

Inleiding

- 1 De componenten van de cursus 7
 - 1.1 Opbouw van de cursus 7
 - 1.2 Verwachte voorkennis 8
 - 1.3 Leerdoelen van de cursus als geheel 8
- 2 Vorm van de cursus 8
 - 2.1 Opzet 8
 - 2.2 Tijdsverdeling 9
 - 2.3 Begeleiding 9
 - 2.4 Toetsing 9
- 3 Kunstmatige Intelligentie: waarom, wat, waarvoor? 10
- 4 Probleemoplossen met kunstmatige intelligentie 10
 - 4.1 Procesmodel als probleemmodel 11
 - 4.2 Probleemanalyse 12

Terugkoppeling 15

Inleiding

1 De componenten van de cursus

Studiestof	De cursus bestaat uit de volgende componenten: – Een tekstboek: Michael Negnevitsky, <i>Artificial Intelligence. A guide to Intelligent Systems</i> , waarin de verschillende technieken uit de kunstmatige intelligentie inleidend worden behandeld.
Zelftoets	– Het werkboek, dat u nu aan het lezen bent. Hierin wordt voornamelijk terugkoppeling gegeven op de “Questions for Review” waarmee elk hoofdstuk in het tekstboek eindigt. Voor de leesbaarheid worden de vragen herhaald in het Nederlands en de antwoorden ook gegeven in het Nederlands. In het werkboek is ook een eindtoets opgenomen die representatief is voor het af te leggen tentamen. Tevens zijn in het werkboek enkele errata op het tekstboek opgenomen.

1.1 OPBOUW VAN DE CURSUS

De cursus bestaat uit het bestuderen van het tekstboek. Daarin komen de volgende onderwerpen aan de orde:

- 1 Introduction to knowledge-based intelligent systems (22)
- 2 Rule-based expert systems (29)
- 3 Uncertainty management in rule-based expert systems (30)
- 4 Fuzzy expert systems (40)
- 5 Frame-based expert systems (33)
- 6 Artificial neural networks (50)
- 7 Evolutionary computation (38)
- 8 Hybrid intelligent systems (39)
- 9 Knowledge engineering and data mining (62)

Hoofdstuk 5
paragraaf 8.4
facultatief

Tussen haken staat het aantal bladzijden vermeld.
Hoofdstuk 5. Frame-based expert systems vertoont veel overeenkomst met objectgeoriënteerd programmeren. In de cursussen die dat onderwerp behandelen worden de basisprincipes veel uitgebreider behandeld. Daarom is dit hoofdstuk hier facultatief gesteld.
Ook paragraaf 8.4 over ANFIS uit hoofdstuk 8 is facultatief gesteld. Dit is op grond van de moeilijkheidsgraad en de te verwachten studielast van de cursus gedaan.
Facultatief betekent dat u het niet hoeft te bestuderen voor het tentamen.

1.2 VERWACHTE VOORKENNIS

Nuttige voorkennis kan uit de cursussen Discrete wiskunde A en B en Continue wiskunde komen. Het als parate kennis hebben van stukken uit de genoemde cursussen zal het bestuderen van deze cursus zeker vergemakkelijken. Er wordt verwacht dat de gepresenteerde basiskennis vlot opgepakt kan worden. Dit betreft dan vooral kennis van verzamelingenleer, werken met vectoren en matrices, en kennis van differentiëren ten behoeve van het optimaliseren.

1.3 LEERDOELEN VAN DE CURSUS ALS GEHEEL

De leerdoelen van de cursus zijn:

- De behandelde methoden en technieken begrijpen en toe kunnen passen, elk op hun meest geschikte probleemgebied.
- Zelfstandig specifieke problemen kunnen analyseren en beschrijven hoe die met de juiste technieken uit de kunstmatige intelligentie opgelost kunnen worden.

Na het slagen voor deze cursus mag verwacht worden dat u over een groter probleemoplossend vermogen beschikt dan voordat u de cursus bestudeerd had.

