Inhoud leereenheid 1

Inleiding

Introductie *13*

Leerkern *13*

1.1 Wat is logica? *13*
1.2 Logica en informatica *13*

Leereenheid 1

Inleiding

INTRODUCTIE

Studeeraanwijzing
Deze leereenheid is een leesleereenheid. Er zijn geen leerdoelen, er zijn geen opgaven en er is geen zelftoets bij deze leereenheid.

LEERKERN

1.1 Wat is logica?

Lees paragraaf 1.1 van het tekstboek.

1.2 Logica en informatica

Lees paragraaf 1.2 van het tekstboek.

Blok 1

Propositielogica

Inhoud leereenheid 2

Propositielogica: syntaxis en semantiek

Introductie *17*

Leerkern *18*

2.1 Inleiding *18*
2.2 Syntaxis van de propositielogica *19*
2.3 Semantiek van de propositielogica *20*
2.4 Modellen *22*
2.5 Tot besluit *24*

Zelftoets *25*

Leereenheid 2

Propositielogica: syntaxis en semantiek

INTRODUCTIE

Vanuit de structuur van gevolgtrekkingen in natuurlijke taal wordt in hoofdstuk 2 van het tekstboek de taal van de propositielogica geïntroduceerd.
In het eerste deel van deze leereenheid maakt u kennis met de vorm van formules uit de propositielogica en met de begrippen inductief definiëren, substitutie, formuleschema en constructieboom.
In het tweede deel van de leereenheid zullen we aan formules een betekenis toekennen. Dit toekennen van een betekenis heet de semantiek van de propositielogica. Bij dit toekennen zullen we onder andere gebruikmaken van constructiebomen. Aan het eind wordt onder andere kort ingegaan op toepassingen van de propositielogica.
Een belangrijk begrip uit deze leereenheid is het begrip 'model' van een formuleverzameling. Ook in het onderdeel 'predikaatlogica' komt dit begrip uitvoerig aan de orde.

LEERDOELEN

Na het bestuderen van deze leereenheid wordt verwacht dat u
- inductief kunt definiëren
- formules uit de propositielogica kan herkennen en kan construeren
- substituties uit kunt voeren op propositielogische formules
- een constructieboom kunt maken van een formule
- de waarheidstabellen voor de connectieven $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ en $\neg$ op kunt schrijven
- met behulp van een constructieboom bij een gegeven waardering de waarde van een formule uit de propositielogica kunt bepalen
- de waarheidstabel van een formule uit de propositielogica op kunt stellen
- na kunt gaan of een gegeven formule een tautologie is
- na kunt gaan of twee formules logisch equivalent zijn
- bij een formule een disjunctieve normaalvorm kunt construeren
- het begrip 'model van een formuleverzameling' kent
- het begrip 'functioneel volledig' kent.

Studeeraanwijzingen
Paragrafen 2.1 en 2.5 zijn leesparagrafen.
Per paragraaf van het tekstboek kunt u extra ondersteuning, standaardopgaven en steropgaven aantreffen. De extra ondersteuning is facultatief. Als u het tekstboek hebt bestudeerd, kennis hebt genomen van eventuele belangrijke aanvullingen en de standaardopgaven kunt maken, beheerst u de stof in voldoende mate. De steropgaven zijn geen tentamenstof.
Aan het eind van de terugkoppeling van de leereenheid staat een overzicht van waar u de tekstboekopgaven bij dit hoofdstuk in het werkboek terugvindt.

LEERKERN

2.1 Inleiding

Lees paragraaf 2.1 van het tekstboek.

2.2 Syntaxis van de propositielogica

Extra ondersteuning

Lees paragraaf 2.2 tot en met definitie 2.1.

Om te beginnen wordt het alfabet van de propositielogica ingevoerd. Probeer, voor u verder leest, een aantal voorbeelden te verzinnen van zinnen uit de natuurlijke taal die met logische symbolen kunnen worden ontleed.

OPGAVE° 2.2.1 (Aanw)
Opgave 2.1 uit het tekstboek.
Geef de volgende zinnen weer in propositionele notatie:
i ‘Als de bus niet komt, komen de tram en de trein’
ii ‘Als de tram komt als de trein niet komt, dan komen de trein en de bus niet allebei’.

Lees nu paragraaf 2.2 verder tot en met voorbeeld 2.3.

Hierin wordt de syntactische vorm van formules in de propositielogica besproken.

OPGAVE° 2.2.2
Deze opgave traint u in het herkennen van de logische vorm van zinnen in natuurlijke taal. Wat is de vormnaam van de volgende zinnen:
a Jan doet de afwas en Piet strijkt de was.
b Als Marie fietst, dan helpt Karel in de tuin en eet Joris soep.
c Jan geeft een hand, dan en slechts dan als Piet eerst een hand geeft.
d Als Liesbet thuis is en Karel huiswerk maakt, blijft Hans op school.
e Karel eet appels, of Jan doet de afwas als Lizet neuriet.

OPGAVE° 2.2.3
Deze opgave traint u in het interpreteren van propositielogische formules.
Stel dat de volgende atomaire proposities gegeven zijn:
h Hans geeft water
c Carla plant een boom
l Leendert graaft een gat
Wat is de vormnaam van de volgende propositielogische formules en hoe spreekt men deze formules uit *in volzinnen* in natuurlijke taal?
a $(h \leftrightarrow c)$
b $(l \vee h)$
c $(\neg h \rightarrow l)$
d $\neg(h \wedge (l \wedge c))$

OPGAVE° 2.2.4
Welke van de volgende rijtjes symbolen zijn formules:
a $p \wedge q \vee r$
b $(p \wedge q) \leftrightarrow r$
c $((p \rightarrow q) \vee r)$
d $(p \wedge q) \vee r)$

Lees paragraaf 2.2 verder tot en met voorbeeld 2.6.

De uitspraak van Griekse letters vindt u in de bijlagen. De substitutie $[\psi/p]\varphi$ spreken we uit als: 'de substitutie van ψ voor p in φ'.

OPGAVE° 2.2.5
Voer de volgende substituties uit:
a $[p/q]p$
b $[p/q]q$
c $[p/q]r$
d $[q/p](p \vee p)$

OPGAVE° 2.2.6
Welke van de volgende propositielogische formules zijn instanties van het formuleschema $(\varphi \rightarrow \varphi)$:
a $((p \vee p) \rightarrow (p \vee p))$
b $((q \rightarrow (q \rightarrow q)) \rightarrow (q \rightarrow (q \rightarrow q)))$
c $((p \vee p) \rightarrow p\ )$

Lees nu verder tot aan het eind van paragraaf 2.2.

OPGAVE° 2.2.7
Geef een constructieboom voor de volgende formules:
a $((p \wedge q) \leftrightarrow r)$
b $((p \rightarrow q) \rightarrow r)$
c $(\neg\neg\neg p \vee (r \rightarrow s))$

OPGAVE° 2.2.8 (Aanw)
Wat is het bereik van ¬ in de volgende formules:
a $(\neg p \vee (r \rightarrow s))$
b $\neg(p \vee (r \rightarrow s))$
c $(p \vee (\neg r \rightarrow s))$

Standaardopgaven

Lees paragraaf 2.2.

OPGAVE 2.2.9 (Aanw)
Geef een inductieve definitie van de even natuurlijke getallen.

OPGAVE 2.2.10
Geef een inductieve definitie van de formules van de propositielogica die alleen de connectieven ¬ en ∧ bevatten.

OPGAVE 2.2.11
Is de formule $((p \wedge q) \vee r)$ een disjunctie of een conjunctie?

