Inhoud hoofdstuk 4

Fuzzy expert systemen

Hoofdstuk 4

Fuzzy expert systemen

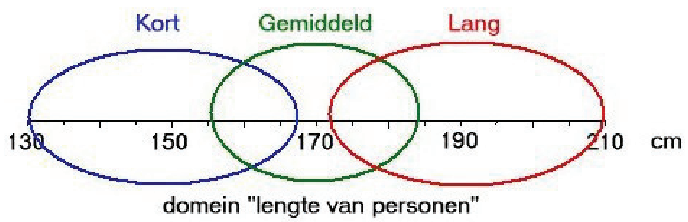
1 Introductie

In de literatuur worden veel verschillende namen gebruikt voor variabelen, verzamelingen en waarden binnen de fuzzy logica.

linguïstische variabele

De uit het spraakgebruik komende aanduidingen voor een bepaalde verzameling elementen binnen een domein wordt vaak *linguïstische variabelen* genoemd. Zo zal over iemands lengte in het spraakgebruik gezegd kunnen worden dat hij kort, gemiddeld of lang is. Deze aanduidingen zijn dan de linguïstische variabelen die de verzamelingen waarden voor lengtes bevatten horend bij die aanduiding. Als je de spreker vraagt wat hij dan precies bedoelt met kort, gemiddeld en lang, dan zal hij bijvoorbeeld antwoorden: "Kort is zo rond de 150 cm en korter, gemiddeld is zo rond de 170 cm en lang is zo rond de 190 cm en langer". Hierbij zijn 150 cm, 170 cm en 190 cm bepaalde *elementen* uit het *domein* lengten van personen. In figuur 4.1 is dit schematisch weergegeven.

elementen
domein



FIGUUR 4.1 Linguïstische variabele zoals een expert ze ongeveer schat in het domein lengte van personen

vaste verzameling
crisp sets
vage verzameling
fuzzy sets

Met deze kennis kunnen we het domein lengte van personen tussen 130 cm en 210 cm in gaan delen. We kunnen dat doen in *vaste verzamelingen* (*crisp sets*) en *vage verzamelingen* (*fuzzy sets*). In beide gevallen gebruiken we voor de namen van de te kiezen verzamelingen dezelfde namen als die van de linguïstische variabelen.

vage verzameling
fuzzy verzameling
fuzzy set

In het Nederlands is *vage verzameling* de vertaling van fuzzy set, maar vaak ook wordt *fuzzy verzameling*, dus half Engels half Nederlands of gewoon de Engelse aanduiding *fuzzy set* gebruikt. Om de verwarring nog groter te maken wordt ook vaak het hele domein als vaag beschouwd; in dat geval wordt de grootheid behorend bij het domein (in bovenstaand voorbeeld lengte) de *fuzzy variabele* genoemd en de daarin gekozen verzamelingen de *fuzzy waarden*. Dus de fuzzy variabele lengte heeft dan fuzzy waarden kort, gemiddeld en lang.

fuzzy variabele
fuzzy waarde

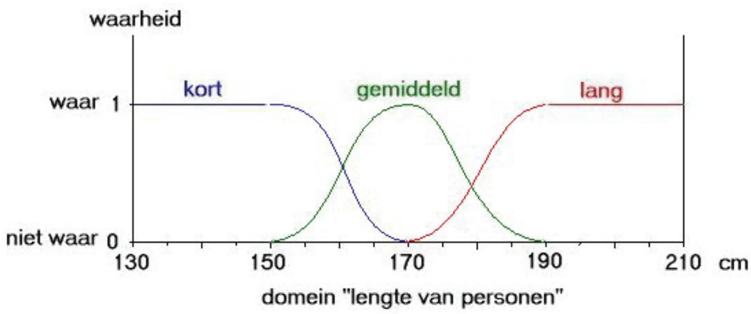
linguïstische variabele

Voor de term vage verzameling komen we dus ook de aanduidingen fuzzy verzameling, fuzzy set, fuzzy waarde en *linguïstische variabele* tegen. Bij de beschrijving van de fuzzy verzamelingenleer zullen we vooral de termen fuzzy verzameling en fuzzy set gebruiken.

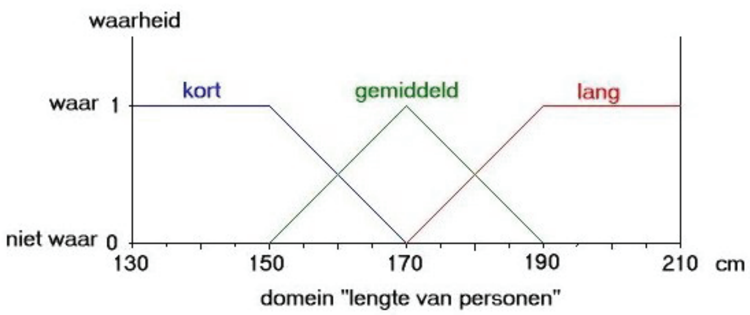
vaagheid
waarheidwaarde
degree of membership

Lidmaatschapsfunctie
memberships function

Bij beschrijving van de fuzzy (expert)systemen zullen we vaker de term fuzzy waarde gebruiken en niet zo vaak de term linguïstische variabele. Om de *vaagheid* van een verzameling aan te duiden gebruiken we een *waarheidwaarde (degree of membership)* die loopt van 0 (niet waar) tot 1 (waar). Alle tussenliggende waarden geven dus gradaties zoals bijna waar, half waar, een beetje waar, enzovoort. De functie die de waarheidwaarde voor een fuzzy verzameling in het exacte domein vastlegt wordt dan de *lidmaatschapsfunctie (memberships function)* genoemd. Deze lidmaatschapsfunctie bepaalt voor elk element in het domein de waarheidwaarde van de bijbehorende fuzzy verzameling. De lidmaatschapsfuncties worden meestal grafisch weergegeven in een grafiek waarin de waarheidwaarde van 0 tot 1 verticaal uitgezet is tegen horizontaal de elementwaarden van het beschouwde domein. In figuur 4.2 en figuur 4.3 zijn twee mogelijke manieren om die afbeelding te maken weergegeven.

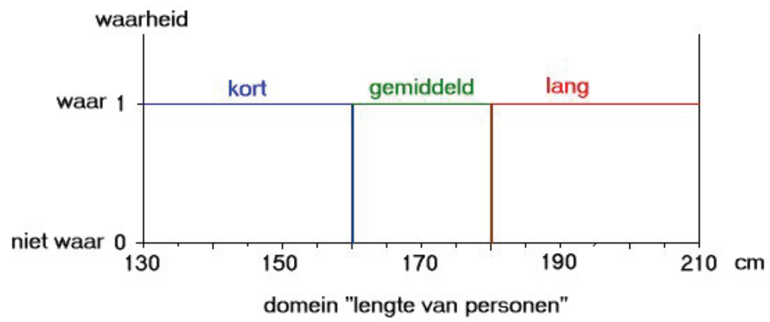


FIGUUR 4.2 Mogelijke lidmaatschapsfuncties voor de fuzzy afbeelding van linguïstische variabelen kort, gemiddeld en lang op het domein lengte van personen



FIGUUR 4.3 Mogelijke lidmaatschapsfuncties voor de fuzzy afbeelding van linguïstische variabelen kort, gemiddeld en lang op het domein lengte van personen

Dezelfde linguïstische variabelen kunnen ook weergegeven worden als vaste verzamelingen met waarheidswaarden waar (1) of niet waar (0) uit de klassieke logica, dit levert dan de zogenaamde crisp sets, zoals in figuur 4.4.



