledig vrij gekozen worden.



FIGUUR 4.18b Een tweedelingsgraaf met verschillende componenten

OPGAVE 4.19

- a Zij G de graaf bestaande uit alleen een cykel met lengte 4. Is G een tweedelingsgraaf?
- b Zij H de graaf bestaande uit alleen een cykel met lengte 5. Is H een tweedelingsgraaf?

Zoals gezegd en ook door opgave 4.19 wordt gesuggereerd, spelen even en oneven cyclen een heel verschillende rol bij tweedelingsgrafen.

Een samenhangende graaf $G = (V, E)$ is een tweedelingsgraaf dan en slechts dan als G geen oneven cyclen bevat.

NB: het volgende bewijs is vrij lastig en behoort daarom weer niet tot de tentamenstof. Toch raden wij u opnieuw aan het door te nemen en te proberen het te begrijpen om uw vaardigheid in het leveren van elementaire bewijzen te vergroten. Maak daarbij plaatjes bij de diverse bewijsstappen.

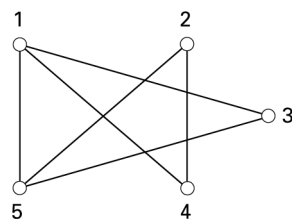
AANWIJZINGEN LEEREENHEID 4

- 4.5 In figuur 4.7a is punt 5 het enige punt met maar één buur en in figuur 4.7b is punt e het enige punt met maar één buur. Willen de twee grafen isomorf zijn, dan moet dus gelden: $5 \rightarrow e$. Welke punten moeten vervolgens in elkaar overgaan en gaan dan ook verbonden punten in elkaar over?
- 4.8 Nummer de punten met 1, 2, ..., 6. Zonder verlies van algemeenheid kan punt 1 graad vijf hebben en punt 2 graad drie, waarbij 2 verbonden is met de punten 1, 5 en 6. Op hoeveel manieren kan de graaf worden afgemaakt?
- 4.24 **a** Bedenk dat de som van de graden gelijk is aan de som van de uitgraden plus de som van de ingraden, dus gelijk aan tweemaal het aantal pijlen
b Beschouw een gerichte graaf bestaande uit alleen een gerichte cykel met 4 of 5 punten.
- 4.29 Probeer het uit, door in een graaf bestaande uit alleen een cykel met lengte 3 de lijnen op verschillende manieren te oriënteren.
- 4.31 Probeer het bewijs voor het ongericht geval aan te passen voor het gerichte geval.

TERUGKOPPELING LEEREENHEID 4

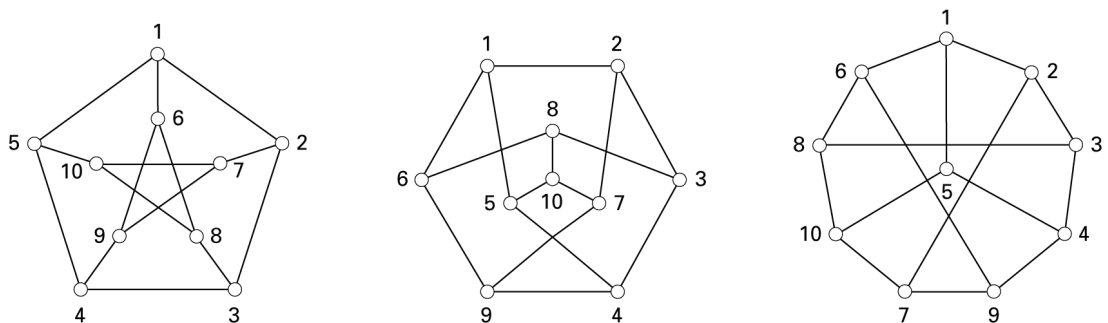
1 Uitwerking van de opgaven

- 4.1 a $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ en $E = \{12, 13, 14, 24, 34, 45\}$.
 b $V = \{a, b, c, d, e\}$ en $E = \{ab, ac, bc, bd, cd, de\}$.
- 4.2 a De burens van s zijn p en q , en die van t zijn p, q en r .
 b Punt t is incident met de lijnen tp, tq en tr , en is dus bij 3 incidenties betrokken.
 c Er zijn 3 incidenties bij p en t elk en 2 bij q, r en s elk, dus in totaal 12.
 d Het aantal incidenties is tweemaal het aantal lijnen. Iedere lijn is immers betrokken bij twee incidenties.
- 4.3 De gevraagde graaf:



FIGUUR 4.30 Graaf G' met $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ en verbindingsvoorwaarden

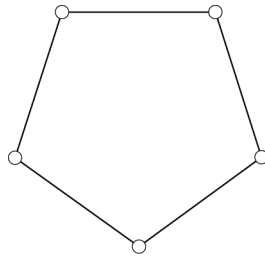
- 4.4 Nummering van de petersengraaf levert de volgende plaatjes:



FIGUUR 4.31 De petersengraaf genummerd

- 4.5 Het is duidelijk dat 5 overeenkomt met e , want in figuur 4.7a heeft alleen 5 maar één buur en in figuur 4.7b heeft alleen e maar één buur. Maar dan volgt dat 4 overeenkomt met d , en nu gaat het mis, want 4 heeft naast 5 nog drie burens en d heeft er naast e maar twee.
- 4.6 a Punt 4 heeft graad vier, punt 1 heeft graad drie, punten 2 en 3 hebben graad twee en punt 5 heeft graad één.
 Punten c, b en d hebben graad drie, punt a heeft graad twee en punt e heeft graad één.
 b Ja, want bij isomorfie moeten er gelijke aantallen punten met gelijke graden voorkomen.