OPGAVE 2.2.12
Geef de uitkomst van de volgende substituties:
a $[p/q](p \vee q)$
b $[q/p](p \vee \neg p)$
c $[(p \wedge q)/p](p \wedge q)$

OPGAVE 2.2.13
U kunt ook meerdere substituties achter elkaar uitvoeren. We lezen $[\psi/p][\varphi/q]\chi$ als $[\psi/p]([\varphi/q]\chi)$; u voert dus eerst de 'binnenste' substitutie uit. Geef de uitkomst van de volgende substituties:
a $[p/q][p/q](q \vee r)$
b $[p/q][q/r](q \vee r)$
c $[q/r][p/q](q \vee r)$

OPGAVE 2.2.14
Geef alle mogelijke propositielogische interpretaties van de volgende zin, met hun constructiebomen: 'Karel fietst niet naar huis en Jan naar school'. Wat is het bereik van de conjunctie in de verschillende interpretaties?

OPGAVE 2.2.15
Opgave 2.3 uit het tekstboek.
Welke getallen x voldoen aan de volgende condities:
i $(\neg(p \wedge q) \wedge r)$
ii $((\neg p \wedge q) \wedge r)$
iii $\neg(p \wedge (q \wedge r))$
waarbij p = '$x \leq 1$', q = '$x \leq 3$' en r = '$x \geq 2$'.
Deze opgave traint u in het vertalen van logica in een 'natuurlijke' taal, in dit geval de taal van de wiskunde. Het gaat om natuurlijke getallen. In het tekstboek zijn de buitenste haakjes in de onderdelen i en ii weggelaten. Dit is een conventie terwille van het gemak, waar in paragraaf 2.4 op wordt ingegaan.

Steropgave

OPGAVE* 2.2.16
Opgave 2.7 uit het tekstboek.
In de informatica definieert men programmeertalen vaak via de zogeheten *Backus-Naur form* (BNF). Voor propositionele formules is de BNF-notatie als volgt (waarbij F staat voor Formule):

$$F := \text{ATOM} \mid \neg F \mid (F \wedge F) \mid (F \vee F) \mid (F \to F) \mid (F \leftrightarrow F)$$

Laat zien dat dit dezelfde verzameling oplevert als definitie 2.2.

2.3 Semantiek van de propositielogica

Extra ondersteuning

Bestudeer paragraaf 2.3 van het tekstboek tot aan de margetekst '*De waarheidstabellen van* $\wedge$, $\neg$, $\vee$, $\to$ *en* $\leftrightarrow$'.

In dit gedeelte is de waarheidstabel voor het connectief $\wedge$ besproken.

Probeer, voor u verder leest, zelf een tabel op te stellen voor één of meer van de connectieven $\neg$, $\vee$, $\to$ en $\leftrightarrow$. Vergelijk vervolgens uw tabel met de tabel in de tekst. Het is mogelijk dat u andere uitkomsten gegeven hebt, bijvoorbeeld in de eerste rij van het connectief $\vee$ een 0 in plaats van een 1. Dat komt omdat de natuurlijke taal soms dubbelzinnig is. Onder 'a of b' kunnen we verstaan het inclusieve of: a of b of zowel a als b, of het exclusieve of: a of b, maar niet a en b tegelijkertijd. Om binnen de logica ondubbelzinnig met connectieven om te kunnen gaan, moeten we dus afspraken maken over de betekenis van deze connectieven. Die afspraken zijn in de waarheidstabellen vastgelegd. In het tekstboek wordt in de toelichting na de tabellen hier nog nader op ingegaan.

Bestudeer paragraaf 2.3 verder tot en met voorbeeld 2.9.

OPGAVE° 2.3.1
Wat is de waarde van de formule $((p \wedge q) \vee \neg r)$ uit voorbeeld 2.9 als $V(p) = V(q) = V(r) = 1$.

OPGAVE° 2.3.2 (Aanw)
Bepaal de waarde van $(\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \vee q))$ als $V(p) = V(q) = 0$.

Lees paragraaf 2.3 uit.

Belangrijke aanvulling

In de volgende opgave wordt gevraagd naar de waarheidstabel van het formuleschema $((\varphi \vee \neg\psi) \wedge (\chi \rightarrow \varphi))$. Zo'n tabel geeft de waarde van het schema voor alle mogelijke verschillende waarderingen. Hoeveel verschillende waarderingen zijn er voor dit schema? Kunt u een systematische manier bedenken om deze waarderingen op te sommen?

Het formuleschema bevat drie formulevariabelen, er zijn dus acht (2^3) verschillende waarderingen. U kunt deze waarderingen het best op een systematische manier opschrijven, bijvoorbeeld als volgt:

De drie cijfers die onder de formules φ, ψ en χ staan, vormen samen een getal van drie cijfers dat bestaat uit enkel enen en/of nullen. Begin met het grootst mogelijke getal dat op deze manier gevormd kan worden (dus 111), neem daarna het eerst daarop volgende kleinere getal (110), enzovoorts. (Het getal na 110 is dan 101, omdat alleen getallen opgebouwd uit enen en nullen meedoen.) Als u bekend bent met het tweetallig stelsel, dan kunt u zien dat we in feite in het tweetallig stelsel terugtellen van 7 naar 0.

We krijgen dan de volgende lijst van waarderingen:

	φ	ψ	χ
V_1	1	1	1
V_2	1	1	0
V_3	1	0	1
V_4	1	0	0
V_5	0	1	1
V_6	0	1	0
V_7	0	0	1
V_8	0	0	0

U kunt natuurlijk deze waarderingen ook via een ander systeem opschrijven. U krijgt dan de lijst in een andere volgorde, waarbij de waarderingen een ander nummer krijgen. In deze cursus zullen we meestal met het systeem werken dat we hiervoor hebben gebruikt.

Standaardopgaven

Lees paragraaf 2.3. Er is een belangrijke aanvulling direct vóór deze leesaanwijzing.

OPGAVE 2.3.3
Maak een waarheidstabel voor het formuleschema $((\varphi \vee \neg\psi) \wedge (\chi \rightarrow \varphi))$.

OPGAVE 2.3.4
Geef de waarheidstabel voor het exclusieve 'of'.

OPGAVE 2.3.5 (Aanw)
Intuïtief is de waarde van $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ gelijk aan die van de conjunctie van de implicaties $(\varphi \to \psi)$ én $(\psi \to \varphi)$. Dit zou betekenen dat voor iedere waardering V de waarde van $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ onder V gelijk is aan de waarde van $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$ onder V.
Toon aan dat dit inderdaad het geval is.

OPGAVE 2.3.6
Onderzoek met behulp van een waarheidstabel onder welke waarderingen de formule $(p \to \neg(q \vee r))$ waar is.

2.4 Modellen

Extra ondersteuning

Bestudeer paragraaf 2.4 tot definitie 2.7.

OPGAVE° 2.4.1
Deze opgave gaat over definitie 2.4 en de daarop volgende alinea.
a V_0 is de waardering met domein $\{p_1, p_2, p_3\}$ gedefinieerd door:
$V_0(p_1) = 1$, $V_0(p_2) = 0$, $V_0(p_3) = 0$.
Bepaal $V_0((p_2 \to (p_1 \vee p_3)))$.
b V is de waardering van alle propositieletters $(p_0, p_1, p_2, ...)$ naar waarheidswaarden, gedefinieerd door:

$V(p_i) = 1$ als i een kwadraat van een natuurlijk getal is
$V(p_i) = 0$ anders.

Bepaal:
$V((p_2 \to (p_1 \vee p_3)))$
$V((p_4 \to (p_2 \vee p_3)))$
$V((p_4 \to (p_3 \vee p_9)))$.