FIGUUR 4.4 Mogelijke lidmaatschapsfuncties voor de crisp afbeelding van linguïstische variabelen kort, gemiddeld en lang op het domein lengte van personen

2 Opmerkingen en errata

Opmerking bij paragraaf 4.4
Als voorbeeld bij de bewerkingen op fuzzy verzamelingen wordt in deze paragraaf de fuzzy verzameling “tall men” genoemd, daarnaast ook de “men” en “fat men”. Dat kan tot verwarring leiden. Bewerkingen op fuzzy verzamelingen vinden altijd plaats binnen één domein. In dit geval vinden de bewerkingen in de voorbeelden (gekoppeld aan de formules) plaats in het domein “length of men”, met mogelijke fuzzy waarden “tall men”, “not tall men”, “very tall men”, “average men” en “short men”. In de tekst waar een paar keer (bij Containment op blz. 99, Intersection op blz. 99 en Union op blz. 100) met de klassieke verzamelingenleer wordt vergeleken, wordt uitgegaan van de klassieke verzameling “men”, waarbinnen verzamelingen “tall men”, “very tall men” en “fat men” voorkomen. Dit is dus wezenlijk anders dan bij de fuzzy bewerking, die alleen met een bepaalde waarheidswaarde voor fuzzy variabelen kunnen voorkomen binnen hetzelfde domein. “Fat men” is geen variabele in het domein “length of men” er kan dus geen fuzzy bewerking zoals doorsnede (min) of vereniging (max) plaatsvinden op de lidmaatschapsfuncties voor de variabele “fat men” en “tall men”. “Tall men”, “average men” en “short men” zijn alle drie wel fuzzy waarden van de fuzzy variabele (domein) “length of men”. Hier kunnen die genoemde bewerkingen wel op plaats vinden. In de klassieke verzamelingenleer zal bijvoorbeeld de doorsnede hier altijd een lege verzameling opleveren, omdat de waarden “tall men”, “average men” en “short men” elkaar nooit overlappen; iemand behoort tot de ene of de andere groep, maar nooit tot beide.

Erratum paragraaf 4.4
Erratum blz 101
Op bladzijde 101 figuur 4.7
De figuur van het complement is fout: juist de witte gedeelten dienen grijs te zijn en het grijze wit. De tekst **Not A** hoort aan beide zijden in het nu witte gedeelte te staan

3 Terugkoppeling Questions for review

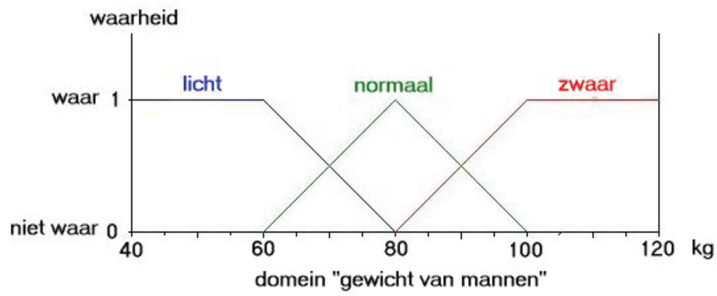
"Questions for review", Hoofdstuk 4, blz. 126

OPGAVE 4.1
Wat is fuzzy logic (vage logica)? Wie hebben fuzzy logic bedacht? Waarom leidt fuzzy logic tot meer menselijke intelligentie van machines?

Fuzzy logic is een logica die vaagheid beschrijft, het probeert zo goed mogelijk de betekenis van menselijk redeneren met menselijke begrippen vast te leggen.
Het begrip fuzzy logic is door Lotfi Zadeh geïntroduceerd in 1965. Het redeneren met meerwaardige logica is al in 1930 door Lukasiewicz geïntroduceerd. In 1937 werd dit verder uitgebreid door Max Black in een artikel met de titel: "Vagueness: an exercise in logical analysis". Die laatste twee hebben eigenlijk de basis gelegd, maar Zadeh is vooral de promotor geweest van de fuzzy logic die hij opnieuw ontdekte.
Omdat het menselijk redeneren met vage termen, zonder een vertaalslag naar het Booleaanse redeneren, direct in de machine wordt ingevoerd is het een krachtige logica om menselijk redeneren te automatiseren.

OPGAVE 4.2
Wat is een fuzzy set en wat is een lidmaatschapsfunctie? Wat is het verschil tussen een crisp set en een fuzzy set? Leid mogelijke fuzzy sets af voor de universe of discourse (beschouwd gebied, domein) "gewichten van mannen".

Een fuzzy set is een gedefinieerde verzameling waarden met vage grenzen in een exact domein. Die vaagheid van de grenzen geeft een geleidelijke overgang aan van volledig waar tot volledig niet waar in het exacte domein. Een fuzzy set wordt ook wel fuzzy waarde genoemd. De fuzzy variabele geeft dan het beschouwde domein, opgebouwd uit fuzzy waarden, weer. Bijvoorbeeld de fuzzy variabele gewicht van mannen heeft als mogelijke fuzzy waarden "licht", "normaal" en "zwaar". Voor het afbeelden van de fuzzy waarden in het exacte domein gebruiken we lidmaatschapsfuncties. Een lidmaatschapsfunctie is een functie die de mate van waarheid als functie van de domeinwaarde vastlegt voor een fuzzy waarde.
De waarden "licht", "normaal" en "zwaar" als crisp set kennen slechts twee waarheidwaarden (waar of niet waar) ten opzichte van de domeinwaarde. Een fuzzy waarde kent een continue overgang van waar naar niet waar. Een bepaalde domeinwaarde kan dus ook een beetje waar zijn voor de fuzzy waarde "licht". Diezelfde domeinwaarde is dan bijvoorbeeld voor de fuzzy waarde"normaal" bijna waar. Aangrenzende fuzzy waarden overlappen elkaar meestal in een domein.
De fuzzy waarden in het domein gewichten (van 40 tot 120 kg) van een man zijn bijvoorbeeld zoals in figuur 4.5:
– Licht: volledig waar van 40 tot 60 kg en dan geleidelijk afnemend van waar tot niet waar van 60 tot 80 kg.
– Normaal: niet waar bij gewichten minder dan 60 kg en dan geleidelijk toenemend van niet waar tot volledig waar tussen 60 en 80 kg om vervolgens weer geleidelijk af te nemen tot niet waar bij 100 kg en meer.
– Zwaar: niet waar bij minder dan 80 kg en vanaf dat punt geleidelijk toenemend tot volledig waar bij 100 kg en meer.



FIGUUR 4.5 Fuzzy waarden “licht”, “normaal” en “zwaar”

OPGAVE 4.3

Definieer een linguïstische variabele en zijn waarde. Geef een voorbeeld. Hoe worden linguïstische variabelen gebruikt in fuzzy regels? Geef enkele voorbeelden van fuzzy regels.

Een linguïstische variabele is bijvoorbeeld “normaal” uit het domein van de gewichten van mannen uit vraag 2. De waarheidswaarden voor de bijbehorende fuzzy waarde “normaal” in het domein gewichten wordt dan door de lidmaatschapsfunctie vastgelegd. In dit geval kan dat een driehoeksvorm zijn met de top (waarheidwaarde 1) bij 80 kg en de basishoekpunten (waarheidwaarde 0) bij 60 en 100 kg.
Linguïstische variabelen worden als fuzzy waarden als condities (voorwaarden, antecedenten) en als besluiten (hypotheses, consequenten) gebruikt in fuzzy regels.
Voorbeelden van fuzzy regels zijn:
als gewicht is normaal dan dosering is standaard
als gewicht is licht dan dosering is laag
als gewicht is erg zwaar en lengte is tamelijk kort dan risico is zeker groot

OPGAVE 4.4

Wat is een hedge (aanpassing)? Hoe passen hedges bestaande fuzzy sets aan? Geef voorbeelden van hedges die operaties uitvoeren zoals concentratie, dilatatie en intensivering. Geef de overeenkomstige wiskundige uitdrukkingen en de bijbehorende grafische weergave.