2 Vorm van de cursus

2.1 OPZET

Hoofdstuk 1 vormt een interessante historische inleiding in het vakgebied van de kennistechnologie en kunstmatige intelligentie. Hoofdstuk 2 behandelt op “als.. dan..”- regels gebaseerde systemen. Deze worden vooral gebruikt in Kennissystemen en specifiek in Expertsystemen. Hoofdstuk 3 behandelt het redeneren volgens de “als.. dan..”- regels met inachtneming van de onzekerheid van feiten en regels. Hoofdstuk 4 behandelt het redeneren met vage maar heel menselijke begrippen zoals: als het *koud* is dan zet ik de verwarming *hoog*. De hoofdstukken 6 en 7 behandelen technieken uit de Kunstmatige intelligentie waarvoor processen in de natuur model stonden. Hoofdstuk 6 behandelt neurale netwerken als zeer vereenvoudigde modellen van de werking van onze hersenen. Hoofdstuk 7 behandelt evolutionair rekenen en genetische algoritmes waarvoor de genetische voortplanting en de evolutietheorie als voorbeeld dienden. Hoofdstuk 8 behandelt enkele zogenaamde hybride systemen, hierin worden afzonderlijke technieken samengevoegd om de sterke kanten van elke techniek te benutten binnen een systeem. Hoofdstuk 9 geeft een verzameling voorbeeldtoepassingen waarbinnen datamining extra aandacht krijgt.

Bestudering

Om u de nieuwe begrippen uit de kennistechnologie eigen te maken bestudeert u elk hoofdstuk in het tekstboek op zich. Daarna probeert u zo goed mogelijk de ‘questions for review’ aan het eind van elk hoofdstuk te beantwoorden, waarbij terugbladeren in het hoofdstuk en stukjes opnieuw lezen een wezenlijk onderdeel zijn. Bij enkele vragen in hoofdstuk 6 wordt gevraagd een algoritme af te leiden. Er wordt niet van u verwacht dat u dat

uit uw hoofd kunt. Wel is het heel zinvol om met behulp van het boek zelf deze afleiding ook nog eens op papier af te leiden. Vervolgens neemt u het bijbehorende hoofdstuk in het werkboek door en vergelijkt u uw antwoorden met de daar gegeven antwoorden. De "Glossary" (bladzijde 365 tot 389) is niet alleen nuttig als naslagwerk bij het bestuderen, maar zeker ook om na bestudering van het boek nog eens door te nemen als zeer beknopte samenvatting.

Experimenten

Eventueel kunt u ook enkele experimenten ter verduidelijking van de studiestof uitvoeren. Bij bepaalde leereenheden zijn experimenten geselecteerd en beschreven. De beschrijving en bijbehorende software zijn te vinden op de cursussite.

2.2 TIJDSVERDELING

Uitgaande van de verwachte voorkennis wordt de studielast als volgt ingeschat

Hoofdstuk 1	3 uur
Hoofdstuk 2	9 uur
Hoofdstuk 3	12 uur
Hoofdstuk 4	12 uur
Hoofdstuk 6	16 uur
Hoofdstuk 7	12 uur
Hoofdstuk 8	12 uur
Hoofdstuk 9	18 uur
Eindtoetsen maken + evalueren	6 uur

2.3 BEGELEIDING

Cursussite

Als student van deze cursus kunt u via Internet toegang krijgen tot de digitale leeromgeving van de Open Universiteit Nederland: Studienet (<http://studienet.ou.nl>)

Op deze cursussite vindt u informatie over de cursus, de software en de data behorende bij de experimenten. Tevens vindt u hier het bijbehorende discussieforum. Hier kunt u vragen, opmerkingen en suggesties kwijt. Antwoorden en reacties zullen komen van de studiebegeleider en/of medestudenten.