OPGAVE° 2.4.2 (Aanw)
Lees nog eens de alinea vóór definitie 2.5.
We beschouwen formules in een taal met drie propositieletters: p, q en r.
Er zijn dus acht relevante waarderingen. We noemen deze waarderingen $V_1, V_2, ..., V_8$ en houden daarbij de betekenis aan zoals gedefinieerd in paragraaf 2.3.
De situatieruimte S is in dat geval gelijk aan $S = \{V_1, V_2, ..., V_8\}$.
We definiëren de volgende drie deelverzamelingen van S:
$I_0 = \{V_2, V_3, V_5\}$
$I_1 = \{V_2, V_3\}$
$I_2 = \{V_3\}$
(Merk op dat $I_2 \subset I_1 \subset I_0$.)

a Wat kunt u zeggen over de waarde van de formule $((p \to q) \wedge r)$ onder elk van de drie 'informatietoestanden' I_0, I_1 en I_2?

b Zoek een formule φ met de volgende twee eigenschappen:
1 Minstens één waardering uit I_0 maakt φ waar en minstens één waardering uit I_0 maakt φ onwaar.
2 Alle waarderingen uit I_1 maken φ waar.

c Zoek een formule ψ met de volgende twee eigenschappen:
1 Eén waardering uit I_1 maakt ψ waar en één waardering uit I_1 maakt ψ onwaar.
2 De waardering uit I_2 maakt ψ waar.

Bestudeer paragraaf 2.4 verder tot definitie 2.9.

OPGAVE° 2.4.3
a Toon aan dat twee formules φ en ψ logisch equivalent zijn dan en slechts dan als ze dezelfde waarheidstabel hebben. (Dat wil zeggen dat $V(\varphi) = V(\psi)$ voor elke waardering V.)
b Toon één van de equivalenties uit voorbeeld 2.16 aan.
c Toon aan dat $(p \to q)$ en $(\neg p \vee q)$ logisch equivalent zijn.

OPGAVE° 2.4.4
Geef een formule, opgebouwd uit de propositieletters p, q, r en s, en de connectieven $\neg$, $\vee$ en $\wedge$ met als enige modellen:

p	q	r	s
1	0	0	1
1	1	0	0

Bestudeer de rest van paragraaf 2.4.

OPGAVE° 2.4.5
In de alinea voor definitie 2.10 wordt gesproken over 16 mogelijke waarheidstabellen. Leg uit dat er voor formules met twee propositievariabelen inderdaad precies 16 mogelijke waarheidstabellen zijn.

OPGAVE° 2.4.6
Bepaal een disjunctieve normaalvorm van $(p \to \neg(q \to r))$.

Standaardopgaven

Lees paragraaf 2.4.

OPGAVE 2.4.7
Zoek een formule φ opgebouwd uit de propositieletter p en het connectief NOR (zie voorbeeld 2.18) zodat φ equivalent is met $\neg p$.

OPGAVE 2.4.8 (Aanw)
Onderzoek welke van de volgende formules tautologieën zijn:
a $(p \to (q \to (p \wedge q)))$
b $(p \to ((p \vee q) \to q))$
c $(p \to (\neg(p \vee q) \to q))$

OPGAVE 2.4.9 (Aanw)

Het tweeplaatsige connectief NAND (niet ... én ...; NAND is een samentrekking van NOT en AND) heeft als waarheidstabel:

φ	ψ	(φ NAND ψ)
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Toon aan dat (p NAND q) en $(\neg p \vee \neg q)$ logisch equivalent zijn.

OPGAVE 2.4.10

a Bepaal een disjunctieve normaalvorm van $\neg((p \vee q) \to r)$

b U kunt ook een disjunctieve normaalvorm bepalen door gebruik te maken van bekende equivalenties, zoals:

$p \leftrightarrow \neg\neg p$

$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

$(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

$(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$.

Bovendien moet u dan de volgende voor de hand liggende eigenschappen gebruiken: Als φ en φ' logisch equivalent zijn, dan zijn ook $\neg\varphi$ en $\neg\varphi'$ logisch equivalent, en $\varphi \Box \psi$ en $\varphi' \Box \psi$ logisch equivalent, waarbij $\Box$ staat voor een tweeplaatsig connectief.

Bepaal met deze methode nogmaals een disjunctieve normaalvorm van $\neg((p \vee q) \to r)$.

OPGAVE 2.4.11 (Aanw)

a Stel $\varphi = p \vee \neg q$ en $\psi = p \to q$. Bepaal $MOD(\varphi)$, $MOD(\psi)$, $MOD(\{\varphi, \psi\})$ en $MOD(\varphi \wedge \psi)$.

b Toon aan dat voor elk tweetal formules φ en ψ geldt: $MOD(\varphi \wedge \psi) = MOD(\varphi) \cap MOD(\psi)$.

Steropgave

OPGAVE* 2.4.12

Opgave 2.8 uit het tekstboek.

Laat zien hoe het bekende spel ‘Master Mind’ is op te vatten als een eliminatieproces van modellen zoals in de tekst beschreven. Wat kiest u als propositionele atomen, hoe geeft u de antwoorden weer, wat is het maximaal aantal nodige vragen?

2.5 Tot besluit

Lees paragraaf 2.5.

ZELFTOETS

1 Geef een inductieve definitie van de propositielogische formules die alleen *r* en *s* als atomen bevatten.

2 Is het volgende rijtje symbolen een propositielogische formule:

$(((p \wedge ((r \to s) \vee (r \to s))) \vee (r \to s)) \vee (\neg p \to r))$

3 Werk uit:
a $[(p \to s)/p]((p \vee \neg p) \vee s)$
b $[(p \vee q)/p][(p \vee q)/p](s \to p)$

4 Opgave 2.2 uit het tekstboek.
Geef alle formules die met haakjes invoegen zijn te maken uit $p \wedge \neg q \to r$, met de bijbehorende constructiebomen.
Wat is het bereik van de implicatie in de verschillende formules?

5 Toon aan dat $((p \vee q) \to \neg r)$ en $(\neg(p \wedge r) \wedge \neg(q \wedge r))$ logisch equivalent zijn.

6 Opgave 2.4 uit het tekstboek.
Maak een waarheidstabel voor elk van de volgende connectieven:
i *noch* φ *noch* ψ
ii φ *alleen als* ψ
iii φ *tenzij* ψ.

7 Opgave 2.5 uit het tekstboek.
Geef een disjunctieve normaalvorm voor $((p \wedge q) \to r) \to (\neg p \wedge q)$.

8 Opgave 2.6 uit het tekstboek.
Bepaal alle niet logisch equivalente waarheidsfuncties die te definiëren zijn met behulp van twee propositieletters p, q en alleen het connectief $\to$.
(Eén hiervan is de disjunctie $\vee$.)

Aanwijzingen bij leereenheid 2

2.2.1 Voer letters in voor 'De tram komt', enzovoorts.

2.2.8 Het bereik van een connectief kunt u ook met de constructieboom vinden.

2.2.9 De objecten die u wilt definiëren, zijn nu getallen en niet formules.

2.3.2 Om de structuur van de formule te doorzien, kunt u eerst een constructieboom maken.

2.3.5 Maak de waarheidstabellen voor $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ en $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$.

2.4.2 b Maak gebruik van de eigenschappen van de formule uit onderdeel a.
c Er moet gelden: V_3 maakt ψ waar en V_2 maakt ψ onwaar.

2.4.8 Maak de waarheidstabellen voor de formules.

2.4.9 Toon aan dat de waarheidstabellen gelijke uitkomsten geven.

2.4.11 b U moet aantonen dat V behoort tot $MOD(\varphi \wedge \psi)$ dan en slechts dan als V zowel tot $MOD(\varphi)$ als tot $MOD(\psi)$ behoort.

1 Uitwerking van de opgaven

2.2.1 Om te beginnen voeren we schematische letters in:
De letter t voor 'De tram komt'.
De letter b voor 'De bus komt'.
De letter r voor 'De trein komt'.
De vertalingen zijn nu als volgt:

2.2.1i $(\neg b \rightarrow (t \wedge r))$
Immers, de vertaling van 'de tram en de trein komen' is $(t \wedge r)$, de vertaling van 'de bus komt niet' is $\neg b$, en de verdere vertaling van de zin 'Als $\neg b$, – dan – $(t \wedge r)$' is dus: $(\neg b \rightarrow (t \wedge r))$.