Hedge

Een *hedge* geeft een nuancering van een linguïstische variabele. Deze nuanceringen kunnen vormgegeven worden door de lidmaatschapsfunctie (van vorm) te wijzigen. Bij dezelfde domeinwaarde van de overeenkomstige fuzzy waarde worden zo andere waarheidwaarden gedefinieerd. Voorbeelden van hedges zijn, zoals in het laatste voorbeeld van fuzzy regels in vraag 3, “erg“,“tamelijk“ en “zeker“ bij respectievelijk de linguïstische variabelen “zwaar“,“kort“ en “groot“.

Concentratie

“Erg zwaar“ duidt op een verlaging (*concentratie*) van de waarheidswaarde in het gebied waarin“ zwaar“ een waarheidswaarde kleiner dan 1 heeft. “Erg zwaar“ is minder waar dan “zwaar“.

Dilatatie

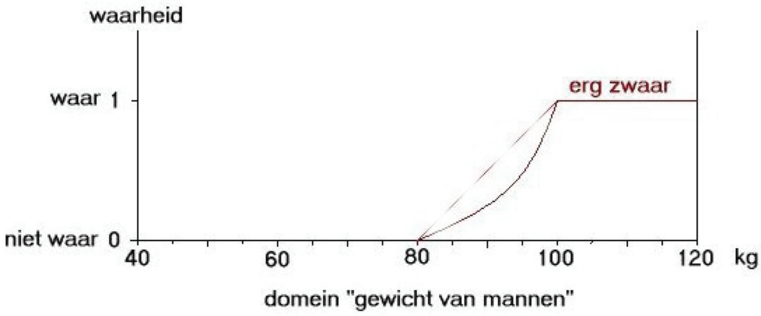
“Tamelijk kort“ duidt op een verhoging (*dilatatie*) van de waarheidswaarde in het gebied waarin“kort“ een waarheidwaarde kleiner dan 1 heeft. “Tamelijk kort“ is meer waar dan “kort“.

Intensivering

“Zeker groot“ duidt op een scherpere waarheidswaarde (*intensivering*) van“ groot“; een verdeling van waarheidswaarden die meer richting crisp waarde opgaat.

Concentratie

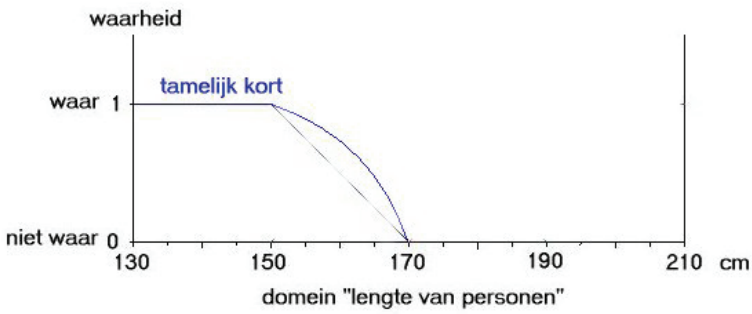
Concentratie wordt verkregen door de lidmaatschapsfunctie tot een macht hoger dan 1 te verheffen, bijvoorbeeld kwadrateren: $[\mu_A(x)]^2$ hierdoor verandert een rechte lijn in een holle curve, zoals in figuur 4.6.



FIGUUR 4.6 Concentratie $[\mu_{\text{ZWAAR}}(x)]^2$ levert $\mu_{\text{ERG ZWAAR}}(x)$

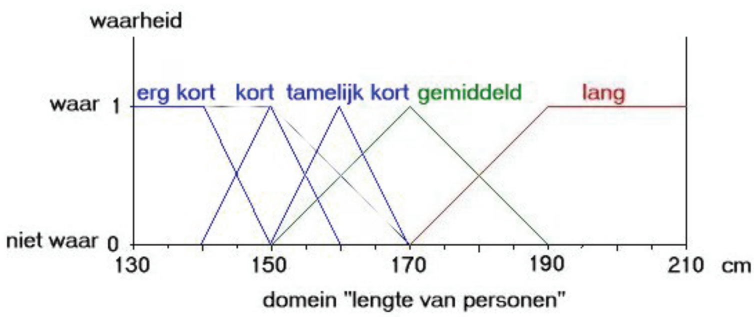
Dilatatie

Dilatatie wordt verkregen door de lidmaatschapsfunctie tot een macht lager dan 1 te verheffen, bijvoorbeeld de wortel nemen:$\sqrt{\mu_A(x)}$ hierdoor verandert een rechte lijn in een bolle curve.



FIGUUR 4.7 Dilatatie $\sqrt{\mu_{\text{KORT}}(x)}$ levert $\mu_{\text{TAMELIJK KORT}}(x)$

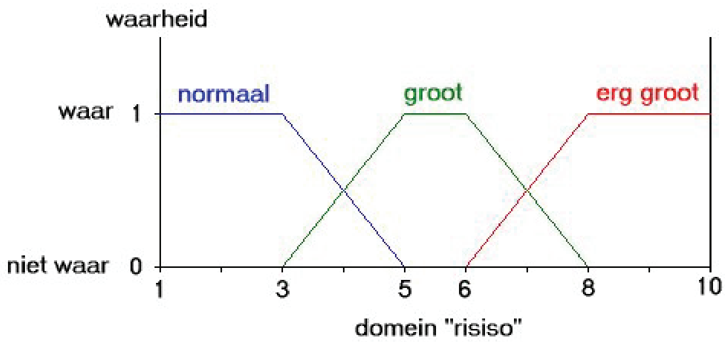
"Erg zwaar" en "tamelijk kort" worden ook vaak verkregen door het opnemen van extra fuzzy waarden in de betreffende domeinen. Bijvoorbeeld door de lidmaatschapsfunctie voor "kort" te vervangen door nieuwe lidmaatschapsfuncties "erg kort", "kort" en "tamelijk kort", zoals in figuur 4.8.



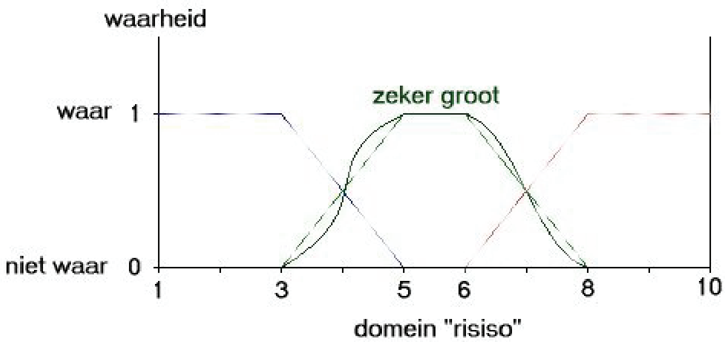
FIGUUR 4.8 Lidmaatschapsfunctie "kort" vervangen door "erg kort", "kort" en "tamelijk kort"

Intensivering

Intensivering kan worden verkregen door dat gedeelte van de lidmaatschapsfunctie dat waarheidswaarden kleiner dan 0,5 heeft te kwadrateren en met 2 te vermenigvuldigen: $2 \cdot [\mu_A(x)]^2$ en voor waarheidswaarden groter dan 0,5 de volgende kwadratische functie te kiezen: $1 - 2 \cdot [1-\mu_A(x)]^2$; hierdoor verandert een driehoek in een klokvorm. Uitgaande van de lidmaatschapsfunctie "groot" voor risico zoals weergegeven in figuur 4.9 krijgen wel door intensivering de lidmaatschapsfunctie voor "zeker groot" zoals weergegeven in figuur 4.10.



FIGUUR 4.9 Lidmaatschapsfuncties voor de fuzzy waarden "normaal", "groot" en "erg groot" weergegeven in het domein risico met waarden van 1 tot 10.



