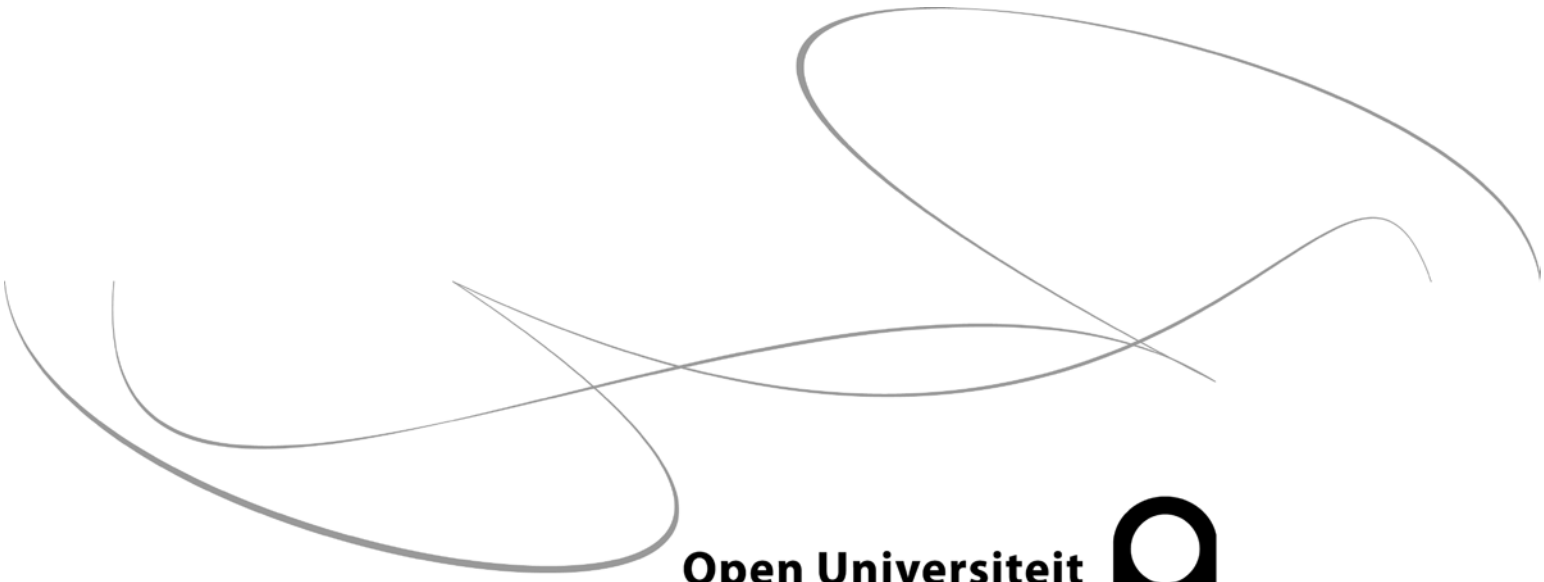
Basiskennis wiskunde voor informatica

Open Universiteit
www.ou.nl

Basiskennis wiskunde voor informatica



Open Universiteit
www.ou.nl

Open Universiteit
Faculteit Management, Science & Technology

Productie
Open Universiteit

Lay-out
Maria Wienbröker-Kampermann

Omslag
Team Visuele communicatie, Open Universiteit

Druk- en bindwerk
Canon Business Services

Dit materiaal is gelicentieerd onder de Creative Commons-licentie Naamsvermelding-NietCommercieel-GeenAfgeleideWerken 4.0. Zie de licentie voor details: https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode

This content is licensed under the Creative Commons license Attribution-Noncommercial-NoDerivs 4.0. See licence for more details: https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode

Eerste druk: 2018

BWVI_13032018

Structuur van Basiskennis wiskunde voor informatica

Leereenheid		Bladzijde
Introductie basiskennis wiskunde voor informatica		5
Diagnostische toets		7
1	Getallen en verzamelingen	13
2	Algebra	39
3	Meetkunde	53
4	Functies en grafieken	73
5	Vergelijkingen en ongelijkheden	107
6	Differentiëren	131
7	Integreren	153
Terugkoppelingen		173
Register		246

Introductie tot de basiskennis wiskunde voor informatica

Introductie *5*

Introductie tot de basiskennis wiskunde voor informatica

INTRODUCTIE

In dit boek wordt de basiskennis wiskunde behandeld die bekend wordt verondersteld als u start met de bacheloropleiding informatica van de Open Universiteit. De wiskunde in dit boek wordt ook gegeven op de middelbare school, en kan dus geen onderdeel zijn van een universitaire studie. Als u deze kennis en vaardigheden niet beheerst, dan zal het volgen van de bacheloropleiding Informatica niet goed mogelijk zijn.

We adviseren u goed na te gaan of u de basiskennis in dit boek beheerst, voordat u start met de opleiding. In ieder geval moet u deze basiskennis beheersen als u start met de cursus Lineaire algebra en stochastiek.
Om na te gaan of u de basiskennis beheerst, kunt u de diagnostische toets maken aansluitend op deze introductie. De antwoorden staan er direct na. Kunt u de toets gemakkelijk maken, dan kunt u er van uit gaan dat u, voor wat betreft wiskunde, voldoende voorbereid bent om te kunnen starten met de opleiding.
Valt het u moeilijk om de toets te maken, of mist u enkele onderwerpen, bestudeert u dan dit boek geheel of gedeeltelijk. U kunt er ook voor kiezen om elders een cursus over deze onderwerpen op dit niveau te gaan volgen.

Dit boek bevat een zevental leereenheden. Iedere leereenheid begint met een introductie en een opsomming van de leerdoelen. De studiestof staat in de leerkern. De leerkern bestaat uit tekst met uitleg, voorbeelden en toepassingen, maar u komt ook veel opgaven tegen. Maakt u de opgaven op het moment dat u ze tegenkomt. Wiskunde is een vak dat u leert door te oefenen, en dat gaat alleen als u de opgaven maakt. Door de opgaven te maken, ontdekt en ervaart u allerlei aspecten die niet tot u doordringen als u de opgaven alleen leest, of ze overslaat. Om vaardig te worden in wiskunde, moet u oefenen, net zoals bij taal (Nederlands, Engels, …) of het bespelen van een instrument. De uitwerkingen van de opgaven in de leereenheden staan achterin het boek. Daarmee kunt u nagaan of u de opgaven goed heeft gemaakt. Hou er rekening mee dat er vaak meerdere uitwerkingen mogelijk zijn om tot het goede antwoord te komen.

Iedere leereenheid wordt afgesloten met een samenvatting en een zelftoets. Met de zelftoets kunt u nagaan of u de inhoud van de leereenheid voldoende beheerst. Ook hier geldt: als u de zelftoets goed kunt maken, gaat u dan verder met dit boek. Als het u moeite kost, bestudeer dan opnieuw de betreffende onderdelen van de leereenheid. Raadpleeg eventueel ook andere boeken of bronnen op het internet.

CC BY NC ND

Diagnostische toets

1 Gegeven zijn de verzamelingen $V = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ is een drievoud en } 0 < x \leq 30\}$ en $W = \{x \mid x \text{ is een priemgetal en } x < 30\}$.
a Geef de expliciete definities van V en W.
b Bepaal $V \cap W$, $V \cup W$ en $V \setminus W$.

2 Bepaal de grootste gemene deler en het kleinste gemene veelvoud van 45 en 72.

3 Geef op een getallenlijn de verzameling $V = \{-2 \leq x \leq 0 \text{ of } x > 2\}$ weer.

4 Werk uit en schrijf zo eenvoudig mogelijk:

a $\frac{4^2 \cdot 4^0}{6} - 2 \cdot 15^{-1} =$

b $\sqrt[3]{54} =$

c ${}^6\log 4 + {}^6\log 9 =$

d $\sum_{i=0}^{3} (\frac{1}{2})^i =$

5 Ontbind in factoren:
a $2x^2 - 12x =$
b $x^2 - 8x + 15 =$
c $x^2 - 900 =$

6 Schrijf als één breuk: $\frac{2x}{x-1} + \frac{1}{x^2 - x} =$

7 Schrijf in zo eenvoudig mogelijke vorm: $\sqrt{x^2 - 6x + 9} =$

8 Een rechthoekige driehoek heeft rechthoekszijden met lengtes 5 en 12.
a Wat is de lengte van de hypotenusa?
b Wat is de oppervlakte van de driehoek?
c Wat zijn de waardes van de sinus, cosinus en tangens van de scherpste hoek van de driehoek?

9 Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 + x$ en $g(x) = x^2 - 3$.
a Schets de grafieken van de functies.
b Wat is het domein en wat is het bereik van de functie f?
c Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken.

BY NC ND

10 Voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt: $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$?

11 Gegeven is een functie met de vergelijking: $y = \sqrt{3 - x^2}$.
a Wat is het domein van deze functie?
b Toon aan dat de functie gelijk is aan zijn inverse.

12 Bepaal de oplossingen van:
a $x^2 + 3x - 5 = 0$
b $\sqrt{2 - x^2} - 1 = 0$
c $2^{x^2-4x} = \frac{1}{8}$

13 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 4x$.
a Bepaal de afgeleide van $f(x)$.
b Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van $f(x)$ in het punt $(1, f(1))$.

14 Bepaal de afgeleiden van:
a $f(x) = x^2 \cdot \sin x$
b $g(x) = \sqrt{x^2 - 2}$
c $h(x) = \dfrac{x-1}{2x}$
d $f(x) = e^{2x}$
e $g(x) = {}^{10}\log(x^2 + 2)$

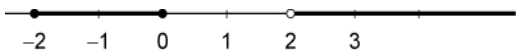
15 Bepaal de primitieven van:
a $f(x) = x^2 + 2x$
b $g(x) = \sin(3x)$

16 Bepaal de volgende integralen:
a $\int_0^3 (-x^2 + 4x)\,dx =$
b $\int_0^\infty e^{-2x}\,dx =$

Antwoorden diagnostische toets

1 **a** $V = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$, $W = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$.
b $V \cap W = \{3\}$, $V \cup W = \{2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 21, 23, 24, 27, 30\}$, $V \setminus W = \{6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$.

2 ggd(45, 72) = 9, kgv(45, 72) = 360

3 

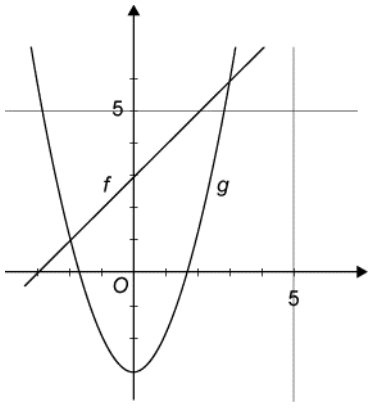
4 **a** $\frac{38}{15}$
b $3\sqrt[3]{2}$
c 2
d $\frac{15}{8}$

5 **a** $2x(x-6)$
b $(x-3)(x-5)$
c $(x-30)(x+30)$

6 $\frac{2x^2+1}{x^2-x}$

7 $(x-3)$

8 **a** 13
b 30
c $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\tan\alpha = \frac{5}{12}$

9 **a**


b $D_f = B_f = \mathbb{R}$
c (–2, 1), (3, 6)

10 $x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$ of $x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$

11 **a** $D = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

12 **a** $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$

b $x = \pm 1$

c $x = 1$ of $x = 3$

13 **a** $f'(x) = -2x + 4$

b $y = 2x + 1$

14 **a** $f'(x) = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$

b $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}}$

c $h'(x) = \frac{1}{2x^2}$

d $f'(x) = 2e^{2x}$

e $g'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 2)\ln 10}$

15 **a** $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$

b $G(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x)$

16 **a** 9

b $\frac{1}{2}$

Getallen en verzamelingen

Introductie *13*

Leerkern *14*

1 Verzamelingen *14*
2 Natuurlijke en gehele getallen *17*
3 Rationale getallen *20*
4 Reële getallen *22*
5 Complexe getallen *25*
6 Bewerkingen op getallen *26*
  6.1 Machtsverheffen *26*
  6.2 Worteltrekken *29*
  6.3 Logaritmen *30*
7 Rijen en sommen *32*

Samenvatting *35*

Zelftoets *36*

Leereenheid 1

Getallen en verzamelingen

INTRODUCTIE

Getallen spelen een uiterst belangrijke rol in onze wereld. We tellen en rekenen ermee, we leggen er de prijs van producten en diensten mee vast, we wisselen er informatie mee uit, en in essentie werken computers ook alleen maar met getallen.
Maar wat zijn getallen nu eigenlijk precies, hoe kunnen we ermee rekenen, wat voor soort getallen kunnen we onderscheiden en waar kunnen we ze wel en niet voor gebruiken?

In deze leereenheid gaan we nader in op getallen, en om er makkelijk over te kunnen spreken, gaan we ook in op verzamelingen. Enerzijds kijken we daarbij naar het gebruik en toepassingen, maar anderzijds zullen we ook op wat formelere wijze getallen en verzamelingen definiëren, zodat we precies vastleggen waar we het over hebben en wat we ermee kunnen.

Om alvast een motivering te geven waarom we deze benadering kiezen, kijken we naar het beveiligen van berichten die over het internet verstuurd worden. Beveiligen van internetverkeer is nodig als we elektronisch willen bankieren, en er dan zeker van willen zijn dat niemand kan inbreken op onze bankrekening. Hierbij spelen bepaalde getallen een bijzondere rol, namelijk priemgetallen. Priemgetallen zijn getallen die alleen door zichzelf en 1 deelbaar zijn, zoals 2, 3, 5 en 7.
De getallen 4 en 6 zijn geen priemgetal, want ze zijn deelbaar door 2.
Bij de beveiliging van het verzenden van berichten over het internet, worden grote priemgetallen gebruikt, met wel meer dan 100 cijfers.
Bij die beveiliging wordt gebruik gemaakt van de bijzondere eigenschap dat het vermenigvuldigen van grote priemgetallen relatief makkelijk is, maar dat het vrijwel onmogelijk is, om de oorspronkelijke priemgetallen terug te vinden, als alleen het resultaat (het product) van de vermenigvuldiging bekend is.

In hoofdlijnen werkt de beveiliging als volgt. Een bericht dat verstuurd moet worden, wordt omgezet in een groot getal door aan iedere letter, getal of leesteken cijfers toe te kennen en die achter elkaar te zetten. Met dat grote getal wordt een berekening uitgevoerd waarbij gebruik wordt gemaakt van het product van twee priemgetallen, en het resultaat van de berekening wordt verstuurd. De ontvanger kan het oorspronkelijke getal terugvinden door opnieuw een berekening uit te voeren. Maar daar zijn de afzonderlijke priemgetallen voor nodig. Dus zolang de ontvanger de afzonderlijke priemgetallen geheim houdt, kunnen er veilig berichten naar hem gestuurd worden, waarbij de verzender alleen het product van de twee priemgetallen hoeft te kennen. Omdat uit het product de afzonderlijke priemgetallen niet zijn te achterhalen, is het systeem veilig.