2.2.1ii $((\neg r \rightarrow t) \rightarrow \neg(r \wedge b))$
'De trein komt niet' vertalen we als $\neg r$. 'De tram komt als de trein niet komt' vertalen we als $(\neg r \rightarrow t)$. 'De trein en de bus komen niet allebei' vertalen we als $\neg(r \wedge b)$. Dus de hele zin vertalen we als $((\neg r \rightarrow t) \rightarrow \neg(r \wedge b))$.

2.2.2a We geven in een aantal stappen de vertaling.
Het woord 'en' scheidt de zin in twee onafhankelijke zinsdelen en komt overeen met het logische $\wedge$. Het resultaat van deze vertaling is als volgt:

('Jan doet de afwas' $\wedge$ 'Piet strijkt de was')

Deze voorlopige vertaling is een informele tussenvorm, dus nog geen propositielogische formule. Omdat we het en-symbool als eerste zijn tegengekomen bij onze logische analyse, weten we nu al dat de uiteindelijke vertaling in propositielogica de vorm van een *conjunctie* heeft. De zinsdelen 'Jan doet de afwas' en 'Piet strijkt de was' kunnen we niet nader analyseren in propositielogica. Het zijn dus atomen. We geven ze weer met propositieletters. Die propositieletters zijn willekeurig te kiezen, bijvoorbeeld a (van afwas) en w (van was). We krijgen als eindresultaat:

$(a \wedge w)$

Deze formule is een conjunctie.

2.2.2b Net als in a reduceren we stapsgewijs. Het belangrijkste connectief in de zin is nu een implicatie:

('Marie fietst' $\rightarrow$ 'Karel helpt in de tuin en Joris eet soep')

Dit is dus ook de vormnaam van de formule.
'Marie fietst' is niet nader te analyseren. Het tweede deel van de implicatie is wel verder te analyseren; het resultaat wordt:

('Marie fietst' $\rightarrow$ ('Karel helpt in de tuin' $\wedge$ 'Joris eet soep'))

Alle atomen geven we weer met propositieletters (merk weer op dat we vrij staan in de keuze van letters):

$(m \rightarrow (k \wedge j))$ vormnaam: implicatie

2.2.2c $(j \leftrightarrow p)$ vormnaam: equivalentie

Merk op dat we alleen aandacht besteden aan zinsstructuur die met propositielogische connectieven te ontleden is. We kijken bijvoorbeeld niet naar de gevolgen van het woord 'eerst', dat weer terugverwijst naar het eerste zinsdeel en in feite de zin 'onmogelijk' maakt.

2.2.2d $((l \wedge k) \rightarrow h)$ vormnaam: implicatie

2.2.2e $(k \vee (l \rightarrow j))$ vormnaam: disjunctie

Merk op dat in de implicatie 'Jan doet de afwas als Lizet neuriet' het rechter zinsdeel links van het implicatieteken komt en omgekeerd.

2.2.3a De formule $(h \leftrightarrow c)$ is een equivalentie. In natuurlijke taal: 'Hans geeft water dan en slechts dan als Carla een boom plant'.

2.2.3b De formule $(l \vee h)$ is een disjunctie. In natuurlijke taal: 'Leendert graaft een gat of Hans geeft water'.

2.2.3c De formule $(\neg h \rightarrow l)$ is een implicatie. In natuurlijke taal: 'Leendert graaft een gat als Hans geen water geeft'.

2.2.3d De formule $\neg(h \wedge (l \wedge c))$ is een negatie. In natuurlijke taal: 'Het is niet zo dat Hans water geeft en Leendert een gat graaft en Carla een boom plant'. Merk op dat de formule $\neg((h \wedge l) \wedge c)$ in natuurlijke taal dezelfde formulering heeft.

2.2.4a Het rijtje $p \wedge q \vee r$ is geen formule; merk op dat we al niet kunnen zien of het een conjunctie of een disjunctie is. Wél een formule zou bijvoorbeeld zijn: $(p \wedge (q \vee r))$.

2.2.4b Het rijtje $(p \wedge q) \leftrightarrow r$ is ook geen formule, want er staan geen haakjes om de equivalentie. Wél een formule is dus: $((p \wedge q) \leftrightarrow r)$. Later zullen we overigens het weglaten van haakjes op dit soort plaatsen voor het gemak wel toestaan.

2.2.4c Het rijtje $((p \rightarrow q) \vee r)$ is een formule, want $(p \rightarrow q)$ is een formule en r is een formule; $(p \rightarrow q)$ is een formule want p en q zijn formules; p, q, en r zijn formules, want het zijn propositieletters.

2.2.4d Het rijtje $(p \wedge q) \vee r)$ is geen formule; aan de linkerkant staat een haakje te weinig.

2.2.5a $[p/q]p = p$
De substitutie van p voor q in p levert niets op. Het atoom q (dat vervangen wordt) komt niet voor in het atoom p (waarin gesubstitueerd wordt).

2.2.5b $[p/q]q = p$
De substitutie van p voor q in q is p. Ieder voorkomen van het atoom q (dat vervangen wordt) in de formule q (waarin gesubstitueerd wordt) wordt vervangen door p, dus de 'hele' formule q waarin vervangen wordt, wordt vervangen door p.

2.2.5c $[p/q]r = r$

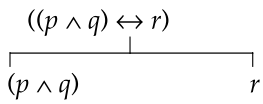
2.2.5d $[q/p](p \vee p) = (q \vee q)$

2.2.6a De formule $((p \vee p) \rightarrow (p \vee p))$ is een instantie van het formuleschema $(\varphi \rightarrow \varphi)$. De formule $((p \vee p) \rightarrow (p \vee p))$ krijgen we door $(p \vee p)$ voor φ in te vullen in het schema $(\varphi \rightarrow \varphi)$.

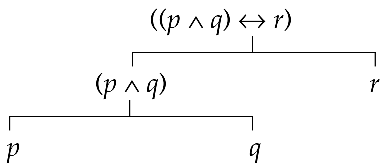
2.2.6b De formule $((q \rightarrow (q \rightarrow q)) \rightarrow (q \rightarrow (q \rightarrow q)))$ is een instantie van het formuleschema $(\varphi \rightarrow \varphi)$; we krijgen $((q \rightarrow (q \rightarrow q)) \rightarrow (q \rightarrow (q \rightarrow q)))$ uit $(\varphi \rightarrow \varphi)$ door $(q \rightarrow (q \rightarrow q))$ voor φ in te vullen.

2.2.6c De formule $((p \vee p) \rightarrow p)$ is geen instantie van $(\varphi \rightarrow \varphi)$, want in tegenstelling tot in het schema staat in $((p \vee p) \rightarrow p)$ links van de implicatie iets anders dan rechts.

2.2.7a Voor geval a bouwen we de constructieboom geleidelijk op, in de overige gevallen geven we u alleen de oplossing.
De formule $((p \wedge q) \leftrightarrow r)$ is een equivalentie met de twee samenstellende delen $(p \wedge q)$ en r. Om te beginnen, kunnen we de constructieboom dus als volgt opbouwen:

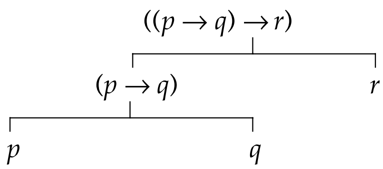


De formule $(p \wedge q)$ is een conjunctie met twee samenstellende delen p en q. We splitsen op die plaats dus nog een keer:

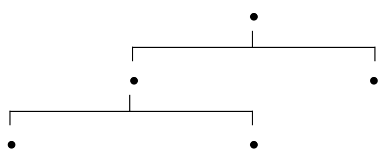


De boom bevat nu drie bladeren: p, q en r. Aangezien alle bladeren atomair zijn, is de constructie voltooid.