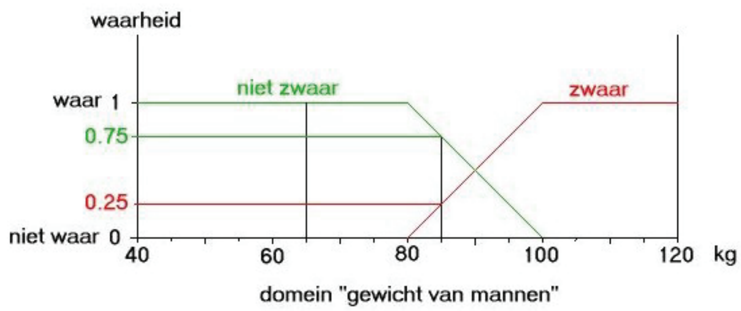
FIGUUR 4.10 Intensivering van "groot" naar "zeker groot" in het domein risico.

OPGAVE 4.5
Definieer de belangrijkste bewerkingen met fuzzy sets.
Geef voorbeelden.
Hoe worden bewerkingen van fuzzy sets, hun eigenschappen en hedges gebruikt om een variatie aan fuzzy sets te verkrijgen uitgaande van de bestaande fuzzy sets?

Alle door Cantor gedefinieerde bewerkingen (operaties) die voor scherpe verzamelingen gelden, houden hun geldigheid binnen de operaties op fuzzy verzamelingen.

Complement

Complement: $\mu_{\neg A}(x) = 1-\mu_A(x)$
Met welke waarheid behoren elementen niet tot de verzameling?
Voor een willekeurig element uit het domein geldt waarheidswaarde 1 voor het behoren tot de gehele verzameling van het domein. In de verzameling gewichten is verzameling “niet zwaar” gelijk aan de “gehele verzameling” minus de “verzameling zwaar”. Dus niet zwaar heeft als waarheidswaarde 1 – waarheidswaarde voor zwaar, zie figuur 4.11.



FIGUUR 4.11 “Niet zwaar” = 1 – “zwaar”: alle gewichten minus zwaar

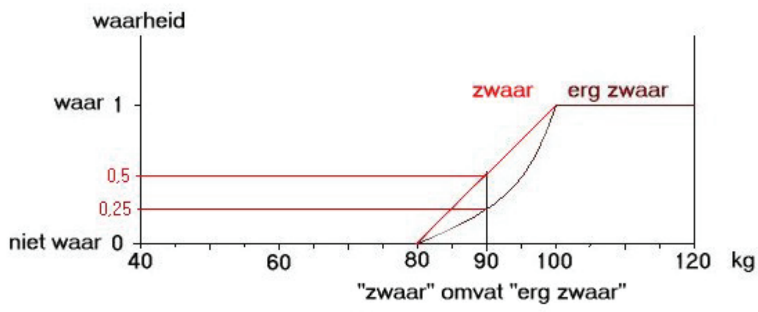
We zien dat iemand van 85 kg met een waarheidswaarde van 0,25 zwaar is, maar tevens met een waarheidswaarde van (1 – 0,25 =) 0,75 niet zwaar is.

Omvatting

Omvatting: $\mu_A(x) \subset \mu_B(x)$
Met welke waarheid behoort een verzameling tot ander een andere verzameling?

Deelverzameling

De verzameling zwaar (*A*) bij gewicht van mannen zal ook erg zwaar (*B*) bevatten. Omgekeerd geldt dan dat erg zwaar een *deelverzameling* van zwaar is. De waarheidswaarde van erg zwaar bij een bepaald element uit het domein gewicht heeft dan een kleinere waarde dan die van zwaar. In figuur 4.12 is dit weergegeven.



FIGUUR 4.12 “Erg zwaar” is een deelverzameling van “zwaar” of “zwaar” omvat “erg zwaar”.

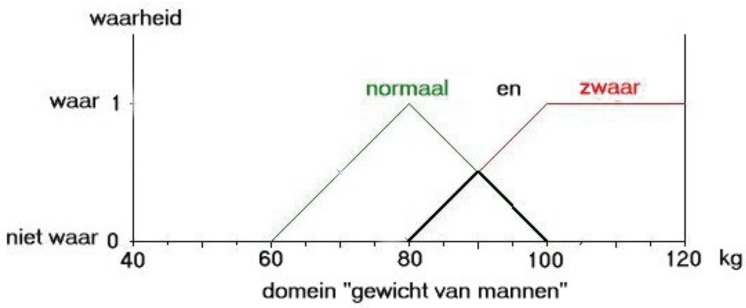
We zien in figuur 4.12 dat voor iemand van 90 kg de waarheidwaarde (0,25) van de deelverzameling “erg zwaar” kleiner is dan die (0,5) van de verzameling “zwaar”.

Doorsnede

Doorsnede: Binnen domein X: $\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_A(x) \cap \mu_B(x)$, met $x \in$ X.
Met welke waarheid is een element in beide verzamelingen?
Wanneer als voorwaarde geldt dat gewicht zowel tot de fuzzy verzameling zwaar (*A*) als normaal (*B*) hoort, dan gelden alleen die gewichten die een bepaalde waarheidwaarde in beide fuzzy verzamelingen zwaar en normaal hebben. Als we per element de waarheidswaarden van beide fuzzy verzamelingen vergelijken dan bepaalt de kleinste waarheidswaarde van beide de mate van waarheid dat beide fuzzy verzamelingen gelden. In figuur 4.13 is dit weergegeven.

En-operatie
Minimum

Dus voor de *en-operatie* dient het *minimum* genomen te worden bij het bepalen voor hoeveel het waar is dat een gewicht normaal **en** zwaar is.



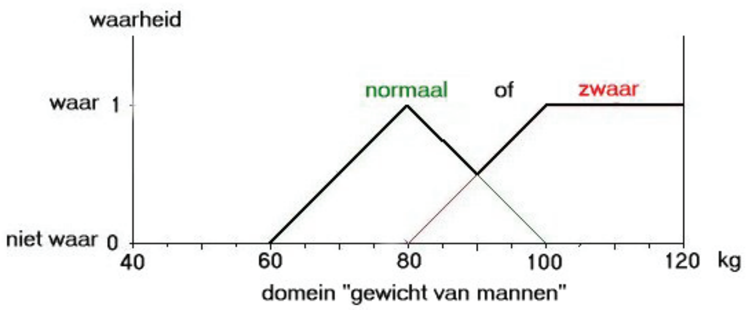
FIGUUR 4.13 Doorsnede of en-operatie (normaal en zwaar) levert waarheidswaarde via minimum-operatie.

Vereniging

Vereniging: Binnen domein X: $\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_A(x) \cup \mu_B(x)$, met $x \in$ X.
Met welke waarheid is een element in elk van de verzamelingen?
Als de voorwaarde voor gewicht is dat het normaal (*A*) of zwaar (*B*) is, dan geldt de voorwaarden als één van beide voldoet. In dit geval zal dus de grootste waarheidswaarde het meeste gewicht in de schaal leggen. In figuur 4.14 is dit weergegeven.

Of-operatie
Maximum

Dus voor de *of-operatie* dient het *maximum* genomen te worden bij het bepalen voor hoeveel het waar is dat een gewicht normaal **of** zwaar is.

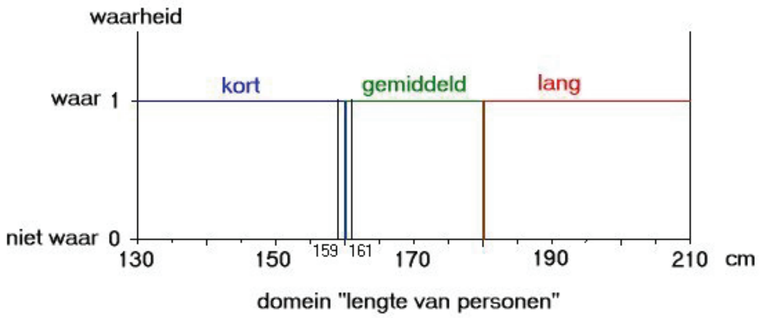


FIGUUR 4.14 Vereniging of of-operatie (normaal of zwaar) levert waarheidswaarde via maximum-operatie.