BY NC ND

Zonder dat we het weten, wordt vaak als we beveiligde informatie over het internet versturen van deze bijzondere getallen en hun eigenschappen gebruik gemaakt. De wereld, zeker de informatiewereld, is gebouwd op getallen.

LEERDOELEN
Na het bestuderen van deze leereenheid wordt verwacht dat u
- weet wat verzamelingen en elementen zijn
- impliciete en expliciete definities van verzamelingen kunt geven
- de verzamelingen kent van natuurlijke, gehele, rationale en reële getallen, en weet waarin deze verzamelingen verschillen
- basisberekeningen met getallen kent en kunt uitvoeren, zoals optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen, worteltrekken en logaritme nemen
- de definities kent van priemgetallen, priemfactoren, grootste gemene deler en kleinste gemene veelvoud en deze kunt bepalen.

LEERKERN

1 Verzamelingen

Getallen gebruiken we om te tellen, om aantallen mee weer te geven en te rekenen. Als we getallen gebruiken om te tellen, dan tellen we 'iets', bijvoorbeeld het aantal berichten in de inbox van ons e-mailprogramma.

Verzameling

Dat 'iets' is een *verzameling*, een aantal onderscheidbare dingen die we gezamenlijk beschouwen. De onderscheidbare dingen noemen we *elementen*. Het begrip 'verzameling' is heel fundamenteel in de wiskunde, en via het aantal elementen van een verzameling is er de relatie met de getallen. We geven een paar voorbeelden, waarbij we tegelijkertijd enige notatie invoeren.

Element

VOORBEELD 1.1

De letters in ons alfabet zijn: a, b, c, …., x, y, z. Als we ze als verzameling willen weergeven, dan schrijven we ze tussen accolades:

{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z}

We kunnen deze verzameling een naam geven, bijvoorbeeld A. Dan geldt:

A = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z}

Als we aan willen geven dat het element a tot de verzameling A behoort, dan noteren we:

$a \in A$

Uitspraak

We spreken dit uit als 'a is een element van A'. «

Opmerking: we geven het einde van een voorbeeld aan met de twee haakjes in de rechterkantlijn.

VOORBEELD 1.2

Een andere verzameling bestaat uit de cijfers die we gebruiken om getallen mee weer te geven: 0, 1, 2, …, 9. Als we deze verzameling C noemen, dan geldt:

$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ «

Het aantal voorbeelden van verzamelingen is onuitputtelijk: voetbalplaatjes, oude auto's, Europese landen, sportverenigingen, enzovoort. In een verzameling herhalen we eenzelfde element niet tweemaal, en als we de elementen in een andere volgorde tussen de accolades zetten, dan blijft het toch dezelfde verzameling. We geven nog twee voorbeelden van verzamelingen binnen de wiskunde:
– We noemen E de verzameling van even getallen, tussen 1 en 20:
$E = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
– Priemgetallen zijn getallen die alleen door zichzelf en 1 deelbaar zijn. We noemen P de verzameling priemgetallen kleiner dan 30:
$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$
Voor het element 4 geldt nu: $4 \in E$, maar ook: $4 \notin P$. Met dit laatste geven we dus aan dat 4 niet tot de verzameling P behoort.

Het aantal elementen in een verzameling kunnen we tellen, en geven we weer door twee strepen rond de naam van de verzameling te zetten:

$|A| = 26$
$|C| = 10$

Uitspraak

We spreken dit uit als: 'het aantal elementen van A is 26'.

OPGAVE 1.1

We gaan gooien met twee dobbelstenen en tellen bij iedere worp het aantal ogen van de twee stenen samen. W is de verzameling met de aantallen ogen die we kunnen gooien.
a Wat zijn de elementen van W?
b Wat is $|W|$?

OPGAVE 1.2

O is de verzameling oneven getallen, groter dan 0, kleiner dan 16.
a Wat zijn de elementen van O?
b Wat is $|O|$?

Vereniging

Als we twee verzamelingen samenvoegen, dan krijgen we een nieuwe verzameling, die we de *vereniging* van twee verzamelingen noemen. Bij het samenvoegen herhalen we een zelfde element niet tweemaal. We noteren de vereniging van de verzamelingen E en P die we hiervoor hebben geïntroduceerd als volgt:

$E \cup P = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 23, 29\}$

Uitspraak

Spreek uit: 'E verenigd met P is …'.

Doorsnede

Als we alleen de elementen samen nemen die zowel in de ene als in de andere verzameling zitten, dan noemen we deze nieuwe verzameling de *doorsnede*, die we als volgt noteren:

$E \cap C = \{2, 4, 6, 8\}$

Uitspraak

Spreek uit: 'E doorsneden met C is …' of 'de doorsnijding van E met C is …'.

Verschil

Als we bepaalde elementen uit een verzameling willen verwijderen, dan nemen we het *verschil*. We gaan dan uit van een verzameling, en halen daar de elementen uit als die in de andere verzameling voor komen:

$P \setminus C = \{11, 13, 17, 19, 23, 29\}$

Uitspraak

Spreek uit: 'het verschil van P en C is …' of kortweg 'P min C is …'.

Lege verzameling

Er zit geen enkel element in de doorsnede van de verzamelingen A en C. We zeggen dat de doorsnede 'leeg' is. Het resultaat is dus 'de *lege verzameling*', ofwel een verzameling met 0 elementen, die we noteren met $\varnothing$. Dus:

$A \cap C = \varnothing \quad \text{en} \quad |\varnothing| = 0 \quad \text{en} \quad \varnothing = \{\,\}$

OPGAVE 1.3

We werken verder met de verzamelingen W en O uit opgaven 1.1 en 1.2.

a Bepaal $W \cup O$.
b Bepaal $W \cap O$.
c Bepaal $W \setminus O$.
d Bepaal $O \setminus W$.

Expliciete definitie

Tot nu toe hebben we verzamelingen weergegeven, door steeds alle elementen tussen accolades te schrijven. We noemen dat de *expliciete definitie* van die verzamelingen. Dat lukt alleen als er niet al te veel elementen tot de verzameling behoren. Maar er bestaat ook een andere manier om verzamelingen te definiëren: de *impliciete definitie*, waarbij we een beschrijving geven van de elementen:

Impliciete definitie

$E = \{x \mid x \text{ is een even getal tussen 1 en 20}\}$

Variabele

We introduceren hier de *variabele* 'x', waarvan we na de streep aangeven aan welke voorwaarde ze moet voldoen om tot de verzameling te behoren. Voor x kunnen we van alles invullen, maar alleen als aan de voorwaarde wordt voldaan, behoort dat element tot de verzameling. We hebben hier x als naam van de variabele gebruikt, maar we zullen ook andere letters gebruiken: y, a, b, n, m, p, q, … Een *variabele* staat dus voor een bepaalde waarde, alleen weten we nog niet welke.
We kunnen hiermee nu ook grotere verzamelingen definiëren, zelfs als ze oneindig veel elementen hebben.

$K = \{x \mid x \text{ is een kwadraat}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$

Oneindig

We kunnen steeds grotere kwadraten vinden, en *oneindig* lang doorgaan. Er zijn dus oneindig veel kwadraten, ofwel de verzameling K bevat oneindig veel elementen. Dat noteren we als volgt:

$|K| = \infty$

OPGAVE 1.4

a Geef de expliciete definitie van de verzameling
$P = \{p \mid p \text{ is een provincie in Nederland}\}$.
b Geef een impliciete definitie van de verzameling {3, 9, 27, 81, …}.
c Geef een impliciete definitie van de verzameling {5, 10, 15, 20, …}.

2 Natuurlijke en gehele getallen

Natuurlijke getallen

Het aantal elementen van een verzameling kan gelijk zijn aan 0, 1, 2, 3, … Met deze getallen tellen we aantallen. We noemen deze getallen de *natuurlijke getallen*, die we weergeven $\mathbb{N}$. Dus:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} \quad \text{en} \quad |\mathbb{N}| = \infty$$

Met de puntjes geven we aan dat we altijd maar door kunnen gaan, er is altijd een volgend natuurlijk getal. Er zijn oneindig veel natuurlijke getallen. Ook 0 is een natuurlijk getal. Het aantal elementen van de lege verzameling is immers 0. Als we de verzameling van natuurlijke getallen groter dan 0 willen aangeven, dan schrijven we $\mathbb{N}^+$, dus $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

We kunnen optellen en vermenigvuldigen met natuurlijke getallen. Het resultaat is opnieuw een natuurlijk getal. Met optellen en vermenigvuldigen blijven we dus in $\mathbb{N}$. Ook met machtsverheffen, wat eigenlijk herhaald vermenigvuldigen is blijven we in $\mathbb{N}$.
As we getallen van elkaar aftrekken dan behoort het resultaat soms wel, maar soms ook niet tot $\mathbb{N}$: $5 - 2 \in \mathbb{N}$, maar $2 - 5 \notin \mathbb{N}$. We kunnen alle negatieve getallen toevoegen aan $\mathbb{N}$, zodat het resultaat van een aftrekking wel altijd binnen de verzameling blijft. De verzameling die we dan krijgen noemen we de *gehele getallen* en geven we weer met $\mathbb{Z}$:

Gehele getallen

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Als we twee gehele getallen op elkaar delen, dan is het resultaat soms ook weer een geheel getal, maar soms ook niet: $12/3 = 4 \in \mathbb{Z}$, maar 12/5 heeft als resultaat niet een geheel getal. We kunnen de verzameling met natuurlijke (of beter nog de verzameling met gehele getallen) verder uitbreiden, door alle breuken erbij te nemen. We krijgen dan de *rationale getallen*. Daar gaan we in de volgende paragraaf verder op in.

Rationale getallen

Afronden

We kunnen bij het delen ook gaan *afronden*, zodat we altijd weer op een geheel getal uitkomen. In het dagelijks leven wordt het meest afgerond door af te ronden naar het dichtstbij gelegen gehele getal. Dat betekent dat we een getal naar boven afronden, als het deel achter de komma groter of gelijk is aan 0,5; en anders ronden we af naar beneden. Dus 4,7 en 4,5 ronden we af naar 5 en 4,4 ronden we af naar 4.
Er is ook een andere manier van afronden die veel in de wiskunde wordt gebruikt. We ronden daarvoor alle getallen tussen twee gehele getallen naar beneden of naar boven af. Als we 2,4 of 2,7 naar beneden afronden, dan is het resultaat 2; ronden we naar boven af, dan krijgen we 3. Bij afronden naar beneden vinden we dus het grootste gehele getal dat kleiner dan, of gelijk aan de breuk is. En op dezelfde manier vinden we bij afronden naar boven het kleinste gehele getal dat groter dan of gelijk aan de breuk is.

Floor
Ceiling

Deze afrondingen heten *floor* en *ceiling*, en noteren we als volgt:

$\lfloor 12/5 \rfloor = 2$
$\lceil 12/5 \rceil = 3$

Als we een negatieve breuk naar beneden afronden, moeten we daarvoor het grootste gehele getal kiezen, dat kleiner dan of gelijk aan de breuk is. En als we naar boven afronden, dan kiezen we, net als bij positieve getallen, het kleinste gehele getal, groter dan of gelijk aan de breuk. Dus:

$\lfloor -5/3 \rfloor = -2$
$\lceil -5/3 \rceil = -1$

OPGAVE 1.5
Bereken:
a $\lfloor 21/4 \rfloor$
b $\lceil -21/4 \rceil$
c $\lceil 1/5 \rceil$
d $\lfloor 1/-5 \rfloor$
e $\lfloor 15/-5 \rfloor$
f $\lceil 10/5 \rceil$

We beperken ons nu weer even tot de situatie waarin het resultaat van een deling van twee natuurlijke getallen weer een natuurlijk getal oplevert.

Omdat $12 = 3 \cdot 4$ noemen we de natuurlijke getallen 3 en 4 delers van 12. Een definitie van het begrip deler is:

Deler

DEFINITIE 1.1

Het getal $a \in \mathbb{N}$ is een *deler* van $n \in \mathbb{N}$, als er een $b \in \mathbb{N}$ is, zodat $a \cdot b = n$.

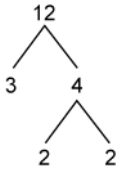
Met deze definitie kunnen we nagaan wat de delers van 12 zijn. We hebben 3 en 4 al gevonden, maar ook 2 en 6 zijn delers van 12, en ook 1 en 12 zijn delers van 12, immers $1 \cdot 12 = 12$. Dit laatste geldt voor ieder getal. Dus ieder getal, ongelijk aan 1, heeft minstens twee delers: 1 en zichzelf. Als we met $D(12)$ de verzameling van de delers van 12 aangeven, dan geldt dus:

$D(12) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ is een deler van } 12\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Als we een getal als product van delers schrijven, dan kunnen we kijken of die delers zelf nog weer delers hebben. Dat kunnen we herhalen, net zolang tot we de delers niet verder op kunnen delen (afgezien van de deler 1):

$12 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 2$

Priemgetal
Priemfactor



Het resultaat is dat we het getal geschreven hebben als product van *priemgetallen*: priemgetallen zijn getallen die alleen deelbaar zijn door 1 en zichzelf. We hebben het getal ontbonden in *priemfactoren*. Ieder getal is op precies één manier te schrijven als product van priemfactoren (afgezien van de volgorde van de vermenigvuldiging). De priemgetallen zijn hiermee als het ware de basisbouwstenen van alle natuurlijke getallen.

OPGAVE 1.6

a Schrijf de volgende getallen als producten van priemfactoren: 15, 16, 17, 18.

b Bepaal $D(15)$, $D(16)$, $D(17)$ en $D(18)$, de verzamelingen delers van respectievelijk 15, 16, 17 en 18.

Veelvoud

In plaats van in $\mathbb{N}$ naar de delers van een getal te kijken, kunnen we ook de andere kant op redeneren en naar de *veelvouden* kijken. We krijgen de veelvouden van een getal door het getal te vermenigvuldigen met een natuurlijk getal. De veelvouden van 12 zijn, 24, 36, 48, … maar ook 12 noemen we een veelvoud van 12, immers $12 = 1 \cdot 12$, en ook $0 = 0 \cdot 12$ noemen we een veelvoud van 12.

$V = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ is een veelvoud van } 12\} = \{0, 12, 24, 36, \ldots\}$

In de wiskunde maken we veel gebruik van delers en veelvouden van twee getallen, onder andere als we willen weten wat de grootste gemene deler of het kleinste gemene veelvoud is van twee getallen.

Grootste gemene deler

DEFINITIE 1.2

De *grootste gemene deler* van twee natuurlijke getallen a en b is het grootste natuurlijke getal, dat zowel deler is van a, als van b. Het is de grootste deler die a en b gemeen hebben. We noteren die met ggd(a, b).