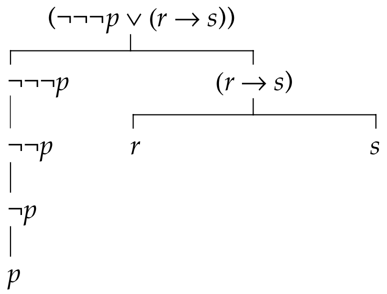
2.2.7b De constructieboom van de formule $((p \rightarrow q) \rightarrow r)$ is:



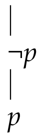
Merk op dat hoewel de formules 2.2.7a en 2.2.7b propositielogisch verschillen, hun constructiebomen daarentegen overeenkomen (dit heeft overigens geen bijzondere betekenis):



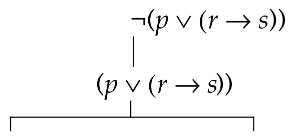
2.2.7c De constructieboom van de formule $(\neg\neg\neg p \vee (r \rightarrow s))$ is:



2.2.8a Het bereik van $\neg$ in de formule $(\neg p \vee (r \rightarrow s))$ is slechts het atoom p. Dit is ook te zien aan wat in de constructieboom van $(\neg p \vee (r \rightarrow s))$ 'onder de $\neg$' hangt:



2.2.8b Het bereik van $\neg$ in de formule $\neg(p \vee (r \rightarrow s))$ is $(p \vee (r \rightarrow s))$. Dit kunnen we zien aan het begin van de constructieboom van $\neg(p \vee (r \rightarrow s))$:



2.2.8c Het bereik van $\neg$ in de formule $(p \vee (\neg r \rightarrow s))$ is r.

2.2.9 In plaats van *objecten* van de gewenste soort definiëren we nu *getallen* van de gewenste soort, dat wil zeggen: getallen met een bepaalde eigenschap. De even getallen kunnen we als volgt inductief definiëren:
1 0 is even
2 als getal p even is, dan is ook $p + 2$ even
3 alleen getallen die met 1 en 2 (de clausules 1 en 2 uit de definitie, niet de natuurlijke getallen 1 en 2) gevormd kunnen worden, zijn even.

2.2.10 1 elke propositieletter is een formule
2 als φ en ψ formules zijn, dan zijn $\neg\varphi$ en $\varphi \wedge \psi$ ook formules
3 niets anders is een formule.

2.2.11 De formule $((p \wedge q) \vee r)$ is een disjunctie, het is immers een instantie van het formuleschema $\varphi \vee \psi$.
(Zie ook de opgaven 2.2.2 en 2.2.3.)

2.2.12a $[p/q](p \vee q) = (p \vee p)$

2.2.12b $[q/p](p \vee \neg p) = (q \vee \neg q)$

2.2.12c $[(p \wedge q)/p](p \wedge q) = ((p \wedge q) \wedge q)$
Merk op dat de overeenkomst tussen de te substitueren formule en de formule waarin gesubstitueerd moet worden, beide $(p \wedge q)$, niet belangrijk is.
(Zie ook opgave 2.2.5.)

2.2.13a $[p/q][p/q](q \vee r) = [p/q](p \vee r) = (p \vee r)$

2.2.13b $[p/q][q/r](q \vee r) = [p/q](q \vee q) = (p \vee p)$

2.2.13c $[q/r][p/q](q \vee r) = [q/r](p \vee r) = (p \vee q)$

2.2.14 We voeren de volgende propositieletters in:
'Karel fietst naar huis' h
'Jan fietst naar school' s
De zin 'Karel fietst niet naar huis en Jan naar school' kan nu op de volgende twee manieren geïnterpreteerd worden:
i $(\neg h \wedge s)$
ii $(\neg h \wedge \neg s)$
Overigens is interpretatie $\neg(h \wedge s)$ onder voorgaande formulering uitgesloten.
De constructiebomen van i en ii zijn de volgende:

$$
\begin{array}{ccc}
 & (\neg h \wedge s) & \\
\neg h & & s \\
| & & \\
h & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
 & (\neg h \wedge \neg s) & \\
\neg h & & \neg s \\
| & & | \\
h & & s
\end{array}
$$

Het bereik van de conjunctie in de formule $(\neg h \wedge s)$ bestaat uit de formules $\neg h$ en s. Het bereik van de conjunctie in de formule $(\neg h \wedge \neg s)$ bestaat uit de formules $\neg h$ en $\neg s$.
(Zie ook opgave 2.2.7.)

2.2.15i $(\neg(p \wedge q) \wedge r)$
De formule $(p \wedge q)$ vertalen we als '$x \leq 1$ en $x \leq 3$'. Dit is equivalent met $x \leq 1$. Dus $\neg(p \wedge q)$ vertalen we als $x > 1$ en $(\neg(p \wedge q) \wedge r)$ als '$x > 1$ en $x \geq 2$'. Dit is equivalent met $x \geq 2$.

2.2.15ii $((\neg p \wedge q) \wedge r)$
De formule $\neg p$ vertalen we als $x > 1$. (Merk op dat r equivalent is met $\neg p$.) Dus $(\neg p \wedge q)$ als '$x > 1$ en $x \leq 3$'. Dit is equivalent met '$x = 2$ of $x = 3$'. Dus $((\neg p \wedge q) \wedge r)$ vertalen we als '($x = 2$ of $x = 3$) en $x \geq 2$'. Dit is equivalent met '$x = 2$ of $x = 3$'.

2.2.15iii $\neg(p \wedge (q \wedge r))$
De formule $(q \wedge r)$ vertalen we als '$x \leq 3$ en $x \geq 2$'. Dit is equivalent met '$x = 2$ of $x = 3$'. Dus $(p \wedge (q \wedge r))$ vertalen we als '$x \leq 1$ en ($x = 2$ of $x = 3$)'. Hieraan voldoet geen enkel natuurlijk getal, dus aan de ontkenning $\neg(p \wedge (q \wedge r))$ voldoet ieder natuurlijk getal.

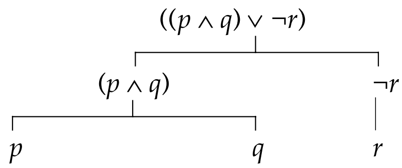
2.2.16 Volgens de BNF-notatie is een atoom een formule en is de negatie van een formule een formule en zijn de conjunctie, de disjunctie, de implicatie en de equivalentie van twee formules weer formules. Dit geeft precies de formules van de propositielogica.
Er is een constructieverschil met de inductieve definitie. We laten dit zien aan de hand van een voorbeeld. We nemen hiervoor de formule
$(p \to \neg(q \wedge r))$.
Met behulp van de inductieve definitie is deze formule als volgt tot stand gekomen: q en r zijn atomen, dus formules, dus ook $(q \wedge r)$ is een formule. De negatie hiervan is een formule: $\neg(q \wedge r)$. Verder is p een atomaire formule, dus ook $(p \to \neg(q \wedge r))$ is een formule.

Met BNF gaat het als volgt:

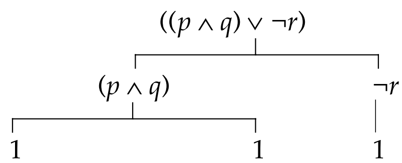
F
$\Rightarrow$ (F $\to$ F)
$\Rightarrow$ (F$\to$ $\neg$F)
$\Rightarrow$ (F$\to$ $\neg$(F $\wedge$ F))
$\Rightarrow$ $(p \to \neg(q \wedge r))$

2.3.1 De constructieboom van $((p \wedge q) \vee \neg r)$ is al gegeven in voorbeeld 2.9. In deze boom vullen we voor p, q en r de waarde 1 in en berekenen dan, van onder naar boven door de boom lopend, de waarde van de hele formule.