Verder gelden de standaardregels uit de algebra van Boole; bewerkingen zijn commutatief, associatief en distributief. Ook gelden de regels voor idempotentie, identiteit, involutie en transitiviteit en de wetten van De Morgan.
Bewerkingen, eigenschappen en hedges van fuzzy verzamelingen kunnen bijvoorbeeld als volgt gebruikt worden. We hebben fuzzy waarden lange $\mu_A(x)$ en korte $\mu_B(x)$ mannen. We kunnen dan met behulp van dilatatie, het complement en een wet van De Morgan de verzameling ”niet erg korte en niet erg lange mannen” $\mu_C(x)$ als volgt afleiden:
$\mu_A(x)$ is kort
$\mu_B(x)$ is lang
$\mu_A(x)^2$ is erg kort
$\mu_B(x)^2$ is erg lang
$\max[\mu_A(x)^2, \mu_B(x)^2]$ is erg kort **of** erg lang
$1 - \max[\mu_A(x)^2, \mu_B(x)^2]$ is **niet**(erg kort **of** erg lang) = (**niet** erg kort) **en** (**niet** erg lang).
Dus $\mu_C(x) = 1- \max[\mu_A(x)^2, \mu_B(x)^2]$

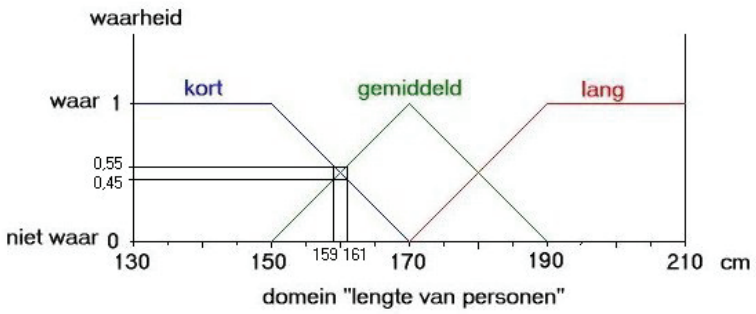
OPGAVE 4.6
Wat is een fuzzy regel? Wat is het verschil tussen klassieke regels (productie regels) en fuzzy regels? Geef voorbeelden.

Een fuzzy regel is een productieregel waarbij de voorwaarden en besluiten bestaan uit fuzzy variabelen met fuzzy waarden. Een fuzzy regel is een natuurgetrouwe weergave van het menselijk redeneren met linguïstische variabelen. Klassieke regels hebben voorwaarden en besluiten die waar (1) of niet waar (0) kunnen zijn. Bij fuzzy regels kunnen de voorwaarden en besluiten elke waarde voor de waarheid (tussen 0 en 1) aannemen. Hierdoor zal een regel met een bepaalde mate van zekerheid veel vaker gelden dan bij klassieke productieregels, waar een regel wel of niet geldt.
Voor vaste verzamelingen (crisp sets) geldt dat iemand kort is bij een lengte kleiner 160 cm. Voor fuzzy verzamelingen geldt: “*lengte* is kort” is volledig waar voor kleiner dan 150 cm en neemt geleidelijk af tot niet waar bij 170 cm en groter. Als regel geldt bijvoorbeeld:
Als *lengte* is kort dan *risico* is groot
We vergelijken het risico van iemand met een lengte van 159 cm met iemand van 161 cm.
Bij de vaste verzameling geldt voor 159 cm dat iemand kort is en het risico dus groot is. Voor iemand van 161 cm geldt dat deze niet kort is en voldoet de regel niet. De conclusie voor iemand van 161 cm zou daarbij kunnen zijn: risico is niet groot. In figuur 4.15 is dit weergegeven.



FIGUUR 4.15 Vaste (crisp) verzameling: 159 cm is kort en 161 cm is lang.

Voor dezelfde personen en de fuzzy verzamelingen geldt: kort is voor 0,55 waar voor de persoon van 159 cm en kort is voor 0,45 waar voor de persoon van 161 cm. Als we veronderstellen dat de te trekken conclusie even waar is als waarheid die voor de voorwaarde geldt; dan geldt dat risico is groot voor 0,55 waar is voor de persoon van 159 cm en voor 0,45 waar voor de persoon van 161 cm. Dit is in figuur 4.16 weergegeven. Omdat beide personen nauwelijks in lengte van elkaar verschillen is dat een realistischer resultaat dan bij de vaste verzamelingen.



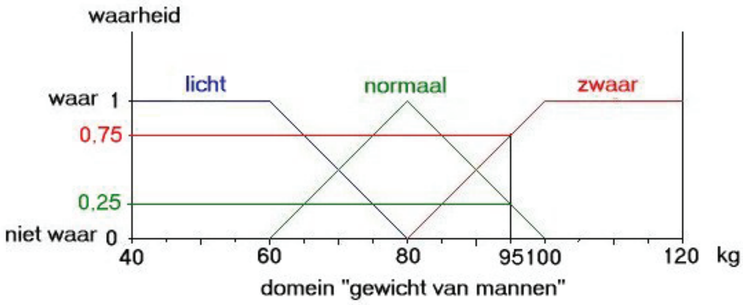
FIGUUR 4.16 Fuzzy verzameling: 159 cm is voor 0,55 waar voor kort en voor 0,45 waar voor gemiddeld, 161 cm is voor 0,45 waar voor kort en voor 0,55 waar voor gemiddeld.

OPGAVE 4.7

Definieer fuzzy inferentie (gevolgtrekking).
Wat zijn de belangrijkste stappen in het fuzzy inferentieproces?

Fuzzy inferentie is het afbeelden van gegeven invoerwaarden op uitvoerwaarden, waarbij de theorie van fuzzy verzamelingen wordt gebruikt.

De belangrijkste stappen in het afbeeldingsproces zijn:
– Fuzzificatie: de gegeven waarden uit de domeinen van de invoervariabelen omzetten in waarheidswaarden van de fuzzy waarden in die domeinen. In figuur 4.17 is dit weergegeven voor het gewicht 95 kg voor een man, wat als waarheidwaarde voor fuzzy waarden 0,75 zwaar en tevens 0,25 normaal oplevert.

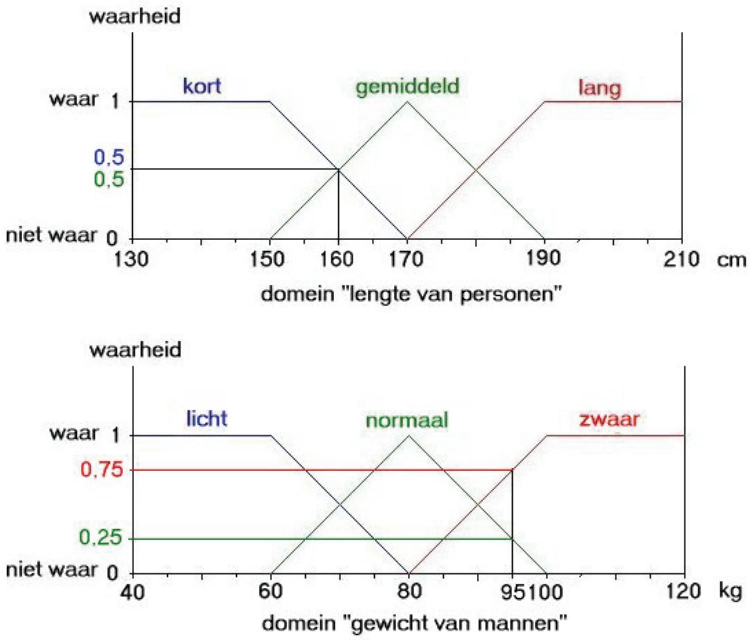


FIGUUR 4.17 Fuzzificeren van 95 kg naar 0,75 zwaar en 0,25 normaal.