De delers van 36 zijn 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 en 36. De delers van 45 zijn 1, 3, 5, 9, 15 en 45. De grootste gemene deler van 36 en 45 is dus 9, ofwel ggd(36, 45) = 9.

Kleinste gemene veelvoud

DEFINITIE 1.3

Het *kleinste gemene veelvoud* van twee natuurlijke getallen a en b is het kleinste natuurlijke getal dat zowel a als b als deler heeft. We noteren het met kgv(a, b).

Om het kleinste gemene veelvoud van twee getallen te vinden, kijken we naar de veelvouden groter dan nul van die getallen, en zoeken we naar de kleinste daarvan, die in beide verzamelingen voorkomt.
De veelvouden van 6 groter dan 0 zijn: 6, 12, 18, 24, 30, 36, … De veelvouden van 15 groter dan 0 zijn: 15, 30, 45, … Het kleinste gemene veelvoud van 6 en 15 is dus 30, ofwel kgv(6, 15) = 30.

OPGAVE 1.7

a Bepaal ggd(15, 18). Gebruik daarbij het resultaat van opgave 1.6b.

b Bepaal kgv(15, 18).

Hiervoor hebben we de ggd en het kgv gevonden door naar de delers en veelvouden te kijken en daar de grootste, respectievelijk de kleinste van te bepalen. Maar er is ook een andere manier om de ggd en het kgv van twee getallen te bepalen. Daartoe schrijven we de twee getallen als product van machten van priemgetallen. We laten dit zien aan de hand van een voorbeeld.

VOORBEELD 1.3

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ en $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$.

De ggd vinden we door te kijken welke priemfactoren in beide producten voorkomen, en daar dan steeds de laagste exponent bij te nemen.

ggd(60, 70) = $2 \cdot 5 = 10$

Het kgv vinden we door een product te maken, waarin alle priemfactoren voorkomen, en daar steeds de hoogste exponent bij te nemen.

$\text{kgv}(60, 70) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$ «

OPGAVE 1.8
Bepaal ggd(60, 70) en kgv(60, 70), door de delers en veelvouden van 60 en 70 te bepalen en daar de grootste en de kleinste in te zoeken. Verifieer dat dit hetzelfde resultaat geeft als in voorbeeld 1.3.

OPGAVE 1.9
Bepaal ggd(675, 2940) en kgv(675, 2940) met de aanpak uit voorbeeld 1.3.

OPGAVE 1.10
Hoe kan uit de priemontbinding van een getal het aantal delers van dat getal worden bepaald? Geef hiervoor de algemene regel, en laat zien dat die klopt voor het getal 72.

OPGAVE 1.11
Perfect getal
Een getal wordt een *perfect getal* genoemd, als het gelijk is aan de som van zijn delers (waarbij het getal zelf wordt uitgezonderd). Zo is 6 een perfect getal: 6 = 1 + 2 + 3.
Ga na dat 28 ook een perfect getal is.

3 Rationale getallen

Als we in $\mathbb{Z}$, de verzameling gehele getallen, delingen uitvoeren, dan is het resultaat niet altijd opnieuw een element van die verzameling: $-\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$. We breiden de verzameling $\mathbb{Z}$ daarom uit, zodat het resultaat van een deling wel tot dezelfde verzameling behoort. We moeten dus alle *breuken* aan $\mathbb{Z}$ toevoegen. Overigens, delen door 0 staan we niet toe. De nieuwe verzameling is de verzameling van *rationale getallen*, en noteren we met $\mathbb{Q}$.

Breuken
Rationale getallen

$$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \text{ en } q \neq 0\}$$

Let op: we spreken van 'rationaal', niet van 'rationeel'.
De volgende elementen behoren dus bijvoorbeeld tot $\mathbb{Q}$: $\frac{2}{3}$, $-\frac{7}{5}$. Het getal boven de breukstreep is de *teller*, het getal eronder is de *noemer*. Veel breuken hebben eenzelfde waarde: $\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$. We zullen binnen $\mathbb{Q}$ breuken met eenzelfde waarde, als hetzelfde element beschouwen en we kiezen als notatie de meest eenvoudige vorm, waarin teller en noemer geen gemeenschappelijke factoren hebben, en een eventueel minteken voor de breuk wordt genoteerd. De breuken $\frac{2}{-4}$ en $\frac{-1}{2}$ geven dus hetzelfde element weer, en we kiezen dus als notatie voor dat rationale getal niet $\frac{2}{-4}$, maar $-\frac{1}{2}$. En als de noemer 1 is, dan laten we die weg: $\frac{3}{1}$ schrijven we gewoon als 3. Getallen als 3, –3 en 0 zijn dus ook rationale getallen.

Teller
Noemer

Als er geen risico is voor onduidelijkheid, dan worden de 'gehelen' soms voor de breuk gezet: $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$. Dit wordt ook wel een *samengestelde breuk* genoemd.

Samengestelde breuk

Als we rationale getallen bij elkaar optellen, van elkaar aftrekken, met elkaar vermenigvuldigen of op elkaar delen dan is het resultaat steeds weer een rationaal getal (waarbij we niet door 0 delen). We geven een paar voorbeelden van deze bewerkingen, waarbij we onder andere het kgv gebruiken om breuken gelijknamig te maken, zodat we ze kunnen optellen of aftrekken. De regels die we daarbij toepassen zijn:
– Als we twee breuken bij elkaar op willen tellen, of van elkaar af willen trekken, dan moeten we ze eerst gelijknamig maken, waarmee ze dezelfde noemer krijgen; de nieuwe noemer is het kleinste gemene veelvoud van de twee oorspronkelijke noemers.
– Twee gelijknamige breuken tellen we bij elkaar op, of trekken we van elkaar af, door de noemer gelijk te houden en de tellers bij elkaar op, respectievelijk van elkaar af te trekken.
– Twee breuken vermenigvuldigen we met elkaar door tellers en noemers te vermenigvuldigen.
– Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde.
– Een breuk vereenvoudigen we door gemeenschappelijke factoren in teller en noemer tegen elkaar weg te strepen.

VOORBEELD 1.4

$$\frac{1}{6}+\frac{7}{15}=\frac{5}{30}+\frac{14}{30}=\frac{19}{30}$$
$$\frac{2}{3}-\frac{5}{7}=\frac{14}{21}-\frac{15}{21}=-\frac{1}{21}$$
$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 8}=\frac{\cancel{2}\cdot 5}{3\cdot\cancel{2}\cdot 4}=\frac{5}{3\cdot 4}=\frac{5}{12}$$
$$\frac{6}{7}/\frac{15}{4}=\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{15}=\frac{6\cdot 4}{7\cdot 15}=\frac{2\cdot\cancel{3}\cdot 4}{7\cdot\cancel{3}\cdot 5}=\frac{2\cdot 4}{7\cdot 5}=\frac{8}{35}$$

«

OPGAVE 1.12

Voer de volgende berekeningen uit, en schrijf het resultaat als breuk in de meest eenvoudige vorm.

a $\frac{5}{9}+\frac{11}{15}=$

b $\frac{8}{25}-\frac{13}{15}=$

c $\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{28}=$

d $\frac{13}{10}/\frac{7}{15}=$

e $\frac{21}{31}/\frac{7}{2}=$

f $-\frac{1}{3}\cdot-\frac{3}{7}=$

g $\frac{48}{85}-\frac{25}{51}=$

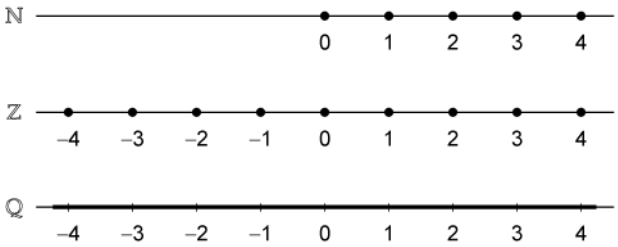
Breuken kunnen we ook op decimale wijze weergeven: $\frac{3}{8} = 0{,}375$. De decimale schrijfwijze vinden we door een staartdeling uit te voeren, of met een rekenmachine. Ook de decimale schrijfwijze geeft hetzelfde element van de verzameling rationale getallen weer. Voor $\frac{3}{8}$ geldt dat dit exact gelijk is aan 0,375. Maar voor $\frac{1}{3}$ is het lastiger. Want als we $\frac{1}{3}$ als decimaal getal willen schrijven, dan volgt $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ en moeten we eigenlijk oneindig veel decimalen opschrijven. Breuken waarbij dit voorkomt (één of meer decimalen komen dan steeds opnieuw voor), noemen we *repeterende breuken*.

Repeterende breuk

OPGAVE 1.13
Schrijf 17/7 als repeterende breuk.

Tot nu toe hebben we de verzamelingen natuurlijke, gehele en rationale getallen bekeken. We kunnen het onderscheid tussen die verzamelingen aanschouwelijk maken, door de verzamelingen op de *getallenlijn* weer te geven.

Getallenlijn



FIGUUR 1.1 De verzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ op de getallenlijn

De natuurlijke getallen zijn allemaal geheel en groter of gelijk aan 0. Bij de gehele getallen komen daar ook de negatieve getallen bij; we geven ze weer met stippen op de getallenlijn. En met rationale getallen komen er de tussenliggende getallen bij; we geven dat 'dik' weer op de getallenlijn. Op een klein stukje van de getallenlijn liggen oneindig veel rationale getallen. Immers, als we twee verschillende rationale getallen nemen, dan kunnen we daar altijd een getal tussen vinden, door ze bij elkaar op te tellen en het resultaat door twee te delen.
Met de rationale getallen lijkt het dus of we alle getallen op de getallenlijn hebben. Dat is echter niet zo, zoals in de volgende paragraaf zal blijken.

4 Reële getallen

Er zijn getallen op de getallenlijn die niet rationaal zijn; een voorbeeld daarvan is $\sqrt{2}$, de wortel van 2, ofwel het getal dat gekwadrateerd 2 oplevert. Dit feit dat wortel 2 geen rationaal getal is, is zo belangrijk dat we het apart als stelling hieronder vermelden. En we geven ook het bewijs van die stelling.

STELLING 1.1 $\sqrt{2}$ is geen rationaal getal.

Bewijs
We bewijzen deze stelling door aan te nemen dat $\sqrt{2}$ wel een rationaal getal is, en vervolgens te laten zien dat dit niet kan kloppen.
Stel dus dat $\sqrt{2}$ wel een rationaal getal is. Dan zou moeten gelden:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Hierin zouden p en q gehele getallen moeten zijn. Als linker- en rechterlid gelijk zijn, dan zijn ook de kwadraten van linker- en rechterlid gelijk. We kwadrateren het linker- en rechterlid en werken het resultaat enigszins om:

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$
$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$
$$p^2 = 2 \cdot q^2$$

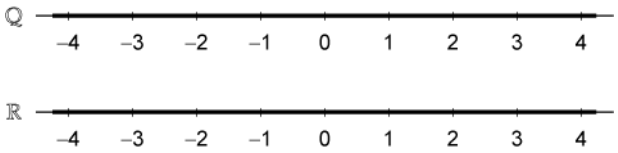
We gaan nu naar de laatste gelijkheid kijken. In deze gelijkheid stellen p^2 en $2q^2$ getallen voor, die aan elkaar gelijk zouden moeten zijn. We kijken nu eerst naar het gehele getal q. We kunnen q schrijven als een product van priemfactoren. Omdat we q met zichzelf vermenigvuldigen, zullen in q^2 alle priemfactoren een even aantal keren voor komen. Voor q^2 staat nog één keer een factor 2, zodat in het rechterlid een getal staat waar een oneven aantal keren de factor 2 in voor komt.
In p^2 in het linkerlid komt de factor 2 een even aantal keren voor, immers p wordt met zichzelf vermenigvuldigd, zodat alle factoren een dubbel aantal keren voorkomt.
Maar we komen nu in de situatie aan, dat er links van het gelijkteken een getal staat met een even aantal factoren 2, en rechts een getal met een oneven aantal factoren 2. Die twee kunnen nooit aan elkaar gelijk zijn.
Het uitgangspunt dat $\sqrt{2}$ te schrijven is als rationaal getal moet dus onjuist zijn.
Hiermee is het bewijs geleverd dat $\sqrt{2}$ geen rationaal getal is. □

Opmerking 1: we geven het einde van het bewijs aan met een blokje in de rechterkantlijn. Daar worden ook wel andere aanduidingen voor gebruikt, zoals 'q.e.d.' (quod erat demonstrandum; dit betekent: wat bewezen moest worden).
Opmerking 2: een bewijs volgens bovenstaande opzet (neem iets aan, en bewijs dat dit niet kan), wordt een bewijs uit het ongerijmde genoemd.

Naast $\sqrt{2}$ zijn er nog meer getallen die niet rationaal zijn, bijvoorbeeld andere wortels, maar ook het getal π dat gelijk is aan de oppervlakte van een cirkel met straal 1. Verderop zullen we nog meer van dergelijke getallen tegenkomen. Als we ons realiseren dat ook alle veelvouden van $\sqrt{2}$ en andere wortels en veelvouden van π niet rationaal zijn, dan kunnen we concluderen dat er oneindig veel getallen zijn die niet rationaal zijn.
De getallenlijn leek met $\mathbb{Q}$ helemaal gevuld, maar dat is dus helemaal niet het geval.

Reële getallen

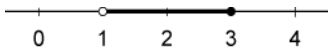
Voegen we aan $\mathbb{Q}$ de ontbrekende getallen toe, dan krijgen we de verzameling *reële getallen*, die we weergeven met $\mathbb{R}$.
Als we nu de getallenlijn met de reële getallen tekenen, dan zullen we hetzelfde tekenen als met de rationale getallen. Als het relevant is, zullen we toe moeten lichten welke verzameling we bedoelen. Als er geen toelichting is, dan bedoelen we in het algemeen de verzameling $\mathbb{R}$, de ruimste verzameling met getallen die we meestal gebruiken.



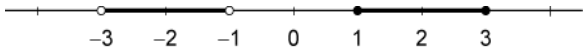
FIGUUR 1.2 De verzamelingen $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ op de getallenlijn

Interval

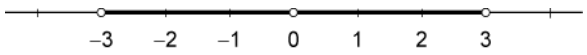
Als we een deel van de verzameling reële getallen willen beschouwen, dan kunnen we die weergeven op de getallenlijn, met een impliciete definitie, of als *intervallen*. We geven een paar voorbeelden.