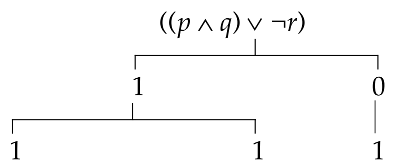
1 De constructieboom was:



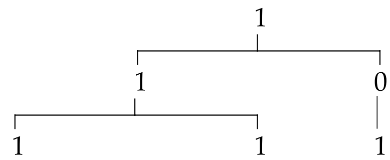
2 Onder in deze boom vullen we nu voor p, q en r de waarde 1 in:



3 Vervolgens berekenen we de waarde in de knopen direct boven de knopen waarvan we de waarde bij de vorige stap ingevuld hebben:



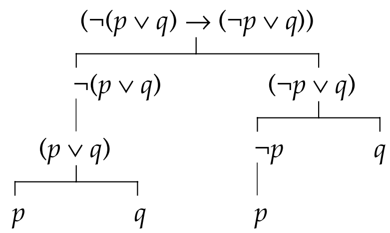
4 Tenslotte berekenen we de waarde in de bovenste knoop:



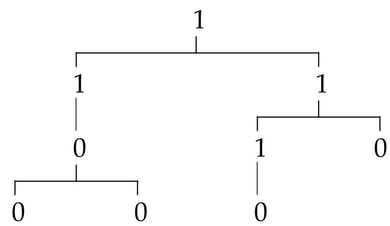
We vinden dan dat $V((p \wedge q) \vee \neg r) = 1$.

2.3.2 Eerst construeren we van boven naar beneden de constructieboom van de formule, vervolgens werken we van beneden naar boven om de waarde van de formule te berekenen. We vinden zo dat $V(\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \vee q)) = 1$.

Constructieboom:



Hierin worden voor p en q de waarheidswaarden ingevuld; in de overige knopen kan dan de waarde berekend worden:



2.3.3 Boven de waarheidstabel komen de subformules te staan die we tegenkomen als we de constructieboom van $((\varphi \vee \neg\psi) \wedge (\chi \rightarrow \varphi))$ van onder naar boven doorlopen, dus: $\neg\psi$, $(\varphi \vee \neg\psi)$, $(\chi \rightarrow \varphi)$ en $((\varphi \vee \neg\psi) \wedge (\chi \rightarrow \varphi))$. Bij het invullen van de kolommen worden de waarden uit vorige kolommen gebruikt.
De waarheidstabel gaat er dus als volgt uitzien:

	φ	ψ	χ	$\neg\psi$	$(\varphi \vee \neg\psi)$	$(\chi \rightarrow \varphi)$	$((\varphi \vee \neg\psi) \wedge (\chi \rightarrow \varphi))$
V_1	1	1	1	0	1	1	1
V_2	1	1	0	0	1	1	1
V_3	1	0	1	1	1	1	1
V_4	1	0	0	1	1	1	1
V_5	0	1	1	0	0	0	0
V_6	0	1	0	0	0	1	0
V_7	0	0	1	1	1	0	0
V_8	0	0	0	1	1	1	1

(Zie ook opgaven 2.3.1 en 2.3.2.)

2.3.4 Het exclusieve of heeft alleen de waarheidswaarde 1 als precies één van de twee argumenten waar is. Als beide waar of beide onwaar zijn, krijgt dit exclusieve of de waarde 0. We gebruiken in deze opgave voor het exclusieve of het symbool ⊗. De waarheidstabel ziet er dus als volgt uit:

φ	ψ	$(\varphi \otimes \psi)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

2.3.5 We bepalen de waarheidstabellen van $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ en $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$:

φ	ψ	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

φ	ψ	$(\varphi \to \psi)$	$(\psi \to \varphi)$	$(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Omdat de laatste kolommen van deze twee tabellen aan elkaar gelijk zijn, is voor elke waardering V de waarde $V(\varphi \leftrightarrow \psi)$ gelijk aan de waarde $V((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$.

2.3.6 We bepalen eerst de waarheidstabel. Om het schrijfwerk te beperken gebruiken we de verkorte vorm, waarbij de waarden direct onder het connectief geplaatst worden (zoals in voorbeeld 2.11); de kolom waarin de waarheidswaarden van de totale formule staan, hebben we omkaderd.

	p	q	r	$(p \to$	$\neg($	$q \vee r))$
V_1	1	1	1	$\boxed{0}$	0	1
V_2	1	1	0	$\boxed{0}$	0	1
V_3	1	0	1	$\boxed{0}$	0	1
V_4	1	0	0	$\boxed{1}$	1	0
V_5	0	1	1	$\boxed{1}$	0	1
V_6	0	1	0	$\boxed{1}$	0	1
V_7	0	0	1	$\boxed{1}$	0	1
V_8	0	0	0	$\boxed{1}$	1	0

Dus de waarderingen V_4, V_5, V_6, V_7 enV_8 maken $(p \to \neg(q \vee r))$ waar.

2.4.1a We hebben één regel van de waarheidstabel van $(p_2 \to (p_1 \vee p_3))$ nodig:

p_1	p_2	p_3	$(p_1 \vee p_3)$	$(p_2 \to (p_1 \vee p_3))$
1	0	0	1	1

Dus $V_0((p_2 \to (p_1 \vee p_3))) = 1$.

2.4.1b Uit de definitie van de waardering V volgt dat:
$V(p_1) = V(p_4) = V(p_9) = 1$
$V(p_2) = V(p_3) = 0$

We kunnen nu de waarde van de drie formules onder V bepalen met een regel uit de waarheidstabel:

p_1	p_2	p_3	$(p_1 \vee p_3)$	$(p_2 \to (p_1 \vee p_3))$
1	0	0	1	1

(Merk op dat deze regel gelijk is aan die uit onderdeel a van de opgave; V is een uitbreiding van de waardering V_0, want de waarden van p_1, p_2 en p_3 onder V zijn gelijk aan de waarden van p_1, p_2 en p_3 onder V_0.)

p_2	p_3	p_4	$(p_2 \vee p_3)$	$(p_4 \to (p_2 \vee p_3))$
0	0	1	0	0

p_3	p_4	p_9	$(p_3 \vee p_9)$	$(p_4 \to (p_3 \vee p_9))$
0	1	1	1	1

2.4.2a We bepalen de waarde van de formule $((p \to q) \wedge r)$ onder de waarderingen V_2, V_3 en V_5:

	p	q	r	$(p \to q)$	$((p \to q) \wedge r)$
V_2	1	1	0	1	0
V_3	1	0	1	0	0
V_5	0	1	1	1	1

I_0 bevat dus waarderingen (V_2 en V_3) die de formule onwaar maken en een waardering (V_5) die de formule waar maakt.
Alle waarderingen van I_1 en I_2 maken de formule onwaar.

2.4.2b U kunt hiervoor de ontkenning van de formule uit onderdeel a nemen. Immers voor de formule uit onderdeel a geldt: V_2 en V_3 maken de formule onwaar en V_5 maakt de formule waar. Voor $\neg((p \to q) \wedge r)$ geldt dus dat V_2 en V_3 deze formule waar maken en V_5 deze formule onwaar maakt.
Een andere methode om dit onderdeel op te lossen is de volgende.
Een formule die waar gemaakt wordt door V_2 is $p \wedge q \wedge \neg r$, een formule die waar gemaakt wordt door V_3 is $p \wedge \neg q \wedge r$. De disjunctie van deze twee formules voldoet: $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$ wordt waargemaaakt door V_2 en V_3, maar niet door V_5.

2.4.2c We zoeken een formule die waar gemaakt wordt door V_3 en onwaar door V_2. De formule moet dus waar zijn als p en r waar zijn en q niet waar is. Een formule die hieraan voldoet, is de formule $p \wedge \neg q \wedge r$. Deze formule wordt waar gemaakt door V_3 en onwaar door V_2.