– Regel evaluatie: het verwerken van de fuzzy regels; fuzzy invoerwaarden leveren fuzzy uitvoerwaarden.
– Aggregatie: voor de fuzzy uitvoervariabele de fuzzy waarden van de resultaten van de regels samennemen tot een fuzzy uitvoerwaarde.
– Defuzzificatie: de fuzzy uitvoerwaarde herleiden tot een exacte waarde uit het domein van de uitvoervariabele.

OPGAVE 4.8
Hoe verwerken we meervoudige voorwaarden in fuzzy regels? Geef voorbeelden.
Kunnen verschillende methoden om de fuzzy en- en of-operaties te verwerken leiden tot verschillende resultaten? Waarom?

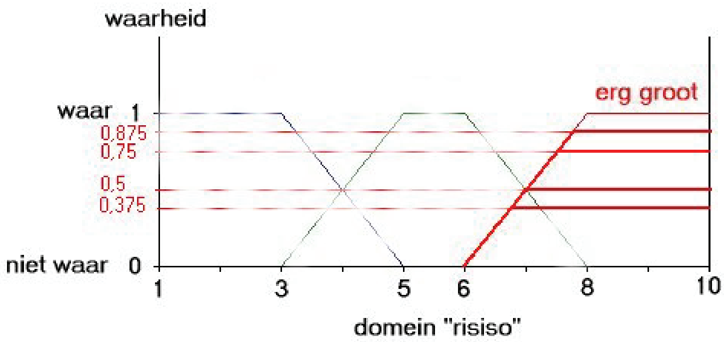
Voor fuzzy verzamelingen geldt:
Lengte kort is volledig waar voor kleiner dan 150 cm en neemt geleidelijk af tot niet waar bij 170 cm en groter.
Gewicht zwaar is volledig niet waar voor minder dan 80 kg en neemt geleidelijk toe tot waar bij 100 kg en meer.
Als regel geldt: Als *lengte* is kort **of** *gewicht* is zwaar dan *risico* is erg groot.
Fuzzificatie voor iemand van 160 cm en 95 kg levert dan: kort is voor 0,5 waar en zwaar is voor 0,75 waar. In figuur 4.18 is dit weergegeven.



FIGUUR 4.18 Fuzzificatie van lengte 160 cm en gewicht 95 kg.

Voor beide voorwaarden veronderstellen we afzonderlijk dat de te trekken conclusie even waar is als waarheid die voor de voorwaarde geldt. Dan geldt dat risico is groot door lengte voor 0,5 waar is en door gewicht voor 0,75 waar.
Omdat de regel “vuurt” als aan één van beide voorwaarden wordt voldaan (of-operatie) nemen we voor het resultaat de maximale waarde van beide waarheden. Risico is erg groot is dus voor 0,75 waar. In feite telt het argument dat het gewicht zwaar is meer mee dan dat de lengte kort is.
Stel de regel is:
Als *lengte* is kort **en** *gewicht* is zwaar dan *risico* is erg groot.
Omdat nu de regel alleen “vuurt” als beide voorwaarden gelden (en-operatie), nemen we het minimum van beide waarheidwaarden. Risico is groot is hier dus voor 0,5 waar.
Er zijn ook nog andere methoden dan de min- en max-operaties voor de logische en- en of- operaties.
Voor de en-operatie wordt ook wel het product van de afzonderlijke waarden gebruikt. Dat geeft altijd lagere waarheidswaarden dan de min-operatie. In feite is dat een voorzichtigere benadering omdat vermenigvuldigen van twee of meer getallen met een waarde tussen 0 en 1 altijd een kleiner resultaat dan de kleinste waarde van de getallen oplevert. Voor het voorbeeld betekent dat dan voor de waarheidswaarde $0{,}5 \cdot 0{,}75 = 0{,}375$.

Voor de of-operatie wordt ook wel de som van de afzonderlijke waarden minus het product van de afzonderlijke waarden genomen. Dat levert altijd een gelijke of hogere waarden dan de max-operatie. Het is een wat minder voorzichtige methode omdat de (som – product) altijd groter is dan de grootste waarde van de afzonderlijke getallen. Omdat de getallen een waarde tussen 0 en 1 hebben geldt dat een getal kleiner dan het kleinste (het product) van de som wordt afgetrokken. Voor het voorbeeld betekent dit voor de waarheidswaarde 0,5 + 0,75 – 0,5 · 0,75 = 0,5 + 0,75 – 0,375 = 0,875.
In figuur 4.19 hebben we de gevolgen voor de verschillende resultaten van de verwerking van de meervoudige voorwaarden in een fuzzy regel weergegeven. Alle resultaten leiden tot het afknotten van de fuzzy waarde “erg groot” in het domein risico.

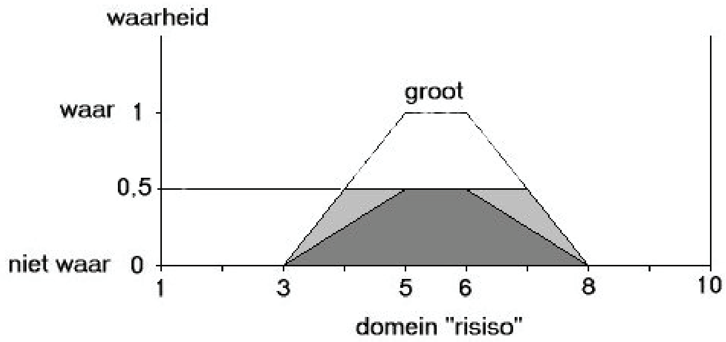


FIGUUR 4.19 Verschillende fuzzy resultaten van een fuzzy regel ten gevolge van verschillende combinaties van voorwaarden en verschillende bewerkingen op de voorwaarden.

OPGAVE 4.9
Wat is (af)kappen van een fuzzy set? Wat is schaling van een fuzzy set?
Welke methode behoudt het best de originele vorm van de fuzzy set?
Geef een voorbeeld.

De implicatie van de regel wordt bij fuzzy regels op verschillende manieren uitgevoerd. Eén van de meest gangbare (de Mamdani methode) is de min-operatie toepassen op het resultaat van het argument (na toepassen van eventuele en- en or-operaties in het argument) van de regel en de fuzzy variabele van het besluit. Hierdoor worden grotere waarheidswaarden dan die van het argument als het ware afgekapt (grafisch gezien) van de oorspronkelijke waarheidswaarde per fuzzy waarde (lidmaatschapsfunctie) van het besluit. De functie wordt bijvoorbeeld begrensd tot maximaal 0,5 voor de waarheidwaarde. In figuur 4.20 is dit weergegeven voor de fuzzy waarde “groot” in het domein “risico”.

Bij schaling wordt na het afkappen van de functie, de functie in het gebied binnen het domein waar de waarheidswaarden in de oorspronkelijke functie geleidelijk overgingen van 0 naar 1, zodanig aangepast dat in datzelfde gebied nu de overgang van de waarheidswaarden weer geleidelijk van 0 naar de afgekapte waarde (bijvoorbeeld 0,5) gaat (zie het donkergrijze gebied in figuur 4.20). Door schaling verandert wel de oorspronkelijk aanname van waarheden bij bepaalde domeinwaarden. In de grafieken wordt niet alleen de maximale waarde bepaald, maar ook de waarheidswaarde onder de maximale waarden worden evenredig verlaagd. Dus als het maximum 0,5 is worden alle waarden die oorspronkelijk onder waarheidswaarde 1 lagen vermenigvuldigd met 0,5.

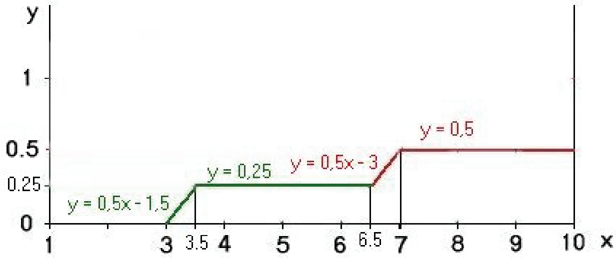


FIGUUR 4.20 Lichtgrijs: afkappen van functie bij fuzzy resultaatbepaling.
Donkergrijs: schaling na afkappen.