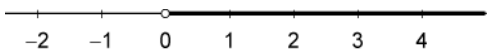
FIGUUR 1.3 Verzameling: $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 3\}$; interval: $\langle 1, 3]$



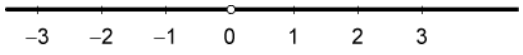
FIGUUR 1.4 Verzameling: $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -1 \text{ of } 1 \leq x \leq 3\}$; interval: $\langle -3, -1\rangle \cup [1, 3]$



FIGUUR 1.5 Verzameling: $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3 \text{ en } x \neq 0\}$; interval: $\langle -3, 0\rangle \cup \langle 0, 3\rangle$



FIGUUR 1.6 Verzameling: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$; interval: $\langle 0, \infty\rangle$ of $\langle 0, \rightarrow\rangle$

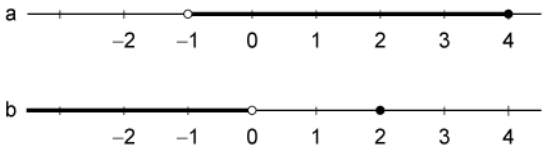


FIGUUR 1.7 Verzameling: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; interval: $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle$ of $\langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$

Let op hoe we zowel in de plaatjes als in de impliciete definities als bij de intervallen aangeven of een element op de grens van een interval, wel of niet tot de verzameling hoort. In de plaatjes doen we dat met open of gesloten rondjes, in de verzamelingennotaties door de symbolen 'groter dan' (>), 'kleiner dan' (<), of 'groter of gelijk aan' (≥) en 'kleiner of gelijk aan' (≤) te gebruiken en in de intervalnotaties door open haken $\langle$, $\rangle$ of gesloten haken [,] te gebruiken.

OPGAVE 1.14
Teken getallenlijnen met daarop de verzamelingen:
a $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0 \text{ of } 2 \leq x \leq 4\}$
b $\langle -1, 0] \cup [1, \infty\rangle$

OPGAVE 1.15
Geef de impliciete definities van de verzamelingen, weergegeven in de volgende getallenlijnen. Geef ook de intervalnotatie



FIGUUR 1.8

5 Complexe getallen

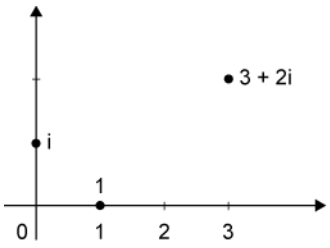
We hebben de getalverzamelingen die we in deze leereenheid hebben bekeken steeds uitgebreid, van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{Z}$ naar $\mathbb{Q}$ naar $\mathbb{R}$, omdat we 'ontdekten' dat er bewerkingen waren die ons buiten de verzameling brachten, waarmee we begonnen. Bij het aftrekken van natuurlijke getallen konden we negatieve getallen krijgen, daarom breidden we de verzameling uit tot de gehele getallen. De wortel van 2 bleek geen rationaal getal te zijn en daarom breidden we $\mathbb{Q}$ uit naar $\mathbb{R}$.
Zijn er na $\mathbb{R}$ verder nog uitbreidingen mogelijk, of hebben we met $\mathbb{R}$ alle mogelijke getallen te pakken? Het blijkt inderdaad zo te zijn dat we nog meer 'getallen' kunnen definiëren. Als we namelijk in $\mathbb{R}$ op zoek gaan naar de wortel van –1, dan is er geen getal in $\mathbb{R}$ dat daarvoor in aanmerking komt. Immers de wortel van –1 zou het getal moeten zijn, dat gekwadrateerd –1 oplevert. Maar ieder reëel getal dat we kwadrateren, of het nu positief of negatief is, levert een positief getal op. Als er een wortel van –1 is, dan is dat dus geen reëel getal. Als we willen kunnen werken met de wortel van –1, dan zullen we opnieuw een uitbreiding moeten maken van de getallenverzameling.

Complexe getallen

We komen dan bij de *complexe getallen*, een verzameling die wordt weergegeven met $\mathbb{C}$.
In $\mathbb{C}$ komt een getal voor dat gekwadrateerd –1 geeft. Dit getal wordt weergeven met i. Dus:

$i^2 = -1$

Complexe getallen kunnen we niet meer op de getallenlijn tekenen; een complex getal bestaat in het algemeen uit een reëel en een complex deel. We geven ze weer in het 'complexe vlak'. De reële getallen (met een complex deel gelijk aan 0) liggen daarbij op de horizontale as, het getal i ligt op de verticale as, en het vlak is verder gevuld met de complexe getallen.



FIGUUR 1.9 Complexe vlak met de getallen 1, i en 3 + 2i

De complexe getallen blijken uitermate goed te gebruiken te zijn in grote deelgebieden van de wiskunde, en kennen toepassingen in vele onderwerpen, binnen en buiten de wiskunde. Elektromagnetische verschijnselen laten zich er bijvoorbeeld goed mee beschrijven.
We zullen in dit boek geen gebruik maken van de complexe getallen, maar ons beperken tot de reële getallen. We wilden ze hier wel noemen, om recht te doen aan het grote belang ervan. Wellicht dat u de complexe getallen ook tegenkomt als u gebruik maakt van een computeralgebra-pakket.

6 Bewerkingen op getallen

Hiervoor hebben we al diverse berekeningen met getallen uitgevoerd. Getallen kunnen we optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Steeds nemen we twee getallen, we voeren een bewerking uit en het resultaat is weer een getal.
We besteden nu aandacht aan de bewerkingen machtsverheffen, worteltrekken en logaritme nemen.

6.1 MACHTSVERHEFFEN

Machtsverheffen

Machtsverheffen is het herhaald met zichzelf vermenigvuldigen van een getal.

$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$
$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

In dit voorbeeld is 5 het grondtal, en 2 en 3 zijn de exponenten of machten (spreek uit: 'vijf tot de tweede' en 'vijf tot de derde'). Als de exponent 2 is, dan nemen we de tweede macht van 5, en dat noemen we ook wel 'kwadrateren'.
Als het grondtal negatief is, dan zal de uitkomst positief zijn, als de exponent even is, en de uitkomst zal negatief zijn als de exponent oneven is.

$(-5)^2 = -5 \cdot -5 = 25$
$(-5)^3 = -5 \cdot -5 \cdot -5 = -125$

Uit de definitie van machten volgen direct enkele rekenregels.

$5^2 \cdot 5^3 = (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5$
$(5^2)^3 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 5^6$

Als het grondtal van twee machten hetzelfde is, en we vermenigvuldigen deze twee machten, dan is het resultaat een macht met hetzelfde grondtal, en als exponent de som van de exponenten. En als we een macht tot een macht verheffen, dan moeten we de exponenten vermenigvuldigen, ofwel:

$5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5$
$(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$

Als het grondtal een product (of quotiënt) is van twee factoren, dan is de macht gelijk aan het product (of quotiënt) van de machten van de factoren:

$15^2 = (3 \cdot 5)^2 = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5^2$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3^2}{5^2}$$

Met het vermenigvuldigen van machten komen er dus steeds factoren bij. Als we gaan delen, dan wordt het aantal factoren minder:

$$\frac{5^5}{5^3} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5} = 5 \cdot 5 = 5^2$$

Bij delen van machten, trekken we de exponenten dus van elkaar af, ofwel:

$5^5/5^3 = 5^{5-3} = 5^2$

Hieruit kunnen we ook afleiden wat de betekenis is van een macht als de exponent 0 is.

$$5^0 = 5^{3-3} = \frac{5^3}{5^3} = 1$$

Als de exponent 0 is, dan is de macht gelijk aan 1, wat het grondtal ook is.
En vervolgens kunnen we ook nagaan wat de betekenis is van een macht als de exponent negatief is.

$$5^{-3} = 5^{0-3} = \frac{5^0}{5^3} = \frac{1}{5^3}$$

Is de exponent in een machtsverheffing negatief, dan is dat gelijk aan een breuk, met in de teller 1, en in de noemer de macht, maar dan met de positieve exponent.
Als het grondtal 0 is, dan wordt 0 een aantal keren met zichzelf vermenigvuldigd, en het resultaat zal dus altijd weer 0 zijn.

$0^4 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

Het bijzondere geval 0^0 geven we als waarde 1.
We kunnen nu dus machten uitrekenen, als de grondtallen reëel zijn, en de exponenten geheel. We geven nog enkele voorbeelden, waarbij we ook variabelen gebruiken:

VOORBEELD 1.5

$$5,2^{-2} = \frac{1}{5,2^2} = \frac{1}{27,04}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27} = 2\frac{10}{27}$$

$$(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{-125} = \frac{-1}{125}$$

$$x^3 \cdot x^3 = x^{3+3} = x^6$$

$$y^x \cdot y^x = y^{x+x} = y^{2x}$$

$$x^{-7} = \frac{1}{x^7}$$

$$(2xy)^3 = 2^3 x^3 y^3 = 8x^3 y^3$$

«

We vatten de rekenregels die we hiervoor aan de hand van voorbeelden hebben laten zien als volgt samen:

Rekenregels voor machten met $a, b \in \mathbb{R}$ en $m, n \in \mathbb{Z}$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(a / b)^n = a^n / b^n$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$a^0 = 1$$

$0^m = 0$, met $m \neq 0$

Deze rekenregels gelden als a en b reële getallen, en m en n gehele getallen zijn.

OPGAVE 1.16
Werk uit en schrijf zo eenvoudig mogelijk:

a $(-5)^{11}/5^9 =$

b $7^{-3} \cdot (-7)^2 =$

c $((81)^2)^3 \cdot 81^{-5} =$

d $(\frac{4}{3})^4 \cdot (-\frac{3}{4})^5 =$

e $2^{-6} =$

f $4^0 =$

g $0^5 =$

h $0^0 =$

6.2 WORTELTREKKEN

Welke betekenis heeft een macht, als de exponent niet een geheel getal is? Wat is bijvoorbeeld de waarde van $5^{\frac{1}{2}}$?
Als we de rekenregels voor machten toepassen, dan moet gelden:

$$5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 5^1 = 5$$

Wortel

De waarde van $5^{\frac{1}{2}}$ is dus gelijk aan het getal, dat met zichzelf vermenigvuldigd gelijk is aan 5. Dat noemen we ook de *wortel* van 5 en schrijven we ook als $\sqrt{5}$... De waarde van de wortel van 5 benaderen we met een rekenmachine.

$$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} = 2,2360679774...$$

Net als wortel 2 is dit geen rationaal getal. Er is een oneindig aantal decimalen, waar geen herhaling in zit.
Voor een nauwkeurige benadering van een wortel, gebruiken we een rekenmachine. Zonder rekenmachine is vaak wel een schatting te geven. Wortel 5 is groter dan 2, want 2 in het kwadraat is 4, en dat is kleiner dan 5. En wortel 5 is kleiner dan 3, want 3 in het kwadraat is 9, en dat is groter dan 5.
De derdemachtswortel van een getal, is het getal dat als het tot de derde macht wordt verheven het oorspronkelijke getal oplevert:

$$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5} = 1,7099759466...$$

We zien nu ook dat machten met gebroken exponenten en wortels hetzelfde zijn, waar we twee notaties voor gebruiken:

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

We kunnen nu desgewenst de notaties in elkaar omzetten:

$$\sqrt[7]{125} = \sqrt[7]{5^3} = (5^3)^{\frac{1}{7}} = 5^{\frac{3}{7}}$$

$$5^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{5^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{5 \cdot 5^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{5 \cdot (5^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[3]{25}}$$

Als we de wortels schrijven als machten, met als exponenten rationale getallen dan gelden daarvoor dezelfde rekenregels als aan het einde van de vorige subparagraaf staan. Echter, de rekenregels gaan alleen op, als de grondtallen positief zijn.

cc BY NC ND

OPGAVE 1.17
Werk onderstaande uitdrukkingen uit naar vormen, waar alleen gehele positieve machten en (hogeremachts) wortels in voorkomen:

a $3^{\frac{7}{5}} =$

b $7^{-\frac{3}{5}} =$

c $\dfrac{3^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{1}{4}}} =$

d $\dfrac{7^{-2}}{7^{-\frac{5}{3}}} =$

OPGAVE 1.18
Schat tussen welke gehele getallen de wortels uit 11, 85 en 150 liggen.

OPGAVE 1.19
Herschrijf de volgende wortels tot machten met rationale exponenten.

a $\sqrt{x^3} =$

b $\sqrt[5]{x^2} =$

c $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} =$

6.3 LOGARITMEN

In de vorige paragraaf gingen we op zoek naar wortels, de getallen die tot een zekere macht verheven een gewenst resultaat geven. We kunnen ons ook afvragen tot welke macht we een bepaald grondtal moeten verheffen, om een gewenst resultaat te krijgen. Bijvoorbeeld, tot welke macht moeten we 2 verheffen om 64 te krijgen? Even proberen leert dat $2^6 = 64$. We noemen 6 de *logaritme* van 64 bij grondtal 2, en we noteren: $^2\log 64 = 6$. De relatie tussen logaritmen en machten is dus:

Logaritme

$^2\log 64 = 6$, want $2^6 = 64$

In algemene termen geven we dit weer met:

$^a\log x = y \quad \text{als} \quad a^y = x$

Logaritmen bestaan als a en x groter zijn dan 0 en $a \neq 1$. We geven nog enkele voorbeelden:

$^2\log 8 = 3$	want $2^3 = 8$
$^2\log(\frac{1}{4}) = -2$	want $2^{-2} = \frac{1}{4}$
$^2\log 2 = 1$	want $2^1 = 2$
$^{10}\log 100 = 2$	want $10^2 = 100$
$^{10}\log 1 = 0$	want $10^0 = 1$
$^{10}\log 0$	bestaat niet, want er is geen enkele y, zodat $10^y = 0$

In bovenstaande voorbeelden kregen we steeds mooie uitkomsten, zodat we de waarden ook echt konden bepalen. Net als bij wortels zullen we vaak een rekenmachine moeten gebruiken, om de waarde van een logaritme te benaderen; en die waarde is vaak weer een niet-rationaal getal:

$^{10}\log 5 = 0{,}698970\ldots$

Combineren we de twee formules $^{a}\log x = y$ en $a^{y} = x$, dan volgt:

$$a^{{}^{a}\log x} = x$$

Hiermee kunnen we enkele rekenregels voor logaritmen afleiden.