Studiebegeleiding

De persoonlijke begeleiding zal voornamelijk elektronisch via e-mail verlopen. Tevens zal er, daar waar nodig, begeleiding in het bij de cursus behorende forum plaatsvinden. De cursus zal landelijk worden begeleid door de examinerator of eventueel de plaatsvervangende examinerator. Bij voldoende belangstelling zal er ook een cyclus groepsbijeenkomsten georganiseerd worden waar face-to-face of via de computer onderwijs op afstand verzorgd wordt.

2.4 TOETSING

Open boek tentamen voor alleen tekstboek.

De toetsing vindt plaats via een zogenaamd regulier schriftelijk tentamen, bestaande uit open vragen. Tijdens dit tentamen mag alleen het tekstboek (Michael Negnevitsky, *Artificial intelligence*) in schone vorm gebruikt worden. Reguliere schriftelijke tentamens worden op vooraf vastgestelde data driemaal per jaar regionaal gehouden op een avond van 19 tot 22 uur op of nabij elk studiecentrum.

Eindtoetsen	In het werkboek zijn twee eindtoetsen opgenomen. Deze zijn vergelijkbaar met de te verwachten tentamens. Na het bestuderen van de cursus kunt u deze gebruiken als oefening voor het tentamen, door er per eindtoets drie uur voor uit te trekken om er geconcentreerd en serieus aan te werken. Daarna kunt u aan de hand van de bijgevoegde uitwerkingen controleren hoe goed het u vergaan is.
	3 Kunstmatige Intelligentie: waarom, wat, waarvoor?
Waarom?	Veelvuldig komt de huidige informaticus problemen tegen die niet meer of niet goed met de conventionele algoritmes en methoden op te lossen zijn. De laatste decennia zijn hiervoor oplossingen gevonden. Uitgangspunt bij deze oplossingen was veelal de manier waarop de mens problemen oplost.
Wat?	De menselijke methode van aanpak bij probleemoplossen (heuristiek) is een belangrijk aspect binnen de nieuw ontwikkelde oplossingsmethoden. Enerzijds wordt de menselijke manier van redeneren als uitgangspunt genomen (Symbolische kennissystemen, Expertsystemen, Fuzzy-systemen), anderzijds worden ook biologische aspecten als uitgangspunt genomen (Neurale netwerken, Genetische algoritmen). Ten slotte worden deze methoden gecombineerd tot hybride systemen die van elke methode de sterke kanten benutten. Bijvoorbeeld: het op menselijke wijze redeneren met behulp van fuzzy logic en het lerend vermogen van neurale netwerken worden gecombineerd in fuzzy-neurale systemen.
Waarvoor?	Kunstmatige intelligentie wordt gebruikt voor classificeren, optimaliseren, patroonherkennen, regelen en sturen, voorspellen, plannen, beslissen, ontwerpen, volgen, diagnose en datamining. Bekende toepassingsgebieden zijn: in de financiële wereld beslissen ten aanzien van leningen, voorspellen van beurskoersen, bij de nutsbedrijven het voorspellen van drinkwatertoevoer, rioolwaterafvoer en energiegebruik, bij productiebedrijven voorspellen van afzet, classificeren van consumenten. Het volgen (monitoring), regelen en sturen van processen op diverse gebieden vindt op deze manier plaats. Diagnose en beslissen vinden niet alleen in de medische wetenschap plaats maar ook in vele facetten van de bedrijfsvoering. Optimalisering en het ontwerpen van systemen op basis van kennistechnologie zijn zeker geen uitzondering en worden steeds meer regel.
	4 Probleemoplossen met kunstmatige intelligentie Om te weten wat kunstmatige intelligentie is, moet eerst bekend zijn wat intelligentie is. Het woordenboek (Van Dale) geeft (daarbij wordt tevens het begrip kunstmatige intelligentie gegeven): <i>intelligentie</i> hoog verstandelijk vermogen <i>kunstmatige intelligentie</i> onderzoeksterrein waarin men met computerprogramma's het menselijk denken probeert na te bootsen Intelligentie heeft dus iets te maken met menselijk denken en verstandelijk vermogen. Veel van zijn verstand heeft de mens door ervaring moeten opdoen. Als de mens het kon leren is het misschien ook mogelijk om het een machine te leren. Het is geen enkel probleem om geautomatiseerd veel

feiten op te slaan. Redeneren met deze feiten wordt al weer wat moeilijker, maar ook dat is te automatiseren. Dit redeneren met feiten is een deelgebied van de kunstmatige intelligentie, het gebied van de kennistechnologie.