OPGAVE 4.10
Wat is defuzzificatie? Wat is de meest gangbare defuzzificatiemethode? Hoe bepalen we wiskundig en grafisch de uiteindelijke uitvoer van een fuzzy systeem?

Defuzzifactie is het terugbrengen van het fuzzy resultaat (vaak een samenvoeging van verschillende lidmaatschapsfuncties) tot een exact resultaat in het domein. Hiervoor wordt meestal de zwaartepuntsmethode (centre of grafity COG) gebruikt. Bij de zwaartepuntsmethode wordt het zwaartepunt van de verdeling van waarheidwaarden over de elementwaarden uit het domein bepaald. Grafisch is het te interpreteren als het zwaartepunt van de figuur onder de kromme die de samenvoeging van lidmaatschapsfuncties van het fuzzy resultaat in het domein weergeven. De domeinwaarde die bij dat zwaartepunt hoort is dan de exacte waarde voor het resultaat. Als de wiskundige beschrijving van functies van de (samengestelde) lidmaatschapsfunctie die het resultaat bepaalt bekend zijn, is de exacte methode om de COG te bepalen als volgt:

$$x_{COG} = \frac{\int \mu_R(x) \cdot x \cdot dx}{\int \mu_R(x) \cdot dx}$$



FIGUUR 4.21 Een fuzzy resultaat begrensd door lijnen met een bekende functie-omschrijving in de vorm y = a · x + b

Voor figuur 4.21 waarbij voor het gemak $\mu_R(x)$ vervangen is door y levert dit de onderstaande berekening voor x_{COG}

$$x_{COG} = \frac{\int_{3}^{3.5} (\frac{1}{2}\cdot x - \frac{3}{2})\cdot x \cdot dx + \int_{3.5}^{6.5} 0.25 \cdot x \cdot dx + \int_{6.5}^{7} (\frac{1}{2}\cdot x - \frac{3}{2})\cdot x \cdot dx + \int_{7}^{10} 0.5 \cdot x \cdot dx}{\int_{3}^{3.5} (\frac{1}{2}\cdot x - \frac{3}{2})\cdot dx + \int_{3.5}^{6.5} 0.25 \cdot dx + \int_{6.5}^{7} (\frac{1}{2}\cdot x - \frac{3}{2})\cdot dx + \int_{7}^{10} 0.5 \cdot dx}$$

Integreren van de functies levert dan:

$$x_{COG} = \frac{\left|\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2\right|_{3}^{3.5} + \left|\frac{1}{8}x^2\right|_{3.5}^{6.5} + \left|\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right|_{6.5}^{7} + \left|\frac{1}{4}x^2\right|_{7}^{10}}{\left|\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x\right|_{3}^{3.5} + \left|\frac{1}{4}x\right|_{3.5}^{6.5} + \left|\frac{1}{4}x^2 - 3x\right|_{6.5}^{7} + \left|\frac{1}{2}x\right|_{7}^{10}}$$

Per functie de verschillen tussen onder- en bovengrens invullen levert dan:

$$x_{COG} = \frac{(\frac{1}{6}\cdot 3{,}5^3 - \frac{3}{4}\cdot 3{,}5^2) - (\frac{1}{6}\cdot 3^3 - \frac{3}{4}\cdot 3^2) + (\frac{1}{8}\cdot 6{,}5^2) - (\frac{1}{8}\cdot 3{,}5^2) + (\frac{1}{6}\cdot 7^3 - \frac{3}{2}\cdot 7^2) - (\frac{1}{6}\cdot 6{,}5^3 - \frac{3}{2}\cdot 6{,}5^2) + (\frac{1}{4}\cdot 10^2) - (\frac{1}{4}\cdot 7^2)}{(\frac{1}{4}\cdot 3{,}5^2 - \frac{3}{2}\cdot 3{,}5) - (\frac{1}{4}\cdot 3^2 - \frac{3}{2}\cdot 3) + (\frac{1}{4}\cdot 6{,}5) - (\frac{1}{4}\cdot 3{,}5) + (\frac{1}{4}\cdot 7^2 - 3\cdot 7) - (\frac{1}{4}\cdot 6{,}5^2 - 3\cdot 6{,}5) + (\frac{1}{2}\cdot 10) - (\frac{1}{2}\cdot 7)}$$

Uitwerken van deze formule levert:

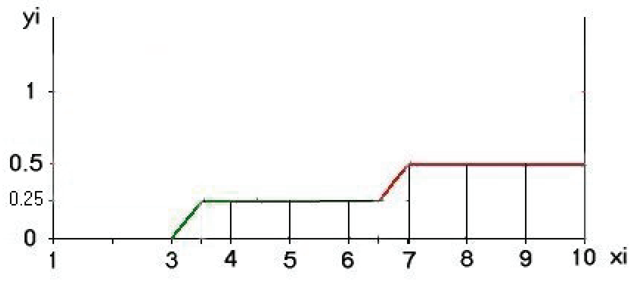
$$x_{COG} = \frac{431{,}5}{60} = 7{,}1917$$

Als de wiskundige functies niet bekend zijn dan kunnen de integralen numeriek benaderd worden en benadert de volgende formule de COG met discrete waarden.

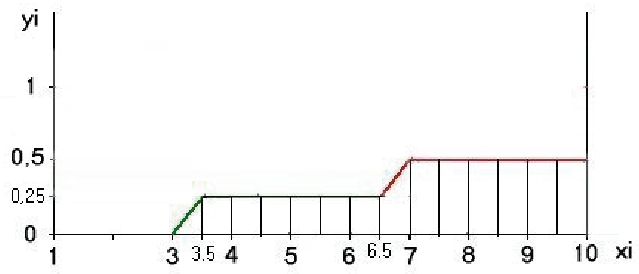
$$x_{COG} = \frac{\sum \mu_R(x_i)\cdot x_i}{\sum \mu_R(x_i)}$$

Hierbij gaan we uit van de grafische weergave van de lidmaatschapsfunctie. De stapgrootte tussen de waarden x_i waarover gesommeerd wordt dient klein genoeg te zijn om de details in de samengestelde lidmaatschapsfunctie goed weer te geven.

In figuur 4.22 en figuur 4.23 is dit voor twee verschillende stapgrootten weergegeven.



FIGUUR 4.22 Discrete benadering van het fuzzy resultaat met stapgrootte $\Delta x_i = 1$.



FIGUUR 4.23 Discrete benadering van het fuzzy resultaat met stapgrootte $\Delta x_i = 0{,}5$.

Discrete berekeningen met de stapgrootte $\Delta x_i = 1$ uit de figuur 4.22, waarbij $\mu_R(x_i)$ voor het gemak is vervangen door y_i levert:

$$x_{COG} = \frac{y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 + y_4x_4 + y_5x_5 + y_6x_6 + y_7x_7 + y_8x_8 + y_9x_9 + y_{10}x_{10}}{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10}}$$

$$x_{COG} = \frac{0\cdot 1 + 0\cdot 2 + 0\cdot 3 + 0,25\cdot 4 + 0,25\cdot 5 + 0,25\cdot 6 + 0,5\cdot 7 + 0,5\cdot 8 + 0,5\cdot 9 + 0,5\cdot 10}{0+0+0+0,25+0,25+0,25+0,5+0,5+0,5+0,5}$$

$$x_{COG} = \frac{20,75}{2,75} = 7,5455$$

Berekening met stapgrootte $\Delta x_i = 0{,}5$ uit figuur 4.23 levert op eenzelfde manier, maar met tweemaal zoveel getalswaarden, als resultaat:

$$x_{COG} = \frac{38,5}{5,25} = 7,3333$$

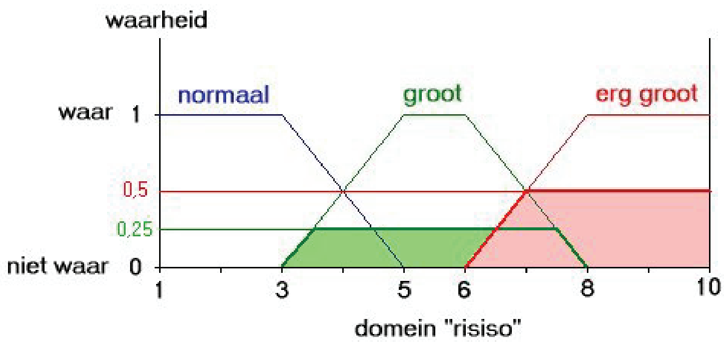
We zien dat verkleining van de stapjes de exacte waarde, die berekend is met de integralen, steeds beter benadert, maar er toch nog wel van afwijkt. Het rekengemak gaat dus ten koste van de nauwkeurigheid.