Omdat geldt:

$$a^{{}^{a}\log x + {}^{a}\log y} = a^{{}^{a}\log x} \cdot a^{{}^{a}\log y} = x \cdot y = a^{{}^{a}\log xy}$$

volgt dat de exponenten in de eerste en laatste formule gelijk zijn. Daaruit leiden we de volgende rekenregel af:

Optellen van logaritmen

$$^{a}\log x + {}^{a}\log y = {}^{a}\log xy$$

Op soortgelijke wijze volgen:

Aftrekken en vermenigvuldigen met een constante

$$^{a}\log x - {}^{a}\log y = {}^{a}\log\left(\tfrac{x}{y}\right)$$

$$y \cdot {}^{a}\log x = {}^{a}\log x^{y}$$

Als laatste geven we nog de volgende rekenregel, waarmee we kunnen veranderen van grondtal:

Veranderen van grondtal

$$^{a}\log x = \frac{^{b}\log x}{^{b}\log a}$$

We kunnen de correctheid van deze rekenregel aantonen, door hem op de volgende manier uit te werken:

$$^{a}\log x = \frac{^{b}\log x}{^{b}\log a}$$

$$^{b}\log a \cdot {}^{a}\log x = {}^{b}\log x$$

$$b^{{}^{b}\log a \cdot {}^{a}\log x} = b^{{}^{b}\log x}$$

$$\left(b^{{}^{b}\log a}\right)^{{}^{a}\log x} = x$$

$$a^{{}^{a}\log x} = x$$

$$x = x$$

Het laatste resultaat is waar, waarmee aangetoond is dat de rekenregel correct is.
We gebruiken de rekenregels in enkele voorbeelden:

VOORBEELD 1.6

$$^5\log 25 = {}^5\log 5 + {}^5\log 5 = 1 + 1 = 2$$
$$^7\log(\tfrac{1}{49}) = {}^7\log 1 - {}^7\log 49 = 0 - 2 = -2$$
$$^{10}\log 10\,000 = {}^{10}\log 10^4 = 4 \cdot {}^{10}\log 10 = 4 \cdot 1 = 4$$
$$^7\log 3 = \frac{^{10}\log 3}{^{10}\log 7}$$

«

Natuurlijke logaritme

Als de uitkomsten niet zo mooi zijn als in bovenstaande voorbeelden, dan kunnen logaritmen met een rekenmachine berekend worden. Meestal is daar de toets of functie 'log' voor. Als er geen grondtal bij staat vermeld, dan is dat altijd 10. Vaak ook is er een toets 'ln'. Dat is de *natuurlijke logaritme* met grondtal e. Het bijzondere getal e komen we verderop nog tegen.

OPGAVE 1.20

Bereken zonder gebruik te maken van een rekenmachine:

a $^{14}\log 4 + {}^{14}\log 49 =$

b $^5\log\frac{1}{125} =$

c $\frac{^7\log 100}{^7\log 10} =$

d $^2\log 24 - {}^2\log 6 =$

OPGAVE 1.21

Bereken met een rekenmachine, en geef als reëel getal:

a $^{10}\log 4 =$

b $^{10}\log 25{,}3 =$

c $^4\log 7 =$

d $^6\log 31 =$

OPGAVE 1.22

Leidt af dat geldt:

a $^a\log(\frac{x}{y}) = {}^a\log x - {}^a\log y$

b $^a\log x^y = y \cdot {}^a\log x$

7 Rijen en sommen

Naast verzamelingen met getallen bekijken we soms ook rijen van getallen. Het verschil is dat bij een verzameling de volgorde van de elementen er niet toe doet, maar bij rijen juist wel. Zo is de rij

0, 1, 4, 9, 16, 25, …

de rij van de kwadraten van de natuurlijke getallen.

Een rij kunnen we ook aangeven met een letter, bijvoorbeeld: $a = 0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ Let er op dat we hier dus geen accolades bij schrijven. De verschillende elementen in een rij kunnen we aanduiden door gebruik te maken van indices: a_0 is het eerste element in de rij, dus in de rij a geldt: $a_0 = 0$. En verder zijn dan $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_4 = 16$, en $a_5 = 25$, enzovoorts. We beginnen hier met de index 0, maar soms wordt ook begonnen met index 1. Het is afhankelijk van de situatie wat het handigst is.
Voor de rij a kunnen we een formule geven voor de waarde van ieder element in de rij. Voor het element a_i in de rij a geldt: $a_i = i^2$. De index i kan hier ieder natuurlijk getal zijn.

OPGAVE 1.23
Wat zijn de waarden van a_6 en a_{10} in de rij a?

OPGAVE 1.24
Gegeven is de rij b en voor de elementen b_i van de rij b geldt: $b_i = i + 4$.
Wat zijn de waarden van b_0, b_1, b_2, b_6 en b_{10} in de rij b?

Rijen kunnen gedefinieerd worden op bovenstaande wijze, door de elementen op te schrijven of door een formule te geven waarmee voor iedere i de waarde van het i-de element berekend kan worden. Maar er is ook een andere veel voorkomende manier om rijen te definiëren. Daarbij wordt de waarde van het i-de element berekend, als de waarde van de voorganger bekend is.

VOORBEELD 1.7

Stel dat in een rij ieder volgend element 2 meer is dan het voorgaande, dan geldt in die rij: $a_{i+1} = a_i + 2$. Als bovendien de waarde van het eerste element bekend is, dan kunnen achtereenvolgens alle waarden van de rij berekend worden. Als in dit voorbeeld geldt
$a_0 = 1$, dan volgen:
$a_1 = a_0 + 2 = 1 + 2 = 3$
$a_2 = a_1 + 2 = 3 + 2 = 5$
$a_3 = a_2 + 2 = 5 + 2 = 7$
… «

De definitie zoals in voorbeeld 1.7 wordt een recursieve definitie genoemd.

Er zijn talloze verschillende rijen. Sommige rijen die een bepaalde structuur hebben komen vaak voor. We noemen er twee.

Rekenkundige rij

In de rij in voorbeeld 1.7 is het verschil tussen twee opeenvolgende elementen steeds een vaste waarde. Dergelijke rijen worden *rekenkundige rijen* genoemd. Als van een rekenkundige rij de waarden van het eerste element en het verschil van twee opeenvolgende elementen bekend is, dan zijn daarmee de waarden van alle elementen van de rij gedefinieerd. Als we de berekeningen in voorbeeld 1.7 voortzetten, dan kunnen we daarmee alle elementen van de rij a berekenen.
Willen we toch een formule voor een willekeurig element a_i hebben, dan kan dat ook. Immers, om de waarde van a_i te berekenen hebben we i keer 2 opgeteld bij de startwaarde 1, dus $a_i = 1 + i \cdot 2$.

OPGAVE 1.25

Gegeven is de rij b en $b_{i+1} = b_i + 3$. Verder is gegeven $b_0 = -5$.

a Bereken de waarden van b_1, b_2, b_3 en b_4.

b Bepaal een formule waarmee rechtstreeks ieder element b_i van de rij berekend kan worden.

c Bepaal de waarde van b_8.

Een tweede voorbeeld van veel voorkomende rijen zijn de rijen waarin een volgend element berekend kan worden door het voorgaande met een vaste factor te vermenigvuldigen.

VOORBEELD 1.8

Stel dat ieder volgend element 2 keer zo groot is dan het voorgaande, dan geldt: $a_{i+1} = 2 \cdot a_i$. Als de waarde van het eerste element bekend is, dan kunnen achtereenvolgens alle waarden van de rij berekend worden. Als in dit voorbeeld geldt $a_0 = 1$, dan volgen:

$a_1 = 2 \cdot a_0 = 2 \cdot 1 = 2$

$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 2 = 4$

$a_3 = 2 \cdot a_2 = 2 \cdot 4 = 8$

…

«

Meetkundige rij

Rijen van dit type worden *meetkundige rijen* genoemd. De factor waarmee steeds een volgende term wordt berekend heet de reden van de rij en wordt vaak met r aangegeven. Voor meetkundige rijen geldt dus: $a_{i+1} = r \cdot a_i$. Als de startwaarde a_0 bekend is kunnen alle termen worden berekend.

Ook hier is het mogelijk om een formule op te stellen om direct de waarde van een element a_i te bepalen. Immers om bij a_i aan te komen, is er i keer met de reden r vermenigvuldigd, zodat direct volgt: $a_i = r^i \cdot a_0$.

OPGAVE 1.26

Gegeven is de meetkundige rij b met $b_0 = 4$ en reden $r = \frac{1}{2}$.

a Bereken de waarden van b_1, b_2, b_3 en b_4.

b Bepaal een formule waarmee rechtstreeks ieder element b_i van de rij berekend kan worden.

c Bepaal de waarde van b_8.

Soms willen we de waarden van de eerste elementen van een rij bij elkaar optellen. We bepalen dan de som van die elementen. Daarvoor gebruiken we een speciale notatie. Als we de eerste vijf elementen van de rij $a = 0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ bij elkaar op gaan tellen, dan zijn dat dus de elementen a_0 tot en met a_4. We noteren dat als volgt:

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \sum_{i=0}^{4} a_i$$

Deze notatie wordt de som-notatie genoemd. Het speciale teken in het rechterlid is het sigma-teken en het betekent dat we een som van elementen in een rij nemen. De som gaat over de elementen a_i, waarbij we starten met het element a_0 (daarom staat er onder het sigma-teken $i = 0$) en alle elementen meenemen tot en met a_4 (daarom staat er boven het sigma-teken een 4). De i is de index of indexvariabele en doorloopt in de som dus de waarden 0 tot en met 4.

De uitdrukking in het rechterlid wordt als volgt uitgesproken: “de som over a i voor i is 0 tot 4”.

Voor deze rij geldt dus:

$$\sum_{i=0}^{4} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 + 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

Als we in een som niet beginnen met het element a_0, maar met a_1 dan noteren we onder het sigma-teken: $i = 1$.

OPGAVE 1.27

Bepaal voor de rij b van opgave 1.26 de volgende sommen:

a $\sum_{i=0}^{3} b_i$

b $\sum_{i=1}^{4} b_i$

In de formules met de sommen hebben we hiervoor steeds i als indexvariabele gebruikt. Maar daar kunnen ook andere variabelen voor gebruikt worden, bijvoorbeeld j, of k, of wat er in de betreffende situatie maar goed passend is. Zo zijn onderstaande sommen van de eerste n elementen van een rij a verschillende notaties voor dezelfde som.

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i = \sum_{j=0}^{n-1} b_j$$

Let op: om de eerste n elementen te nemen moeten we sommeren van 0 tot en met $n - 1$. De indexvariabelen i en j hebben alleen een functie binnen de som en hebben daarbuiten geen betekenis. Ze worden dan ook wel *dummyvariabelen* genoemd.

Dummyvariabele

SAMENVATTING

Getallen en verzamelingen zijn de basiselementen van de wiskunde. Elementen kunnen we samen nemen in een verzameling. Twee verzamelingen kunnen we samenvoegen tot een nieuwe verzameling, die we de vereniging noemen. De doorsnede van twee verzamelingen bestaat uit de elementen die zowel in de ene als in de andere verzameling voorkomen. Het verschil van twee verzamelingen A en B bevat de elementen van A voor zover die niet in B voorkomen.
De verzameling natuurlijke getallen $\mathbb{N}$, bevat de getallen waarmee we aantallen tellen: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Breiden we de verzameling uit met de negatieve getallen, dan krijgen we de verzameling gehele getallen $\mathbb{Z}$. Verdere uitbreiding met breuken geeft de verzameling rationale getallen $\mathbb{Q}$ en als we daar ook nog wortels en andere niet rationale getallen aan toevoegen, dan hebben we de verzameling reële getallen $\mathbb{R}$.
Gehele getallen kunnen we schrijven als product van hun priemfactoren. Het grootste gehele getal dat deler is van twee getallen, is de grootste gemene deler. Het kleinste gemene veelvoud van twee getallen is het kleinste gehele getal dat zowel veelvoud is van het ene als het andere getal.

Op getallen kunnen we bewerkingen uitvoeren: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen, worteltrekken en logaritme nemen. Rekenregels voor machten en logaritmen die daarbij gelden zijn:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$a^m : a^n = a^{m-n}$$
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$
$$(a / b)^n = a^n / b^n$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$
$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$
$$a^0 = 1$$
$$0^m = 0, \text{met } m \neq 0$$
$$a^{{}^a\log x} = x$$
$${}^a\log x + {}^a\log y = {}^a\log xy$$
$${}^a\log x - {}^a\log y = {}^a\log(\tfrac{x}{y})$$
$$y \cdot {}^a\log x = {}^a\log x^y$$
$${}^a\log x = \frac{{}^b\log x}{{}^b\log a}$$

Bij rijen is de volgorde van de elementen van belang. In $a = a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ is a_0 het eerste element. De som S van de eerste n elementen wordt weergegeven met:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$

ZELFTOETS

1 a Geef van de getallen 8, –6, 0, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{7}$, $2^{\frac{1}{3}}$ en ${}^{10}\log 5$ aan tot welke van de verzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ ze behoren.
b Geef de volgende verzameling weer op de getallenlijn:
$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2 \text{ of } x \geq 4\}$.

2 a Bepaal de grootste gemene deler en het kleinste gemene veelvoud van 24 en 30.
b Bereken het product van 24 en 30 en het product van hun grootste gemene deler en kleinste gemene veelvoud. Waarom zijn deze gelijk?

3 Schrijf zo eenvoudig mogelijk (waarbij we $x > 0$ veronderstellen):

a $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{5}{4}} \cdot x^{-\frac{3}{4}}} =$

b $\sqrt{2x^2 - \sqrt[3]{x^6}} =$

c ${}^x\log\left(x^2 \cdot (2x - x)^{-1}\right) =$

4 Bereken met een rekenmachine:
   a $\sqrt[3]{2345} =$
   b ${}^{10}\log 2345 =$
   c ${}^{3}\log 2345 =$

5 Bewijs door gebruik te maken van $a^{{}^{a}\log x} = x$ dat geldt:
${}^{a}\log(p \cdot q) = {}^{a}\log p + {}^{a}\log q$

CC BY NC ND

Algebra

Introductie *39*

Leerkern *40*

1 Eigenschappen van algebraïsche bewerkingen *40*
2 Ontbinden in factoren *42*
3 Merkwaardige producten *44*
4 Breuken met variabelen *45*
5 Machten met variabelen *47*
6 Wortels met variabelen *48*
7 Logaritmen met variabelen *49*

Samenvatting *50*

Zelftoets *51*

Leereenheid 2

Algebra

INTRODUCTIE

In de vorige leereenheid hebben we getallen geïntroduceerd en we hebben er bewerkingen mee uitgevoerd. De bewerkingen met getallen hebben allerlei eigenschappen waar we bij berekeningen gebruik van zullen maken. Daarbij is het van belang te weten wanneer eigenschappen wel gelden, maar ook wanneer dit niet het geval is. Zo maakt het niet uit in welke volgorde we twee getallen bij elkaar optellen, maar als we twee getallen van elkaar aftrekken, dan maakt het wel degelijk uit welk getal voorop staat.

$2 + 4 = 4 + 2$
$2 - 4 \neq 4 - 2$

Om in het algemeen over bewerkingen met getallen te kunnen spreken moeten we los komen van de concrete getallen, we moeten er van abstraheren. We werken daarom met variabelen, weergegeven door letters. Die stellen wel getallen voor, maar we weten (nog) niet welke.

Door met variabelen te werken, kunnen we in het algemeen allerlei eigenschappen van de bewerkingen onderzoeken en vastleggen. En we kunnen 'algemeen geldige uitspraken' doen die voor alle getallen die we bekijken gelden. We hebben dat in de vorige leereenheid ook al enigszins gedaan (bij de eigenschappen van machten en logaritmen), en we gaan daar hier verder op in.