2.4.3a De formules φ en ψ zijn per definitie equivalent als $\varphi \leftrightarrow \psi$ een tautologie is, dus precies dan als $V(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ voor elke waardering V. Dit is het geval dan en slechts dan als $V(\varphi) = V(\psi)$ voor elke waardering V, dus als de waarheidstabellen van φ en ψ aan elkaar gelijk zijn.

2.4.3b We bepalen de waarheidstabel van elk van de formules uit voorbeeld 2.16: (we schrijven de waarde onder de connectieven)

p	q	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$					
1	1	0	1	$\boxed{1}$	0	0	0
1	0	1	0	$\boxed{1}$	0	1	1
0	1	1	0	$\boxed{1}$	1	1	0
0	0	1	0	$\boxed{1}$	1	1	1

p	q	$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$					
1	1	0	1	$\boxed{1}$	0	0	0
1	0	0	1	$\boxed{1}$	0	0	1
0	1	0	1	$\boxed{1}$	1	0	0
0	0	1	0	$\boxed{1}$	1	1	1

p	q	r	$(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$					
1	1	1	1	1	$\boxed{1}$	1	1	1
1	1	0	1	1	$\boxed{1}$	1	1	0
1	0	1	1	1	$\boxed{1}$	0	1	1
1	0	0	0	0	$\boxed{1}$	0	0	0
0	1	1	0	1	$\boxed{1}$	0	0	0
0	1	0	0	1	$\boxed{1}$	0	0	0
0	0	1	0	1	$\boxed{1}$	0	0	0
0	0	0	0	0	$\boxed{1}$	0	0	0

p	q	r	$(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$					
1	1	1	1	1	$\boxed{1}$	1	1	1
1	1	0	1	0	$\boxed{1}$	1	1	1
1	0	1	1	0	$\boxed{1}$	1	1	1
1	0	0	1	0	$\boxed{1}$	1	1	1
0	1	1	1	1	$\boxed{1}$	1	1	1
0	1	0	0	0	$\boxed{1}$	1	0	0
0	0	1	0	0	$\boxed{1}$	0	0	1
0	0	0	0	0	$\boxed{1}$	0	0	0

2.4.3c We bepalen de waarheidstabellen van $(p \rightarrow q)$ en $(\neg p \vee q)$:

p	q	$(p \rightarrow q)$	$(\neg p \vee q)$	
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

De waarden van $(p \rightarrow q)$ en $(\neg p \vee q)$ zijn onder elke waardering aan elkaar gelijk, dus deze twee formules zijn logisch equivalent.

2.4.4 We 'sommen de modellen op' (zie de alinea in het tekstboek na voorbeeld 2.17):

$(p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s)$

2.4.5 Een waarheidstabel voor een formule met twee propositievariabelen heeft de volgende vorm:

p	q	φ
1	1	a
1	0	b
0	1	c
0	0	d

waarbij a, b, c en d elk de waarden 0 of 1 aan kunnen nemen. Dit geeft in het totaal $2^4 = 16$ verschillende mogelijkheden.

2.4.6 We bepalen eerst de modellen van $p \to \neg(q \to r)$ met behulp van een waarheidstabel:

	p	q	r	$p \to \neg(q \to r)$		
V_1	1	1	1	0	0	1
V_2	1	1	0	1	1	0
V_3	1	0	1	0	0	1
V_4	1	0	0	0	0	1
V_5	0	1	1	1	0	1
V_6	0	1	0	1	1	0
V_7	0	0	1	1	0	1
V_8	0	0	0	1	0	1

De modellen van $p \to \neg(q \to r)$ zijn dus V_2, V_5, V_6, V_7 en V_8.
Een disjunctieve normaalvorm van $p \to \neg(q \to r)$ is nu gelijk aan de disjunctie van de vijf conjuncties die horen bij deze modellen:

$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\ldots) \vee \ldots \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

Deze formule kan vereenvoudigd worden. De disjunctie van de laatste vier conjuncties is equivalent met $\neg p$, immers hier staan de conjuncties van $\neg p$ met alle vier de mogelijkheden voor q en r. Een disjunctieve normaalvorm van $p \to \neg(q \to r)$ is dus:

$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee \neg p$

Voor de volledigheid vermelden we dat ook deze formule nog vereenvoudigd kan worden, namelijk tot $(q \wedge \neg r) \vee \neg p$; u hoeft deze vereenvouding niet uit te voeren.

2.4.7 p NOR p voldoet, want uit de waarheidstabel voor NOR volgt dat:

p	p NOR p
1	0
0	1

2.4.8 We bepalen van elk van de formules de waarheidstabel; als deze uit louter enen bestaat, dan is de formule een tautologie.

2.4.8a De waarheidstabel:

p	q	$p \to (q \to (p \wedge q))$		
1	1	1	1	1
1	0	1	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	0

Dus $p \to (q \to (p \wedge q))$ is een tautologie.

2.4.8b De waarheidstabel:

p	q	$p \to ((p \vee q) \to q)$		
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	0	1	0	1

Dus $p \to ((p \vee q) \to q)$ is geen tautologie.

2.4.8c De waarheidstabel:

p	q	$p \to (\neg(p \vee q) \to q)$			
1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0

Dus $p \to (\neg(p \vee q) \to q)$ is een tautologie.

2.4.9 De waarheidstabel van $\neg p \vee \neg q$ is gelijk aan die van het NAND-connectief:

p	q	$\neg p \vee \neg q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Dus deze formules zijn equivalent.
(Zie ook opgave 2.4.3.)

2.4.10a We bepalen eerste de modellen van $\neg((p \vee q) \to r)$:

	p	q	r	$\neg((p \vee q) \to r)$		
V_1	1	1	1	0	1	1
V_2	1	1	0	1	1	0
V_3	1	0	1	0	1	1
V_4	1	0	0	1	1	0
V_5	0	1	1	0	1	1
V_6	0	1	0	1	1	0
V_7	0	0	1	0	0	1
V_8	0	0	0	0	0	1

Een disjunctieve normaalvorm van $\neg((p \vee q) \to r)$ is dus:
$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$.
(Zie ook opgave 2.4.6.)

2.4.10b De volgende formules zijn equivalent:

$\neg((p \vee q) \rightarrow r)$	
$\neg(\neg(p \vee q) \vee r)$	gebruik de equivalentie van $\varphi \rightarrow \psi$ met $\neg\varphi \vee \psi$
$\neg\neg(p \vee q) \wedge \neg r$	gebruik 'De Morgan', voorbeeld 2.16
$(p \vee q) \wedge \neg r$	gebruik voorbeeld 2.15
$(p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r)$	gebruik distributiviteit, voorbeeld 2.16

Deze laatste formule is een disjunctieve normaalvorm van $\neg((p \vee q) \rightarrow r)$.

2.4.11a We bepalen eerst de modellen van de formules:

	p	q	$p \vee \neg q$	$p \rightarrow q$	$(p \vee \neg q) \wedge (p \rightarrow q)$
V_1	1	1	1	1	1
V_2	1	0	1	0	0
V_3	0	1	0	1	0
V_4	0	0	1	1	1

Hieruit volgt: $MOD(p \vee \neg q) = \{V_1, V_2, V_4\}$, $MOD(p \rightarrow q) = \{V_1, V_3, V_4\}$, $MOD(\{(p \vee \neg q), (p \rightarrow q)\})$ = ⟨per definitie de modellen die zowel $(p \vee \neg q)$ als $(p \rightarrow q)$ waarmaken⟩ = $\{V_1, V_4\}$ en $MOD((p \vee \neg q) \wedge (p \rightarrow q)) = \{V_1, V_4\}$.