Iets meer op de toepassingen gericht zou men ook kunnen zeggen dat kunstmatige intelligentie probeert de manier waarop mensen problemen oplossen kunstmatig na te bootsen. En met kunstmatig wordt dan meestal 'met behulp van een computer' bedoeld.

Mensen zijn heel goed in het waarnemen en interpreteren van de omgeving waarin ze leven. Ze weten zich daarin staande te houden door steeds weer opdoemende problemen adequaat aan te pakken. Als we dus de manier waarop mensen leren, het adaptief vermogen van de mens en de manier van redeneren zouden kunnen namaken, zouden we over kunstmatige intelligentie kunnen spreken.

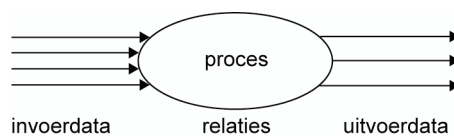
Maar waarom zouden we dat willen?

Computers zijn in staat dezelfde taken veel sneller en preciezer dan mensen uit te voeren. Mensen zijn beter in improvisatie, adaptief gedrag, complex redeneervermogen en interpretatie van het waarnemen van hun omgeving. Als we dus kans zien om ook deze laatste aspecten te automatiseren, zijn we in staat om van beide de beste eigenschappen te gebruiken en hiermee beter te zijn dan met elk afzonderlijk.

Wat we hiervoor moeten doen is dus in de eerste plaats heel goed waarnemen hoe mensen problemen aanpakken en oplossen.

4.1 PROCESMODEL ALS PROBLEEMMODEL

Processen die met behulp van informatica beheerst of uitgevoerd kunnen worden, zijn schematisch weer te geven zoals in figuur 1. Steeds onderscheiden we bij die processen gegeven invoerdata waar relaties tussen te vinden zijn die tot uitvoerdata leiden.



FIGUUR 1 Algemeen model voor een proces

Voorbeeld

Een voorbeeld is het bepalen van de oppervlakte en omtrek van een rechthoekig schilderij. De invoerdata zijn de hoogte en de breedte van een rechthoek. De verbanden (relaties) zijn dan $(\text{hoogte} \times \text{breedte})$ en $(2 \times \text{hoogte} + 2 \times \text{breedte})$, omdat de uitvoerdata het oppervlak en de omtrek zijn.

Voorbeeld

Bij een geautomatiseerd chemisch productieproces worden zeer veel fysische grootheden (invoerdata: hoeveelheden stoffen, temperaturen, drukken enzovoorts) gemeten tijdens de productie. Het proces op zich levert een eindproduct op. De kwaliteit van dit eindproduct (uitvoerdata) wordt bepaald door allerlei deelprocessen, die al dan niet gecontroleerd plaatsvinden (relaties) tussen invoerdata om uitvoerdata te produceren. Afhankelijk van de omstandigheden is er meer of minder bekend van de invoerdata, de relaties of de uitvoerdata. Bij zo'n chemisch productieproces zal nooit de volledige relatie tussen invoerdata en uitvoerdata bekend zijn, allerlei kleine toevalligheden en onbekende omstandigheden zullen daar altijd een rol in spelen.

Van proces naar
probleem

Aan het eerste voorbeeld zien we dat dit proces ook de beschrijving van de oplossing van een probleem kan zijn, namelijk het probleem "Wat zijn de oppervlakte en de omtrek van een schilderij, als de hoogte en breedte bekend zijn?" Ook het tweede voorbeeld kunnen we als een model voor een probleem opvatten door ons af te vragen: "Wat zal de kwaliteit van het product zijn bij de gegeven invoerdata?" In beide gevallen vragen we ons af wat de waarde van gedefinieerde uitvoerdata zal zijn als we de waarde van alle benodigde invoerdata en bijbehorende relaties weten.