De leerstof in deze leereenheid is in essentie middelbareschoolstof. We behandelen deze stof hier opnieuw, omdat het voor het vervolg absoluut noodzakelijk is dat u deze stof vlot beheerst. Vergewist u zich daarvan, en oefen desnoods net zo lang tot u alles goed in de vingers heeft. Overigens, als u de stof al wel beheerst, zal deze leereenheid u weinig moeite kosten. Maakt u desgewenst eerst de zelftoets om na te gaan of u deze leerstof al zo goed beheerst dat u deze leereenheid kunt overslaan.

LEERDOELEN

Na het bestuderen van deze leereenheid wordt verwacht dat u

- de eigenschappen van de algebraïsche bewerkingen kent en toe kunt passen
- wiskundige uitdrukkingen met variabelen in factoren kunt ontbinden
- de merkwaardige producten kunt herkennen en kunt gebruiken
- kunt werken met breuken, wortels en logaritmen waarin variabelen voorkomen
- kunt bepalen voor welke waarden van de variabelen breuken, wortels en logaritmen zijn gedefinieerd.

LEERKERN

1 Eigenschappen van algebraïsche bewerkingen

In de vorige leereenheid hebben we het begrip variabele al geïntroduceerd. Als we met getallen willen werken, maar we willen ons niet vastleggen op concrete getallen, of we kennen er de waarden niet van, dan schrijven we letters, bijvoorbeeld x, of y, of a, of b, net wat we plezierig vinden. Zo'n variabele stelt dus een willekeurig getal voor. Dat is bijvoorbeeld handig als we eigenschappen van bewerkingen op getallen in zijn algemeenheid willen formuleren, of willen werken met getallen waarvan we de waarde nog niet kennen.
Stel bijvoorbeeld dat we de waarde van een getal niet kennen. We noemen daarom dat getal x. En stel nu dat we twee keer die waarde, bij nog eens drie keer op willen tellen. Dan krijgen we dus vijf keer die waarde. Dat kunnen we dan op de volgende wijze schrijven:

$$2 \cdot x + 3 \cdot x = 5 \cdot x$$

Welk getal we nu ook voor x invullen, deze formule is altijd waar. Daarmee formuleren we dus eigenschappen van de getallen die altijd gelden. In dit geval hadden we twee termen, $2 \cdot x$ en $3 \cdot x$, die we 'gelijknamig' noemen, en die we samen hebben genomen met als resultaat $5 \cdot x$.
Hieronder formuleren we de belangrijkste eigenschappen die gelden voor de reële getallen, en we vermelden de naam van die eigenschap erbij:

$x + y = y + x$	commutativiteit van optellen
$x \cdot y = y \cdot x$	commutativiteit van vermenigvuldigen
$x + (y + z) = (x + y) + z$	associativiteit van optellen
$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	associativiteit van vermenigvuldigen
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	distributiviteit van vermenigvuldigen over optellen
$x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$	distributiviteit van vermenigvuldigen over aftrekken

De eerste twee eigenschappen geven weer dat het er niet toe doet in welke volgorde we getallen bij elkaar optellen of met elkaar vermenigvuldigen. Dat geldt niet voor alle bewerkingen, immers in het algemeen geldt niet: $x - y = y - x$, of $x/y = y/x$. Aftrekken en delen zijn dus niet commutatief.
Overigens: in de uitdrukkingen hierboven staat steeds de punt '$\cdot$' als we vermenigvuldigen; vaak laten we die weg, dus $x \cdot y = xy$, en ook $4 \cdot x = 4x$. Alleen bij het vermenigvuldigen van twee concrete getallen, of bij gelijke variabelen schrijven we wel een punt, dus bijvoorbeeld $4 \cdot 2$ en $x \cdot x$.
Als er in een uitdrukking haakjes staan, dan betekent dit dat we eerst de bewerkingen die tussen de haakjes staan uitvoeren, voordat we met het resultaat daarvan verder gaan werken. De derde en vierde eigenschap geven dus weer dat het bij het optellen en vermenigvuldigen van drie getallen niet uitmaakt in welke volgorde je dat doet. Ook hier geldt weer dat dat voor de andere bewerkingen niet het geval is.

De laatste twee eigenschappen geven de distributiviteit van de vermenigvuldiging over de optelling, respectievelijk de aftrekking weer. U kunt met enkele concrete getallen makkelijk nagaan en begrijpen dat deze eigenschappen inderdaad kloppen voor de reële getallen.
Omdat de vermenigvuldiging commutatief is, gelden ook:

$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$
$(y - z) \cdot x = y \cdot x - z \cdot x.$

We gebruikten deze eigenschap hiervoor al toen we $2x$ en $3x$ bij elkaar op wilden tellen: $2x + 3x = 5x$.

Als er geen haakjes staan, dan hanteren we prioriteitsregels voor het uitvoeren van bewerkingen: machtsverheffen en logaritme nemen gaan voor vermenigvuldigen en delen; en die gaan weer voor optellen en aftrekken.
Optellen en aftrekken hebben een gelijke prioriteit. Als er in een uitdrukking geen haakjes staan, dan voeren we de bewerkingen uit, in de volgorde waarin we ze van links naar rechts tegen komen. Hetzelfde geldt voor vermenigvuldigen en delen.

We geven hieronder een aantal voorbeelden, hoe we met bovenstaande eigenschappen en regels, en die uit de voorgaande leereenheid, uitdrukkingen kunnen vereenvoudigen of herschrijven.

$2 \cdot a + b \cdot 3 + a \cdot 4 = 2a + 3b + 4a = 2a + 4a + 3b = (2 + 4)a + 3b = 6a + 3b$

$2 \cdot (x + y) + 2 \cdot (x - y) = 2x + 2y + 2x - 2y = 2x + 2x + 2y - 2y = 4x$

$x^2 \cdot x^3 + 4x^4 \cdot x = x^5 + 4x^5 = 1x^5 + 4x^5 = (1 + 4)x^5 = 5x^5$

$(a + b) \cdot (x + y) = a \cdot (x + y) + b \cdot (x + y) = ax + ay + bx + by$

In het laatste voorbeeld hebben we systematisch de hiervoor vermelde eigenschappen gebruikt, en zijn we in twee stappen tot het resultaat gekomen. Het vermenigvuldigen van twee factoren die elk bestaan uit twee termen, komt zo vaak voor, dat het handig is dat direct in één keer te kunnen doen. De eerste term uit de eerste factor, wordt daartoe afzonderlijk met de termen uit de tweede factor vermenigvuldigd, en daarna gebeurt het zelfde met de tweede term uit de eerste factor. Het resultaat schrijven we dan direct als:

$(a + b) \cdot (x + y) = ax + ay + bx + by$

We passen dat toe in het volgende voorbeeld:

$$\begin{aligned}(2x + y) \cdot (x - 3y) &= 2x \cdot x + 2x \cdot (-3y) + y \cdot x + y \cdot (-3y) \\ &= 2x^2 - 6xy + xy - 3y^2 \\ &= 2x^2 - 5xy - 3y^2\end{aligned}$$

Het werken met negatieve getallen en het minteken vereist extra aandacht. We geven hier ook weer een paar voorbeelden van.

$-2 \cdot (x + y) = -2 \cdot x - 2 \cdot y = -2x - 2y$
$-2 \cdot (x - y) = -2 \cdot x - 2 \cdot -y = -2x + 2y$
$-(x + y) = -1 \cdot (x + y) = -1 \cdot x - 1 \cdot y = -x - y$

In de eerste twee voorbeelden hoort de min bij de 2, en distribueert zowel over x als y (of min y). In het laatste voorbeeld zien we dat als een min voor een uitdrukking tussen haakjes staat de betekenis eigenlijk –1 keer de uitdrukking tussen haakjes is.

OPGAVE 2.1
Werk de volgende uitdrukkingen uit, en schrijf ze zo eenvoudig mogelijk.

a $6 \cdot x - 3 \cdot y - 3 \cdot x + 12 \cdot y =$
b $7 \cdot (2x - y) - 3 \cdot (x + y) =$
c $3x - y - 4 \cdot (x + y) =$
d $(x - 2y) \cdot (x + y) =$
e $(x + 2y) \cdot (4x + 2y) =$
f $2 \cdot (x + 2y + 3z) =$
g $2 \cdot (3x - y) \cdot (x + 2y) =$
h $x^6 \cdot x^2 + 4(x^4)^2 =$
i $7a^3 \cdot a^6 + 4a^4 \cdot a^5 =$
j $x^2(x^4 + 4y^4) =$
k $-(x - 5) - 2(-3x + 2) =$

2 Ontbinden in factoren

In de voorgaande paragraaf hebben we uitdrukkingen uitgewerkt, en termen bij elkaar opgeteld, als dat kon.
Maar in de wiskunde komt het ook vaak voor dat we een uitdrukking hebben die de som is van enkele termen, maar dat we die zouden willen schrijven als product van factoren. We proberen dan een factor 'buiten haakjes' te halen, of te 'ontbinden in factoren'.
We geven weer enkele voorbeelden:

$x^2 + xy = x \cdot (x + y)$

$x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$

$3y^2 + 8y - 3 = (3y - 1)(y + 3)$

$y^6 + y^3 - 2 = (y^3 + 2)(y^3 - 1)$

Als de ontbinding eenmaal is gevonden, dan is gemakkelijk te controleren of deze correct is, door de factoren weer met elkaar te vermenigvuldigen en de eigenschappen uit de vorige paragraaf te gebruiken. In het algemeen is het echter niet vanzelfsprekend wat de ontbinding is. Het is aan te bevelen wat te proberen en te zoeken.
Daarbij kunnen de volgende aanwijzingen helpen:
– Als een factor in alle termen van de uitdrukking voorkomt, dan kunnen we die buiten haakjes halen.
– Als we een uitdrukking hebben met het kwadraat van een variabele, een getal maal de variabele en een getal (zoals in $x^2 + 6x + 8$), dan kunnen we zoeken naar getallen die opgeteld het eerste getal geven, en vermenigvuldigd het tweede getal; die twee getallen komen dan in de afzonderlijke factoren weer voor, immers er geldt: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$. We kunnen dus in een uitdrukking zoals $x^2 + 6x + 8$ kijken of het laatste getal te

schrijven is als product van twee gehele getallen, die samen gelijk zijn aan het getal voor de x. In dit geval is 8 gelijk aan $2 \cdot 4$, en de som van 2 en 4 is 6, waarmee we de ontbinding van de kwadratische uitdrukking hebben gevonden: $x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$.
– Als er voor een kwadraat een getal staat, is het wat zoeken en puzzelen.
– Als er hogere dan tweede machten voor komen, dan is zo'n hogere macht soms als nieuwe variabele te zien (zoals de y^3 in het laatste voorbeeld hiervoor; we kunnen dan y^3 door x vervangen, zodat er komt te staan $x^2 + x - 2$, wat is te ontbinden in $(x + 2)(x - 1)$, waar voor x dan weer y^3 ingevuld kan worden).
Overigens, niet in alle gevallen is er een mooie ontbinding in factoren te vinden.

OPGAVE 2.2
Ontbind de volgende uitdrukkingen in factoren.
a $2xy + y^2 =$
b $3x^3 + 4xy^2 + 6x =$
c $x^2 + 5x + 4 =$
d $x^2 - 2x - 8 =$
e $y^2 - 6y + 9 =$
f $x^2 - x - 20 =$
g $2x^2 + x - 1 =$
h $2y^2 + 7y - 15 =$
i $x^4 + 2x^2 - 3 =$
j $y^{20} - y^{10} - 6 =$

Soms is het mogelijk om wat ingewikkelder uitdrukkingen in enkele stappen in factoren te ontbinden. We geven nog een paar voorbeelden.

$x^3 + 7x^2 + 12x = x \cdot (x^2 + 7x + 12) = x(x + 3)(x + 4)$

Hier is eerst een x buiten haakjes gehaald, en vervolgens is de resterende uitdrukking nog in factoren ontbonden.

$3y^6 - 39y^4 + 108y^2 = 3y^2 \cdot (y^4 - 13y^2 + 36) = 3y^2(y^2 - 4)(y^2 - 9)$
$= 3y^2(y - 2)(y + 2)(y - 3)(y + 3)$

Hier is eerst een factor $3y^2$ buiten haakjes gehaald, en vervolgens is de resterende uitdrukking in enkele stappen in factoren ontbonden.

OPGAVE 2.3
Ontbind de volgende uitdrukkingen in factoren.
a $2x^3 - 2x^2 - 12x =$
b $7x^2 - 21x - 28 =$
c $y^6 + y^5 - 2y^4 =$
d $y^5 - 4y^3 + 3y =$
e $a^2x^2 + ax - 2 =$
f $ay^2 + ay - 30a =$
g $x^4 - 23x^2 - 50 =$
h $-x^{10} + 7x^9 + 8x^8 =$
i $-6a^2 + 4a + 2 =$
j $x^4 + 7x^3 + 10x^2 =$

BY NC ND

3 Merkwaardige producten

Bij het uitwerken van uitdrukkingen, of het ontbinden in factoren, komen we soms 'merkwaardige producten' tegen. Als we die kunnen herkennen, dan kunnen we er handig gebruik van maken. We behandelen ze aan de hand van enkele voorbeelden.

Door haakjes uit te werken, volgt eenvoudig de volgende gelijkheid:

$(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$

We zien hier dat het kwadraat van een som van twee termen gelijk is aan het kwadraat van de eerste term plus tweemaal het product van beide termen plus het kwadraat van de tweede term. De term in het midden wordt ook wel het *dubbelproduct* genoemd. Het vergt enige oefening, maar als deze vorm herkend wordt, dan is ze ook weer makkelijk te ontbinden in factoren:

Dubbelproduct

$y^2 - 18y + 81 = (y - 9)^2$

Want hierin zien we dat 81 het kwadraat is van 9 (en ook het kwadraat van –9) en –18 gelijk is aan 2 keer –9.
Eigenlijk zijn er twee vormen van deze merkwaardige producten:

$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$
$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$

In deze laatste gelijkheden zien we in het linkerlid de term $2xy$, ofwel twee maal het product van de variabelen. Dit is het dubbelproduct. Als er een minteken bij staat, dan komt er in het rechterlid een minteken, en anders een plusteken.

Als we het verschil van twee kwadraten hebben, dan is dat ook op een fraaie manier in factoren te ontbinden:

$x^2 - 81 = (x - 9)(x + 9)$

En ook:

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

Beide gelijkheden zijn eenvoudig te verifiëren door de haakjes in het rechterlid uit te werken. Soms kan dit handig gebruikt worden bij 'hoofdrekenen': $998 \cdot 1002 = 1000^2 - 2^2 = 1.000.000 - 4 = 999.996$.
We geven nog een voorbeeld, waarbij we eerst x^4 opvatten als kwadraat van x^2.