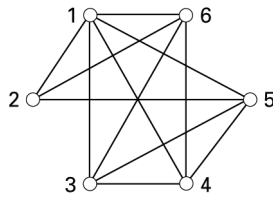
- 4.7 Een graaf met 5 punten met even graad levert het volgende plaatje:



FIGUUR 4.32 Een graaf met 5 punten met even graad

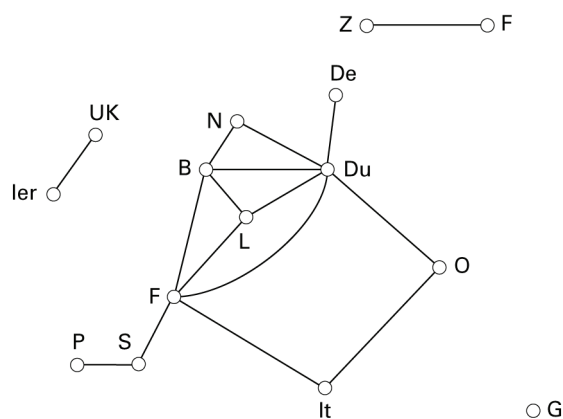
Een graaf met 5 punten met oneven graad bestaat niet.

- 4.8 Nummer de punten van de graaf met 1, 2, ..., 6, zie figuur 4.33. Omdat het gaat om niet-isomorfe grafen, mogen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat punt 1 graad vijf heeft en punt 2 graad 3, waarbij punt 2 verbonden is met de punten 1, 5, en 6 en niet met 3 en 4. Nu moeten de punten 3, 4, 5 en 6 graad vier hebben. Dat kan alleen als zo de graaf in figuur 4.33 ontstaat. Er is dus maar één niet-isomorfe graaf met de gevraagde eigenschap.



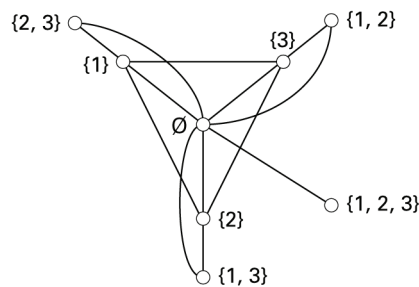
FIGUUR 4.33 De ene niet-isomorfe graaf met de gevraagde eigenschap

- 4.9 a Graaf G .



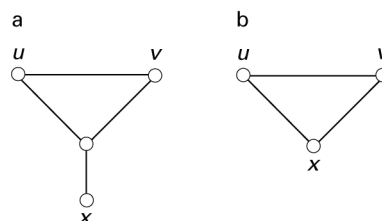
FIGUUR 4.34 De Europese unie uit 1995 als graaf

b Graaf H .



FIGUUR 4.35 De lege-doorsneegraaf van alle deelverzamelingen van $\{1, 2, 3\}$

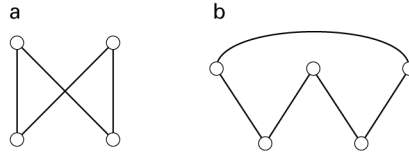
- 4.10 **c** In de eerste rij, vijfde kolom komt een 1 te staan en in de vijfde rij, eerste kolom.
- 4.11 Punt 1 is betrokken bij twee incidenties met lijnen tussen 1 en 2 en bij drie incidenties met lijnen tussen 1 en 6, dus in totaal bij vijf incidenties. Punt 1 heeft maar twee buren, namelijk 2 en 6.
- 4.12 **a** Bijvoorbeeld $u \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow v$.
b Nee.
c De eerste vier wandelingen zijn open, de laatste twee gesloten.
- 4.13 Eerst snijden we het stuk tussen de twee voorkomens van 4 eruit: resultaat $u \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 3 \rightarrow 11 \rightarrow 12 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow v$. Hieruit snijden we de heen-en-weer-stap tussen 8 en 9: resultaat $u \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 3 \rightarrow 11 \rightarrow 12 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow v$. Ten slotte moeten we hieruit dan nog het stuk tussen de twee voorkomens van 3 wegsnijden: resultaat $u \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 11 \rightarrow 12 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow v$.
- 4.14 Het pad $u \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow v$ is een kortste pad, dus de afstand tussen u en v is drie, terwijl de afstand tussen a en d twee is. Er zijn geen twee punten op afstand 4 van elkaar te vinden.
- 4.15 De gevraagde grafen zien er als volgt uit:



FIGUUR 4.36 Voorbeelden van grafen met gestelde voorwaarden

- 4.16 Alleen wandeling f is een cykel.

- 4.17 Een cykel met lengte drie is $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$, met lengte vier is $a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow a$, en met lengte vijf is $a \rightarrow b \rightarrow v \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow a$, en met lengte 6 is $u \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow v \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow u$. Er is geen cykel met lengte 7, want er zijn niet eens 7 verschillende punten in de graaf.
- 4.18 De kortst mogelijk gesloten wandeling is van type $u \rightarrow v \rightarrow u$, en dit is een wandeling met even lengte. Dus zo'n soort stukje is het kortste stukje dat we mogelijkerwijs moeten wegsnijden.
- 4.19 **a** Ja, zie figuur 4.37a.
b Nee; hoe we de vijf punten in twee parten ook verdelen, er is altijd een lijn tussen twee punten in hetzelfde part te vinden. Zie figuur 4.37b.



FIGUUR 4.37

Wel (a) en geen (b) tweedelingsgraaf