Dit algemene model voor een proces zal in de informatica vaak gebruikt worden als model voor een probleemoplosser.

Echter, als één of meer van de gegevens (invoerdata, relaties, uitvoerdata) niet bekend of niet volledig bekend zijn, dan is de oplossing van het probleem niet meer zo eenvoudig.

Voorbeeld

Eigenlijk is de hierboven beschreven vraag "Wat zijn de oppervlakte en de omtrek van een schilderij, als de hoogte en breedte bekend zijn?" al niet op te lossen. We weten niet welke relatie we moeten gebruiken omdat er een invoerparameter ontbreekt, namelijk dat het schilderij rechthoekig is. Misschien is het wel een zeshoek. We zien dat we hier een onoplosbaar probleem hebben geformuleerd, omdat gegevens ontbreken. Het nieuwe probleem is nu: "Welke vorm heeft het schilderij?"

OPGAVE 1

Als we weten van een schilderij dat de breedte 0,6 m is, de hoogte 0,4 m, het oppervlak 0,12 m² en de omtrek 1,6 m, wat is dan de vorm? Probeer of u dit probleem op kunt lossen.

In de volgende paragraaf zullen we ons bezighouden met probleemoplossers uit de kunstmatische intelligentie. Hierbij speelt steeds de bekendheid van de begrippen invoerdata, relaties en uitvoerdata een rol.

4.2 PROBLEEMANALYSE

In tabel 1 wordt een aantal eigenschappen van de invoerdata, relaties en uitvoerdata gegeven die we in de praktijk bij diverse soorten problemen (processen) tegen kunnen komen.

TABEL 1 Mogelijk voorkomen van invoerdata, relaties en uitvoerdata

<i>invoerdata</i>	<i>relaties</i>	<i>uitvoerdata</i>
volledig of onvolledig eenduidig of tegenstrijdig exact of vaag	bekend gedeeltelijk bekend onbekend	bekend of onbekend exact of vaag te veel

Deze tabel is zeker niet volledig, maar geeft wel een indicatie van allerlei mogelijke problemen die op kunnen treden bij het oplossen van problemen die beschreven worden door het algemene procesmodel van figuur 1. Uitgaande van de mogelijkheden uit tabel 1 kunnen we vele soorten problemen onderscheiden door combinaties te maken van de verschillende soorten invoer, relaties en uitvoer. Hieronder zullen we enkele mogelijke combinaties weergeven, daaropvolgend geven we van elke combinatie ook

een voorbeeld. Deze combinaties zijn zo gekozen dat ze niet meer of zeer moeilijk met de conventionele technieken uit de informatica zijn op te lossen. Dit komt omdat bijvoorbeeld de relaties niet bekend zijn, er teveel combinaties van uitvoerdata mogelijk zijn die als oplossing kunnen dienen, of omdat de invoerdata niet exact, onvolledig of tegenstrijdig zijn. De conventionele technieken kunnen daar niet goed mee overweg. Met methoden uit de kunstmatige intelligentie lukt het oplossen vaak nog wel.

1 Exacte eenduidige volledige invoerdata *onbekende relaties* exacte bekende uitvoerdata

Voorbeeld Om te kunnen voorspellen wat er in bepaalde situaties gebeurt wil men onbekende processen waarvan alleen de invoer- en uitvoerdata bekend zijn beheersen; bijvoorbeeld zoals in het eerdergenoemde chemische productieproces.

2 Exacte tegenstrijdige onvolledige invoerdata *onbekende relaties* exacte bekende uitvoerdata

Voorbeeld Onduidelijke, onvolledige beelden kunnen herkennen; bijvoorbeeld bij automatische handschriftherkenning. De te herkennen karakters zijn bekend, maar de ingevoerde karakters (invoerdata) kunnen onduidelijk zijn en zullen vaak niet volledig overeenkomen met de bekende karakters. Toch moeten ze herkend worden als één van de bekende karakters (uitvoerdata).