OPGAVE 4.11

Wat zijn de verschillen tussen de manier van Mamdani en van Sugeno voor fuzzy inferenties? Wat is een singleton (individu)?

Singleton

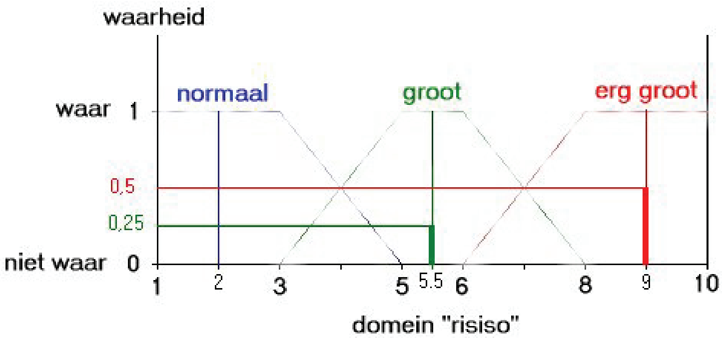
Mamdani gebruikt voor het resultaat de gehele samengestelde lidmaatschapsfuncties voor het fuzzy besluitattribuut, Sugeno gebruikt singletonwaarden daarvoor. Deze *singletons* geven voor een enkel element uit het domein de waarheidswaarden. De keuze van de positie van die singletons in het domein kan bijvoorbeeld overeenkomen met het gemiddelde van die elementen die waarheidswaarde 1 hebben bij de gekozen lidmaatschapsfuncties voor de uitgangswaarden. Bijvoorbeeld: voor de fuzzy waarden normaal, groot en erg groot in het domein risico, dat bestaat uit de waarden 1 t/m 10, kan de singleton normaal gekozen worden bij 2, groot bij 5,5 en erg groot bij 9. Bij het defuzzificeren van de resultaten volstaat het dan om een gewogen gemiddelde te berekenen van de waarheidswaarde van de singletons die gezamenlijk het resultaat vormen. Dit is een veel eenvoudigere bewerking dan het bepalen van het zwaartepunt zoals bij de Mamdani-methode. Het resultaat is wel iets onnauwkeuriger. In de figuren 4.24 en figuur 4.25 worden beide methodes weergegeven voor de resultaten van dezelfde regels. De rekening van x_{COG} voor de Mamdani-methode is al uitgebreid in de uitwerking van opgave 4.10 behandeld.



FIGUUR 4.24 De Mamdani-methode voor het bepalen van het fuzzy resultaat.

In de Mamdani-methode wordt voor de implicatie van de regel de min-operatie gebruikt. Het resultaat van de regel is dan het minimum van de waarheidwaarden van het voorwaardelijke gedeelte van de regel en het besluitgedeelte van de regel. Bijvoorbeeld: de combinatie van de voor-waarden in de regel voor risico is “erg groot” levert een waarheidwaarde van 0,5. Voor het resultaat van die regel wordt dan het minimum van 0,5 en de fuzzy waarde “erg groot” genomen. Dit levert een afgeknotte lidmaatschapsfunctie zoals weergegeven in figuur 4.24 voor “erg groot” in het domein risico. Zo levert een andere regel een bij 0,25 afgeknotte lidmaatschapsfunctie voor de fuzzy waarde “groot” in het domein risico.

Omdat voor het resultaat de regels onafhankelijk van elkaar gelden, wordt voor het totale resultaat dan het maximum genomen van de afzonderlijke resultaten. In feite geldt er een of-operatie voor de resultaten van de regels.
Dezelfde min-operatie voor de implementatie en max-operatie voor het samen nemen van de deelresultaten van de regels geldt ook voor de Sugeno-methode. Deze methode werkt echter niet met lidmaatschapsfuncties, maar met een enkele lidmaatschapswaarde (singleton) behorend bij een element in het domein van het resultaat. In figuur 4.25 is dit weergegeven.



FIGUUR 4.25 Sugeno-methode voor het bepalen van het fuzzy resultaat.

In figuur 4.25 zien we dat de fuzzy resultaten “normaal”, “groot” en “erg groot” in het domein risico worden weergegeven door singletons (waarheidwaarde bij slechts één element van het domein). Voor het resultaat wordt weer het minimum genomen van de waarheidwaarde welke volgt uit de evaluatie van de voorwaarden in de regel en de waarde van het betreffende singleton. Voor het genoemde voorbeeld bij Mamdani zien we dat dit hier nu niet resulteert in afgeknotte figuren maar wat kortere singletons (dikker in figuur 4.25 weergegeven). Het resultaat voor “erg groot” wordt nu dus een singleton bij risicowaarde 9 met een waarheidswaarde 0,5. Het resultaat voor “groot” wordt zo een singleton bij risicowaarden 5,5 met een waarheidwaarde 0,25.
De x_{COG}-berekening verloopt nu hetzelfde als de discrete benadering van de integraal-methode, maar alleen met de waarden van de gegeven singletons. In feite wordt het gewogen gemiddelde van de resulterende singletons bepaald, dit gaat als volgt voor figuur 4.25:

$$x_{COG} = \frac{y_2 x_2 + y_{5.5} x_{5.5} + y_9 x_9}{y_2 + y_{5.5} + y_9} = \frac{0 \cdot 2 + 0,25 \cdot 5,5 + 0,5 \cdot 9}{0 + 0,25 + 0,5} = \frac{5,875}{0,75} = 7,8333$$

OPGAVE 4.12
Wat zijn de belangrijkste stappen bij het ontwerpen van een fuzzy expertsysteem? Wat is het meest bewerkelijke en vervelendste gedeelte in dit proces? Waarom?

Stap 1. Specificeer het probleem en definieer de linguïstische variabelen die een rol spelen.
Stap 2. Bepaal aan de hand van de linguïstische variabelen de noodzakelijke fuzzy verzamelingen.
Stap 3. Achterhaal en ontwikkel fuzzy regels. Tussen Stap 2 en 3 zal vaak een wisselwerking plaatsvinden, zodat die volgorde afwisselend is.
Stap 4. Codeer (programmeer al dan niet met een speciale tool) de fuzzy verzamelingen, fuzzy regels en procedures zodat fuzzy gevolgtrekking plaats kan vinden.
Stap 5. Evalueer het systeem en regel het af (tune) totdat een acceptabel resultaat in een acceptabele tijd wordt verkregen. Soms moeten fuzzy waarden in een domein toegevoegd worden, soms juist weggehaald. Datzelfde geldt voor de regels. Soms dienen ook lidmaatschapsfuncties aangepast te worden; moeten al dan niet hedges worden aangebracht of moet een wat andere waarheidswaardeverdeling van de fuzzy waarde in het domein worden gemaakt.
Het afregelen van het systeem (stap 5: fine tuning) is het meest bewerkelijke en vervelendste gedeelte. Alle stappen dienen hier eigenlijk herhaald te worden. Natuurlijk zal een goed doordachte keuze voor regels en lidmaatschapsfuncties vooraf deze laatste stap aanzienlijk kunnen verkorten.