$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

OPGAVE 2.4
Ontbind de volgende uitdrukkingen in factoren.
a $x^2 + 6x + 9 =$
b $y^2 - 4y + 4 =$
c $3x^2 - 30x + 75 =$
d $x^2 - 4 =$
e $y^2 - 64 =$
f $a^2x^2 - b^2y^2 =$
g $100x^2 - 1 =$
h $x^4 - 8x^2 + 16 =$
i $5y^2 - 5 =$
j $z^{16} - 1 =$

OPGAVE 2.5
Reken uit het hoofd uit:
a $97 \cdot 103 =$
b $52 \cdot 48 =$
c $504 \cdot 496 =$
d $10.001 \cdot 9.999 =$

4 Breuken met variabelen

Als volgende onderdeel in deze leereenheid gaan we nog een keer met breuken aan de slag, maar nu als daar variabelen in voorkomen. De basisregels voor het werken met breuken zijn al in de vorige leereenheid aan bod gekomen. Daar pasten we ze toe als de tellers en noemers concrete getallen waren. Maar de regels zijn precies hetzelfde als er variabelen in voorkomen.
Ook als we met variabelen werken, moeten breuken gelijknamig zijn, als we ze willen optellen of aftrekken. Bij concrete getallen zochten we daarom naar het kleinste gemene veelvoud van de noemers en vermenigvuldigden de afzonderlijke breuken met factoren, zodat we op dezelfde noemers uitkwamen.
Dezelfde aanpak hanteren we ook als we breuken met variabelen hebben, die we willen optellen of aftrekken. We maken dan de breuken gelijknamig, door met geschikte factoren te vermenigvuldigen.
We geven twee voorbeelden.

VOORBEELD 2.1

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{(x+1)} \cdot \frac{(x-1)}{(x-1)} - \frac{1}{(x-1)} \cdot \frac{(x+1)}{(x+1)} = \frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$= \frac{(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-1-x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2}{(x+1)(x-1)}$$

We vermenigvuldigen de eerste breuk met $(x - 1)/(x - 1)$. Er geldt dat $(x - 1)/(x - 1)$ gelijk is aan 1 (voor $x \neq 1$), dus de waarde van de breuk verandert niet. Maar de noemer wordt anders, en gelijk aan de noemer van de tweede breuk, omdat we die vermenigvuldigen met $(x + 1)/(x + 1)$. En zodra de breuken gelijknamig zijn (ze hebben beide als noemer $(x + 1)(x - 1)$), dan kunnen we ze van elkaar aftrekken. «

VOORBEELD 2.2

$$\frac{x-1}{x^2-2x}+\frac{3x}{x^2-4}=\frac{x-1}{x(x-2)}+\frac{3x}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{(x-1)(x+2)}{x(x-2)(x+2)}+\frac{3x\cdot x}{x(x-2)(x+2)}=\frac{(x-1)(x+2)+3x^2}{x(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{x^2+x-2+3x^2}{x(x^2-4)}=\frac{4x^2+x-2}{x^3-4x}$$

De aanpak bij deze berekening is, dat we de noemers in factoren ontbinden, en de noemers gelijknamig maken, door te vermenigvuldigen met de ontbrekende factoren die wel in de andere noemer voorkomen. De tellers worden met dezelfde factoren vermenigvuldigd, waarna de bewerking uitgevoerd kan worden, met de dan gelijknamige factoren. Als de noemers moeilijk of niet te ontbinden zijn, dan vermenigvuldigen we iedere noemer met de andere noemer, en natuurlijk de teller ook. «

In het eerste voorbeeld merkten we al op dat we voor een bepaalde waarde van x de berekeningen niet uit mogen voeren, omdat dan de noemer 0 is. Dat was voor $x = 1$. Ook voor $x = -1$ zijn er noemers die 0 zijn. Omdat in dit voorbeeld de factoren $(x - 1)$ en $(x + 1)$ in de noemer blijven staan is de herschrijving geoorloofd, immers we sluiten de situaties waarin $x = 1$ of $x = -1$ uit. De uitdrukkingen voor en na het gelijkteken zijn aan elkaar gelijk, onder de voorwaarde dat $x \neq 1$ en $x \neq -1$. In het tweede voorbeeld geldt iets soortgelijks. We mogen daar de bewerkingen alleen uitvoeren als $x \neq 0$, $x \neq 2$ en $x \neq -2$. In het algemeen zullen we daar op moeten letten: zijn de bewerkingen die we uitvoeren wel toegestaan en zijn de diverse uitdrukkingen voor dezelfde waarden van x gedefinieerd.

Vermenigvuldigen en delen van breuken met variabelen, gaat zoals we dat ook deden met breuken met concrete getallen. Zo mogelijk vereenvoudigen we het resultaat.

VOORBEELD 2.3

$$\frac{1}{(x+1)}\cdot\frac{x^2+x}{2}=\frac{1\cdot(x^2+x)}{(x+1)\cdot 2}=\frac{(x+1)\cdot x}{(x+1)\cdot 2}=\frac{x}{2}$$

De uitwerking is geldig voor $x \neq -1$. Voor $x = 1$ is de uitwerking niet geldig, immers de noemer van $1/(x + 1)$ is dan gelijk aan 0, en een breuk waarvan de noemer 0 is, heeft geen betekenis, terwijl de vereenvoudigde vorm wel gedefinieerd is voor $x = -1$. We zullen in zo'n geval dus na vereenvoudiging expliciet moeten vermelden voor welke waarden de gelijkheid niet geldt. «

VOORBEELD 2.4

$$\frac{x^3-x^2}{(x+4)}\Big/\frac{x^2-x}{x+3}=\frac{x^3-x^2}{(x+4)}\cdot\frac{x+3}{x^2-x}=\frac{(x^3-x^2)(x+3)}{(x+4)(x^2-x)}=\frac{x^2(x-1)(x+3)}{x(x+4)(x-1)}=\frac{x(x+3)}{x+4}$$

Deze uitwerking is alleen geldig voor $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -3$ en $x \neq -4$, immers de oorspronkelijke uitdrukking is niet gedefinieerd voor deze waarden. «

OPGAVE 2.6
Voer de volgende bewerkingen uit, schrijf het resultaat als één breuk en vereenvoudig die zo ver mogelijk.

a $\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x-1}=$

b $\frac{x-1}{x^3-4x}+\frac{1}{x^2+x-2}=$

c $\frac{x}{x^2+x}+\frac{1}{x^2-x}=$

d $\frac{2y-1}{y^2-1}-\frac{y}{y^2+2y+1}=$

e $\frac{x^3-x^2}{2x+1}+\frac{4x^2+2x}{x-1}=$

f $\frac{1}{x^2-4}+\frac{x}{x^2+4x+4}=$

g $\frac{3y^2-1}{y}-\frac{1}{y^2+2y}=$

h $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=$

OPGAVE 2.7
Vereenvoudig:

$$\frac{2}{x-1}-\frac{6}{(x-1)(x+2)}$$

Voor welke waarde van x is de vereenvoudiging geldig?

5 Machten met variabelen

Alle regels voor het werken met machten, wortels en logaritmen hebben we in de vorige leereenheid al geïntroduceerd. Daar werkten we steeds met concrete getallen. We passen de regels nu ook toe bij het werken met variabelen in deze en volgende paragrafen.
We starten weer met enkele voorbeelden.

$(x-3)^3(x-3)^4=(x-3)^7$
$y^2\cdot y^5+3y^4\cdot y^3=y^7+3y^7=4y^7$

Hier zien we dat als we een factor verheven tot een zekere macht, vermenigvuldigen met dezelfde factor verheven tot een macht, dat we dan de machten bij elkaar op mogen tellen.

$37^x37^y=37^{x+y}$

Als de variabele in de exponent voorkomt, terwijl de grondtallen gelijk zijn, dan kunnen we de uitdrukking eenvoudiger schrijven, en nemen we de som van de machten, met hetzelfde grondtal.
Hieronder nog een laatste voorbeeld van hoe we uitdrukkingen in elkaar om kunnen zetten.

$$\begin{aligned}(x^2 - y^2)^m(x + y)^n &= ((x - y)(x + y))^m(x + y)^n \\ &= (x - y)^m(x + y)^m(x + y)^n \\ &= (x - y)^m(x + y)^{m+n}\end{aligned}$$

OPGAVE 2.8
Schrijf in zo eenvoudig mogelijke vorm:

a $(x+1)^3 \cdot x^2 \cdot (x+1)^4 \cdot x^3 =$

b $(y^2-1)^4 \cdot \dfrac{(y^2-1)^6}{(y^2-1)^3} =$

c $(x-1)^3(x+1)^3 =$

d $2^{2x+3} \cdot 2^{2x-3} =$

e $(3^{3x+y} \cdot 3^{-x-y})^2 =$

f $\dfrac{a^{x^2}}{a^{x+1}} =$

g $2^{x+3} \cdot 4^{x-1} =$

6 Wortels met variabelen

Ook de regels die we in de vorige leereenheid hebben opgesteld voor het werken met wortels, zijn hetzelfde als we met variabelen werken in plaats van met concrete getallen. Net als bij breuken moeten we wel opletten of de uitdrukkingen wel betekenis hebben. Zoals de breuk $1/x$ niet is niet gedefinieerd voor $x = 0$, is $\sqrt{x}$ niet gedefinieerd voor $x < 0$. Als het relevant is, dan geven we die voorwaarde erbij:

$$\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1+x} = 1 + x \quad \text{voor } x \geq -1$$

We geven nog enkele voorbeelden:

$$\sqrt{x+y} \cdot \sqrt{x-y} = (x+y)^{\frac{1}{2}}(x-y)^{\frac{1}{2}} = ((x+y)(x-y))^{\frac{1}{2}} = (x^2-y^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2-y^2}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{a+b}} = \frac{1}{2\sqrt{a+b}} \cdot \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}} = \frac{\sqrt{a+b}}{2(a+b)}$$

In dit laatste voorbeeld zien we hoe we een wortel uit de noemer van een breuk kunnen verwijderen: vermenigvuldig de breuk met een breuk die als teller en noemer die wortel heeft. Deze breuk is gelijk aan 1, dus als we daar mee vermenigvuldigen, dan verandert de waarde van de oorspronkelijke breuk niet. Het resultaat is een breuk met een noemer, waar geen wortel meer in voorkomt.

We bekijken nog een bijzondere situatie. Het is verleidelijk om de volgende vereenvoudiging te gebruiken: $\sqrt{x^2} = x$. Als $x = 4$, dan is dit correct, maar als $x = -4$, dan wordt het linkerlid: $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$ en dat is niet gelijk aan het rechterlid, als we daarin voor x de waarde -4 invullen. Door het kwadrateren zijn we als het ware het minteken kwijtgeraakt. We zullen dus goed op moeten letten wanneer de gelijkheden wel en niet gelden.
In het algemeen geldt:

$$\sqrt{x^2} = x \quad \text{voor } x \geq 0$$
$$\sqrt{x^2} = -x \quad \text{voor } x < 0$$

Voor $x = -4$, geldt dus de laatste relatie, wat we eenvoudig na kunnen gaan: $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = -(-4) = -x$.
We zullen dus steeds op moeten letten als we met een wortel een kwadraat 'wegwerken'. We geven nog een voorbeeld:

$$\sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2} = x+1 \quad \text{voor} \quad (x+1) \geq 0 \quad \text{ofwel voor} \quad x \geq -1$$

OPGAVE 2.9
Schrijf in zo eenvoudig mogelijke vorm:

a $\sqrt{x^2+4x+4} =$

b $\sqrt{y^2-4} \cdot \sqrt{y-2} =$

c $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{(x+1)^3} =$

d $\sqrt[4]{x+1} \cdot \sqrt[4]{(x+1)^3} =$

OPGAVE 2.10
Voor welke waarden van x geldt:

a $\sqrt{x^2-2x+1} = x-1$

b $\sqrt{x^2-2x+1} = -x+1$

OPGAVE 2.11
Herschrijf onderstaande breuken, zodat er geen wortel meer in de noemer voor komt.

a $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} =$

b $\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} =$

7 Logaritmen met variabelen

Als laatste in deze leereenheid kijken we nog naar uitdrukkingen met logaritmen waar variabelen in voorkomen. De regels die gelden zijn in de vorige leereenheid vermeld, en passen we nu toe waarbij we variabelen gebruiken:

$$^a\log(xy) = {}^a\log x + {}^a\log y$$

$$^a\log\left(\frac{2x}{x-2}\right) = {}^a\log 2x - {}^a\log(x-2) = {}^a\log 2 + {}^a\log x - {}^a\log(x-2)$$

$$^a\log(x^2-x) - {}^a\log x = {}^a\log\left(\frac{(x^2-x)}{x}\right) = {}^a\log(x-1)$$

$$^a\log(a\cdot b)^y = y \cdot {}^a\log(a\cdot b) = y \cdot {}^a\log a + y \cdot {}^a\log b = y + y \cdot {}^a\log b$$

Ook hier zullen we in voorkomende gevallen op moeten letten of de uitdrukkingen gedefinieerd zijn. Steeds moet voor een uitdrukking $^a\log x$ gelden dat a en x groter zijn dan 0 en $a \neq 1$. Dus de eerste gelijkheid geldt bijvoorbeeld alleen voor $x > 0$ en $y > 0$, de tweede alleen voor $x > 2$.

OPGAVE 2.12

Schrijf in zo eenvoudig mogelijke vorm en geef aan onder welke voorwaarden de herschrijvingen gelden:

a $^a\log(x-1) + {}^a\log(x+1) =$

b $^a\log(x^2-x) - {}^a\log(x-1) =$

c $^a\log a^{(y-1)} =$

d $^a\log\left(\frac{1}{x}\right) - {}^a\log\left(\frac{1}{x^2+x}\right) =$

OPGAVE 2.13

Voor welke waarden van x zijn de volgende uitdrukkingen gedefinieerd:

a $^a\log(x-1)$

b $^a\log(x^2-1)$

SAMENVATTING

In de wiskunde willen we vaak werken met getallen, zonder dat we precies weten, of aan willen geven wat de waarde is. Daarvoor gebruiken we variabelen, zoals x, y en z.
Door variabelen te gebruiken, kunnen we goed eigenschappen formuleren die gelden voor bewerkingen op getallen.

$x + y = y + x$	commutativiteit van optellen
$x \cdot y = y \cdot x$	commutativiteit van vermenigvuldigen
$x + (y + z) = (x + y) + z$	associativiteit van optellen
$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	associativiteit van vermenigvuldigen
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	distributiviteit van vermenigvuldigen over optellen
$x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$	distributiviteit van vermenigvuldigen over aftrekken

Met deze eigenschappen kunnen we uitdrukkingen omzetten, zodat we bijvoorbeeld eenvoudiger vormen vinden. Ook gebruiken we de eigenschappen om uitdrukkingen in factoren te ontbinden.