3 Exacte eenduidige volledige invoerdata *onbekende relaties* onbekende uitvoerdata

Voorbeeld Indelen van verschillende gegevens, die niet van tevoren gedefinieerd zijn, in categorieën; bijvoorbeeld verschillende aangeboden patronen van elkaar onderscheiden en vastleggen, zodat ze later weer herkend kunnen worden.

4 Exacte eenduidige volledige invoerdata *onbekende relaties* te veel combinaties van exacte uitvoerdata mogelijk

Voorbeeld De beste oplossingen bepalen uit heel veel mogelijke oplossingen; bijvoorbeeld om in een voor u onbekend proces met bekende invoerwaarden, waarin vele combinaties van mogelijkheden tot een oplossing (uitvoerdata) leiden, zo snel mogelijk goede oplossingen te vinden. Bijvoorbeeld: de bedrijfsvoering optimaliseren waarbij twintig opties met elk vijf waarden uitgetest moeten worden.

OPGAVE 2

Als het berekenen van één oplossing op een computer $1 \mu\text{s}$ ($= 10^{-6}$ seconde) duurt, hoeveel jaar zal deze computer dan aan het rekenen zijn om alle mogelijke oplossingen achter elkaar uit te rekenen bij twintig opties met elk vijf waarden?

5 Vage tegenstrijdige volledige invoerdata *bekende relaties* vage uitvoerdata

Voorbeeld Bepalen van een prestatie onder verschillende, niet exact te omschrijven, enigszins tegenstrijdige omstandigheden; bijvoorbeeld de te verwachten

prestatie van een sporter. Daarbij worden regels (relaties) gebruikt met vage invoerdata en uitvoerdata zoals:
als "goede conditie" en "nogal tegenzittende omstandigheden" en "iets te licht gewicht" dan "prestatie langzaam",
maar gelijktijdig ook:
als "goede conditie" en "neutrale omstandigheden" en "iets te licht gewicht" dan "prestatie gemiddeld"

Abstraheren

*Algemene
oplossingsmethode*

In de bovenstaande voorbeelden omschreven we enigszins in algemene woorden het probleem. Daarbij gaven we ook steeds een voorbeeld. Ook dat voorbeeld was nog niet specifiek, omdat niet was omschreven welk chemisch proces, herkenningssysteem, welke patronen, bedrijfsvoering of sporter het betrof. Om nog algemener te kunnen bepalen welke probleemsoorten juist goed met kunstmatige intelligentie zijn op te lossen gaan we de voorbeelden nog algemener formuleren. We noemen dit proces *abstraheren*. We doen dit om *algemene oplossingsmethoden* te kunnen vinden die voor een hele groep van gelijksoortige problemen gebruikt kunnen worden. Op die manier komen we dan tot de volgende omschrijving voor de vijf genoemde probleemsoorten.

- 1 Procesbeheersing:
een model maken van een proces.
- 2 Herkennen:
identificeren van bekend veronderstelde vormen.
- 3 Clustering:
leren en opslaan van te onderscheiden patronen.
- 4 Snel goede oplossingen vinden:
als niet alle oplossingen beschouwd kunnen worden toch snel goede oplossingen vinden.
- 5 Menselijk redeneren:
conclusies trekken uit uitdrukkingen en redeneringen die niet exact wel of niet waar zijn.

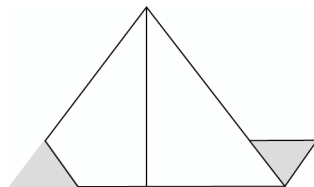
Ook deze indeling gaan we weer verder abstraheren en dan krijgen we:

- 1 Modelleren
- 2 Patroonherkennen
- 3 Classificeren
- 4 Optimaliseren
- 5 Diagnosticeren

Hiermee hebben we een aantal processen gevonden die we vaak als toepassinggebieden van kunstmatige intelligentie tegenkomen. In de afzonderlijke hoofdstukken van het tekstboek worden deze processen (problemen) met hun meest geschikte aanpak (oplossingsmethode) besproken.