2.4.11b Stel V is een element van $MOD(\varphi \wedge \psi)$. Dan geldt $V(\varphi \wedge \psi) = 1$. Uit de waarheidstabel voor $\wedge$ volgt dan dat $V(\varphi) = 1$ en $V(\psi) = 1$, dus V is een element van zowel $MOD(\varphi)$ als $MOD(\psi)$, dus van de doorsnede $MOD(\varphi) \cap MOD(\psi)$.
Hiermee hebben we aangetoond dat $MOD(\varphi \wedge \psi) \subseteq MOD(\varphi) \cap MOD(\psi)$.
Omgekeerd, stel dat V een element is van $MOD(\varphi) \cap MOD(\psi)$. Dan geldt $V(\varphi) = 1$ en $V(\psi) = 1$, dus $V(\varphi \wedge \psi) = 1$. Hieruit volgt dat $V \in MOD(\varphi \wedge \psi)$.
Er geldt dus ook: $MOD(\varphi) \cap MOD(\psi) \subseteq MOD(\varphi \wedge \psi)$. En dus geldt $MOD(\varphi) \cap MOD(\psi) = MOD(\varphi \wedge \psi)$.

2.4.12 Bij het spel Master Mind moet een rijtje van vier pionnen 'geraden' worden, waarbij voor elk van de pionnen er een keuze is uit zes kleuren. Eén keer raden is het geven van een rijtje van vier pionnen; u krijgt dan als respons van hoeveel pionnen zowel de kleur als de plaats goed zijn (een witte pion), en van hoeveel pionnen niet de plaats maar wel de kleur goed is (een zwarte pion). Het is de bedoeling met een zo laag mogelijk aantal keer raden het correcte rijtje te vinden.
Als propositionele atomen kunnen we nemen combinaties van een letter (afkorting van de kleur) en een cijfer (positie van de pion). Dus bijvoorbeeld $r3$ staat voor: de derde pion is rood. Een antwoord is te vertalen in een propositionele formule. Als bijvoorbeeld geraden is: $r1$ $r2$ $b3$ $g4$ en het antwoord is één witte pion (zowel plaats als kleur van één pion zijn goed), dan betekent dit niet alleen dat één pion goed geraden is, maar bovendien dat alle overige kleuren fout geraden zijn, want het antwoord bevat geen zwarte pionnen. Dit komt overeen met de formule:

$$(r1 \wedge \neg r2 \wedge \neg r3 \wedge \neg r4 \wedge \neg b2 \wedge \neg b3 \wedge \neg b4 \wedge \neg g2 \wedge \neg g3 \wedge \neg g4) \vee$$
$$(\neg r1 \wedge \neg r3 \wedge \neg r4 \wedge r2 \wedge \neg b1 \wedge \neg b3 \wedge \neg b4 \wedge \neg g1 \wedge \neg g3 \wedge \neg g4) \vee$$
$$(\neg r1 \wedge \neg r2 \wedge \neg r4 \wedge b3 \wedge \neg g1 \wedge \neg g2 \wedge \neg g4) \vee$$
$$(\neg r1 \wedge \neg r2 \wedge \neg r3 \wedge \neg b1 \wedge \neg b2 \wedge \neg b3 \wedge g4)$$

2 Uitwerking van de zelftoets

1 Een inductieve definitie van de propositielogische formules waarin slechts r en s als atomen voorkomen:
1 r en s zijn formules
2 als φ en ψ formules zijn, dan zijn $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ en $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ook formules
3 niets anders is een formule.
De stappen 2 en 3 zijn identiek aan die uit definitie 2.2. We hebben dus alleen de eerste stap uit definitie 2.2 aangepast.

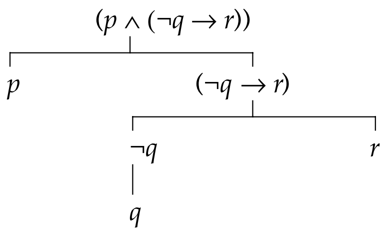
2 Ja.

3a $[(p \rightarrow s)/p]((p \vee \neg p) \vee s) = (((p \rightarrow s) \vee \neg(p \rightarrow s)) \vee s)$

3b $[(p \vee q)/p][(p \vee q)/p](s \rightarrow p) = (s \rightarrow ((p \vee q) \vee q))$

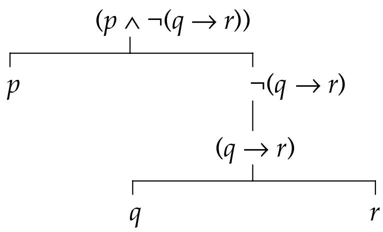
4 Uit $p \wedge \neg q \rightarrow r$ zijn de volgende formules te maken:
$(p \wedge (\neg q \rightarrow r))$
$(p \wedge \neg(q \rightarrow r))$
$((p \wedge \neg q) \rightarrow r)$

De constructieboom van $(p \wedge (\neg q \rightarrow r))$ is:



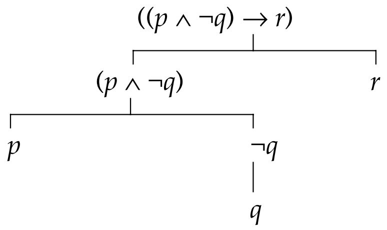
In het bereik van de implicatie zijn de formules $\neg q$ en r.

De constructieboom van $(p \wedge \neg(q \rightarrow r))$ is:



In het bereik van de implicatie zijn de formules q en r.

De constructieboom van $((p \wedge \neg q) \rightarrow r)$ is:



In het bereik van de implicatie zijn de formules $(p \wedge \neg q)$ en r.

5 We bepalen van beide formules een waarheidstabel:

p	q	r	$(p \vee q) \rightarrow \neg r$		
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

p	q	r	$\neg(p \wedge r) \wedge \neg(q \wedge r)$				
1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	0

De kolommen van de twee tabellen, die horen bij de waarheidswaarden van de totale formule, zijn aan elkaar gelijk, dus de formules zijn logisch equivalent.

6 De waarheidstabellen zijn:

φ	ψ	*noch* φ *noch* ψ
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

φ	ψ	φ *alleen als* ψ
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

φ	ψ	φ *tenzij* ψ
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

7 Uit de waarheidstabel volgt dat een disjunctieve normaalvorm gelijk is aan $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$. Eventueel kunt u deze vorm vereenvoudigen tot $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q)$. Deze laatste vorm vindt u ook als u de disjunctieve normaalvorm bepaalt via een reeks equivalente formules, zoals in opgave 2.4.10b.

8 Met behulp van het connectief $\rightarrow$ en de propositieletters p en q zijn, behalve de atomaire proposities p en q, nog vier niet logisch equivalente formules te construeren. We geven ze met de bijbehorende waarheidstabel:

p	q	$p \rightarrow p$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$q \rightarrow p$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

p	q	$(q \to p) \to p$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Alle overige formules die opgebouwd zijn met het connectief $\to$ en de propositieletters p en q zijn logisch equivalent met één van deze vier formules, of met de atomen p of q. De laatste van de vier formules is logisch equivalent met $p \vee q$.
Merk op dat hieruit volgt dat het connectief $\to$ niet functioneel volledig is; bijvoorbeeld $p \wedge q$ kan niet door de implicatie gerepresenteerd worden.

Overzicht tekstboekopgaven

Opgave 2.1 van het tekstboek is opgave 2.2.1 van leereenheid 2.
Opgave 2.2 van het tekstboek is zelftoetsopgave 4 van leereenheid 2.
Opgave 2.3 van het tekstboek is opgave 2.2.15 van leereenheid 2.
Opgave 2.4 van het tekstboek is zelftoetsopgave 6 van leereenheid 2.
Opgave 2.5 van het tekstboek is zelftoetsopgave 7 van leereenheid 2.
Opgave 2.6 van het tekstboek is zelftoetsopgave 8 van leereenheid 2.
Opgave 2.7 van het tekstboek is opgave 2.2.16 van leereenheid 2.
Opgave 2.8 van het tekstboek is opgave 2.4.12 van leereenheid 2.