TERUGKOPPELING

- 1 Als we niets over de vorm weten kunnen we dit probleem niet eenduidig oplossen, omdat er vele vormen zullen zijn die aan bepaalde combinaties van invoerdata en uitvoerdata zullen voldoen.
- Bij de gegeven afmetingen en zonder enige kennis van de vorm kunnen we dit niet oplossen. Wel kunnen we een aantal zaken uitsluiten. Omdat de breedte en de hoogte niet gelijk zijn, vallen alle vormen die daaraan voldoen (zoals bijvoorbeeld vierkanten, cirkels, regelmatige veelhoeken) af. Als we ervan uit mogen gaan dat het een rechthoek is, dan zou moeten kloppen dat $\text{lengte} \times \text{breedte} = \text{oppervlak}$ en $2 \times (\text{lengte} + \text{breedte}) = \text{omtrek}$. Het oppervlak klopt al niet, dus we kunnen ook concluderen dat het geen rechthoek is. Zo zouden we nog wat regelmatige figuren kunnen proberen. Bijvoorbeeld een rechthoekige driehoek. Daarvoor geldt dat $\text{oppervlak} = \text{breedte} \times \text{halve hoogte} = b \cdot h/2$. Dat klopt wel met de gegeven waarden want $0,12 = 0,6 \cdot 0,4/2$. Dan moeten we ook de omtrek nog controleren. Daarvoor moeten we de stelling van Pythagoras gebruiken om de schuine zijde (s) te berekenen: $s = \sqrt{h^2 + b^2} = \sqrt{0,16 + 0,36} = \sqrt{0,52} = 0,72$. Dan geldt $\text{omtrek} = h + b + s = 0,4 + 0,6 + 0,72 = 1,72$. Dat klopt dus niet. Zo kunnen we doorgaan met het uitproberen van regelmatige vormen, die we kunnen laten vervallen als ze niet voldoen. Voor een gelijkbenige driehoek geldt voor het oppervlak ook $= b \cdot h/2$, dat klopt dus ook. Dan moeten we de omtrek nog controleren. Dat is een wat moeilijker formule waarin de stelling van Pythagoras voor beide schuine zijden (s_1 en s_2): $s_1 = s_2 = \sqrt{h^2 + (b/2)^2} = \sqrt{0,16 + 0,09} = \sqrt{0,25} = 0,5$. De omtrek is dan $b + s_1 + s_2 = 0,6 + 0,5 + 0,5 = 1,6$.
- Conclusie, door een toevalstreffer: het kan een gelijkbenige driehoek zijn. Er zijn echter nog veel meer mogelijkheden. Door het verplaatsen van een gedeelte van de gelijkbenige driehoek zoals in figuur 2 is aangegeven zijn diverse andere figuren met dezelfde eigenschappen te maken. Hierbij moet er wel voor gezorgd worden dat de breedte en hoogte hetzelfde blijven.



FIGUUR 2 Gelijkbenige driehoek, waarvan een stukje is verplaatst

- 2 Met 20 opties met elk 5 waarden zijn 5^{20} verschillende combinaties van die 20 opties te maken. Eén zo'n combinatie van 20 opties levert één oplossing. De computer moet dan 5^{20} oplossingen doorrekenen. Dat duurt $5^{20} \cdot 10^{-6}$ seconde. 5^{20} is ongeveer $9,5 \cdot 10^{13}$, dus de totale rekentijd zal $9,5 \cdot 10^{13} \cdot 10^{-6} = 9,5 \cdot 10^7$ seconde zijn. Dit is $9,5 \cdot 10^7 / 3600 / 24 / 356$ jaar duren. Dat is ongeveer 3 jaar.