Bij het ontbinden in factoren komen enkele merkwaardige producten naar voren:

$x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$
$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

Bij breuken, machten, wortels en logaritmen met variabelen gelden dezelfde regels als bij concrete getallen. Wel moet opgelet worden of de uitdrukkingen gedefinieerd zijn, en er bijvoorbeeld niet door 0 gedeeld wordt of een wortel uit een negatieve waarde wordt genomen.

ZELFTOETS

1 Geef bij de volgende bewerkingen aan welke eigenschap wordt toegepast:
a $2 \cdot x = x \cdot 2$
b $a + (2a + 3a) = (a + 2a) + 3a$
c $2 \cdot (p - q) = 2p - 2q$

2 Werk de volgende uitdrukkingen uit, zodat er geen haakjes meer in voorkomen:
a $2(x - y)(x + 2y) =$
b $a^3(a^2 + 4b^2) =$

3 Ontbind de volgende uitdrukkingen in factoren:
a $2x^2 + 2x - 12 =$
b $y^8 - 2y^4 - 8 =$

4 Ontbind de volgende merkwaardige producten in factoren:
a $4x^2 - 121 =$
b $y^2 - 8y + 16 =$

5 Werk de volgende uitdrukkingen uit, en vereenvoudig:
a $\dfrac{x-2}{x+3} - \dfrac{x-3}{x+2} =$

b $\dfrac{x^2-4}{x+3} \cdot \dfrac{x^2-9}{x+2} =$

6 Gegeven is de volgende breuk:

$$\frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

a Voor welke waarde van x is deze breuk gedefinieerd?
b Herschrijf de breuk, zodat er in de noemer geen wortel meer voorkomt.

CC BY NC ND

Meetkunde

Introductie *53*

Leerkern *54*

1 Het platte vlak, punten, lijnen en hoeken *54*
2 Driehoeken, vierkanten en de stelling van Pythagoras *57*
3 Cirkels en radialen *63*
4 Sinus, cosinus en tangens *66*
5 Euclidische ruimte *67*

Samenvatting *70*

Zelftoets *70*

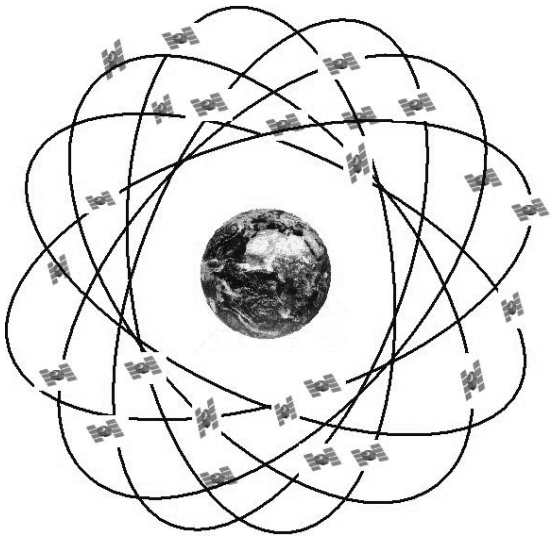
Leereenheid 3

Meetkunde

INTRODUCTIE

Tot nu toe hebben we ons vooral gericht op 'getallen'. Maar een belangrijk deel van de wiskunde houdt zich ook bezig met afstanden, hoeken en lengtes en dergelijke. Deze onderwerpen vallen onder de meetkunde. In de oudheid was de wiskunde van de Grieken vooral meetkunde, maar we zien ook tegenwoordig op veel plaatsen het belang van meetkunde.

Navigatiesystemen zoals die nu volop in gebruik zijn in auto's, vliegtuigen en schepen werken met GPS, global positioning system. Ook smartphones en andere apparaten zijn uitgerust met dit systeem. In essentie komt dit systeem erop neer dat er tientallen satellieten rond de aarde cirkelen die signalen uitzenden waarmee posities zijn te berekenen. De signalen gaan met een zekere snelheid, en daarmee kan een ontvanger precies berekenen wat zijn afstand is tot die satelliet. Als de afstand tot verschillende satellieten bekend is, en als de posities van de satellieten bekend zijn, dan kan daarmee berekend worden wat de positie van de ontvanger op aarde is, zowel in lengte- als breedtegraden, als ook de hoogte, bijvoorbeeld ten opzichte van NAP (Normaal Amsterdams Peil).



FIGUUR 3.1 Met door satellieten uitgezonden signalen, kan op aarde een exacte positie worden bepaald.

Afgelopen jaren is de nauwkeurigheid van GPS-systemen dermate verbeterd dat de positie van een goede ontvanger op ieder moment tot op enkele meters nauwkeurig bepaald kan worden. Enerzijds waren daarvoor betere technische systemen (zenders, ontvangers, klokken, ...) nodig, anderzijds betere algoritmen om de berekeningen uit te voeren.

In essentie zijn veel berekeningen terug te voeren op eenvoudige meetkunde. Lang geleden gebruikte Eratosthenes, in de tweede eeuw voor Christus, al dergelijke meetkunde om de omtrek van de aarde te berekenen.

In deze leereenheid bekijken we de basiselementen van de meetkunde. Veel van die elementen worden toegepast, binnen de wiskunde en binnen de informatica.

LEERDOELEN

Na het bestuderen van deze leereenheid wordt verwacht dat u

- de basiselementen van de meetkunde kent en ermee kunt werken: platte vlak, punten, lijnen, hoeken, driehoeken, vierkanten, cirkels
- de stelling van Pythagoras kent, kunt bewijzen en toepassen
- de relatie kent tussen graden en radialen en deze in elkaar om kunt zetten
- de definities kent van sinus, cosinus en tangens, de waarden ervan voor enkele karakteristieke hoeken kent of vlot kunt berekenen, en de basisrelaties tussen deze begrippen kent en kunt bewijzen
- weet wat een Euclidische ruimte is, hoe er punten in worden weergegeven
- afstanden tussen punten kunt berekenen.

LEERKERN

1 Het platte vlak, punten, lijnen en hoeken

Punt
Lijn

De basiselementen van de meetkunde zijn *punten* en *lijnen*. We introduceren deze op informele wijze. Met die 'informele wijze' bedoelen we dat we niet voor een fundamentele aanpak met axioma's en afleidingen kiezen, maar veelal de eigenschappen beschrijven. Een en ander is wel fundamenteel te onderbouwen, maar dat doen we niet in deze cursus.

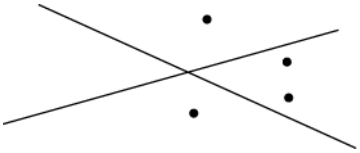
Platte vlak

We beperken ons in eerste instantie tot het *platte vlak*. Stel 'het platte vlak' daarbij voor als een blanco vel papier, dat naar alle kanten oneindig doorloopt. Op dit platte vlak kunnen we punten zetten en lijnen trekken. Een punt op papier getekend is een klein rondje, zodat we het kunnen zien. Het heeft op papier een zekere diameter. In de wiskunde is een punt veeleer een idee van een 'positie'; het heeft geen diameter. Als we zouden inzoomen, dan zou het niet groter worden. Als we twee verschillende punten hebben, dan zou daar altijd nog een punt tussen passen. Dit is net zoals op de getallenlijn: tussen twee verschillende getallen past altijd nog weer een getal, zoals we in leereenheid 1 hebben gezien.

Alle punten in het platte vlak bij elkaar kunnen we opvatten als een verzameling P. Figuren als een lijn, of een cirkel, kunnen we opvatten als deelverzamelingen van deze grote verzameling P.

Voor lijnen geldt iets soortgelijks als voor punten: een lijn met potlood op papier getekend, heeft een zekere dikte, want anders zouden we de lijn niet kunnen zien. Maar het wiskundige beeld is dat een lijn oneindig dun is en bestaat uit een verzameling punten die samen de lijn vormen.

Alle lijnen in het platte vlak bij elkaar kunnen we ook weer beschouwen als een verzameling. Ook al zijn wiskundige punten 'oneindig klein' en wiskundige lijnen 'oneindig dun', we zullen op papier gewoon zichtbare punten en lijnen tekenen, zodat we ze kunnen zien en erover kunnen redeneren.



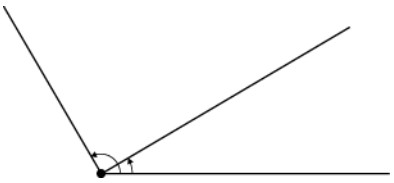
FIGUUR 3.2 Lijnen en punten in het platte valk

Met punten en lijnen hebben we al een basis om heel wat over te kunnen gaan redeneren. Zo kan een punt op een lijn liggen, of niet. Door twee punten kunnen we precies één lijn trekken. Twee lijnen kunnen elkaar snijden (ze hebben dan één punt gemeen), evenwijdig zijn (ze hebben dan nul punten gemeen), of samenvallen (ze hebben dan oneindig veel punten gemeen). De verzameling punten tussen twee punten op een lijn noemen we een *lijnstuk*.

Lijnstuk

Als twee lijnen elkaar snijden, dan maken ze een zekere *hoek*. De grootte van een hoek geven we weer in *graden* (of in *radialen*, waarover verderop meer). We kijken nu verder naar de hoek die twee lijnstukken met elkaar kunnen maken, waarbij de lijnstukken in één eindpunt samenvallen.

Hoek
Graad
Radiaal



FIGUUR 3.3 Hoeken tussen twee lijnstukken in een punt

Als we één van de lijnstukken op z'n plaats laten, en het tweede lijnstuk ronddraaien, rond het gemeenschappelijke eindpunt, dan valt het tweede lijnstuk op zeker moment weer samen met het eerste lijnstuk. We hebben dan een hoek van 360° gemaakt. Een kwarthoek wordt ook een *rechte hoek* genoemd en is 90°. Liggen de twee lijnstukken in elkaars verlengde, dan noemen we dat een *gestrekte hoek*, en die is 180°. De eenheid om een hoek te meten is dus een 'graad'.

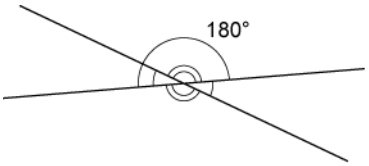
Rechte hoek

Gestrekte hoek

In figuur 3.3 hebben we het lijnstuk 'linksom' gedraaid, dus tegen de wijzers van de klok in. We hadden natuurlijk ook de andere kant op kunnen draaien. Om onderscheid tussen die twee richtingen te maken, noemen we hoeken die ontstaan door linksom te draaien positief, en als we rechtsom draaien, geven we de hoek een negatieve waarde. Als de draairichting niet relevant is, dan hebben we het gewoon over de grootte van de hoek, en nemen we daarvoor de positieve waarde.

Als we het lijnstuk draaien, en een keer rond zijn, kunnen we natuurlijk nog verder draaien, en dan krijgen we hoeken die groter zijn dan 360°.

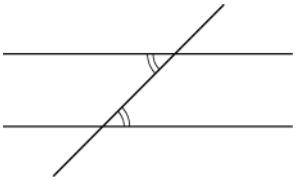
Als twee lijnen elkaar snijden, dan maken ze een zekere hoek met elkaar. Maar als we kijken naar het snijpunt van de twee lijnen, dan zien we daar vier hoeken omheen. Twee aan twee zijn de hoeken aan elkaar gelijk: de tegenover elkaar liggende hoeken zijn steeds even groot. We geven dat in onderstaande figuur weer met overeenkomstige boogjes. Als we twee naast elkaar liggende hoeken nemen, dan is de som van die hoeken altijd 180° graden.



FIGUUR 3.4 Tegenoverliggende hoeken zijn gelijk, twee naastliggende hoeken zijn samen 180°

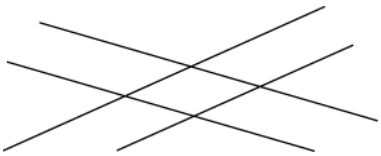
Z-hoek

Als we twee evenwijdige lijnen hebben, die gesneden worden door een derde, dan zien we nog meer gelijke hoeken. We herkennen daar ook een '*Z-hoek*' in zie figuur 3.5. In een *Z*-hoek zijn twee hoeken gelijk. Dit is een eigenschap die we goed kunnen gebruiken.



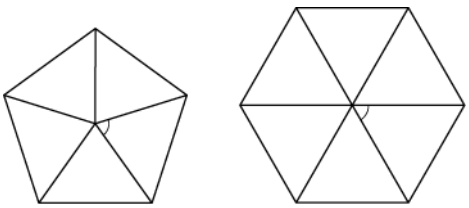
FIGUUR 3.5 Z-hoek

OPGAVE 3.1
Welke hoeken zijn in onderstaande figuur aan elkaar gelijk?



FIGUUR 3.6

OPGAVE 3.2
Hoe groot zijn de aangegeven hoeken in onderstaande regelmatige vijf- en zeshoek?

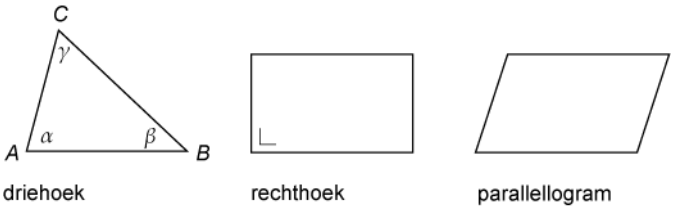


FIGUUR 3.7

2 Driehoeken, vierkanten en de stelling van Pythagoras

Driehoek
Vierhoek
Vijfhoek

Door punten te kiezen en daar lijnstukken tussen te tekenen, kunnen we allerlei geometrische figuren tekenen. Tussen drie punten tekenen we een *driehoek*, tussen vier punten een *vierhoek*, tussen vijf punten een *vijfhoek*, enzovoort.



FIGUUR 3.8

Rechthoekige driehoek
Rechthoekszijde
Hypotenusa

Gelijkbenige driehoek

Gelijkzijdige driehoek

Rechthoek

Vierkant

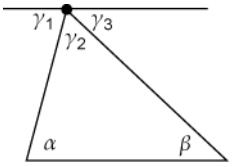
Parallellogram

Door extra eisen te stellen aan de basisvormen, krijgen we allerlei bijzondere objecten:
– Als één hoek in een driehoek 90° is, dan noemen we die driehoek een *rechthoekige driehoek*; de zijden aan weerszijden van de rechte hoek worden de *rechthoekszijden* genoemd, de derde zijde is de schuine zijde (of *hypotenusa*).
– Als twee zijden even lang zijn in een driehoek, dan hebben we een *gelijkbenige driehoek.*
– Als drie zijden even lang zijn in een driehoek, dan hebben we een *gelijkzijdige driehoek*.
– Als in een vierhoek alle hoeken 90° zijn, dan hebben we een *rechthoek* (hoek van 90° geven we aan met een klein hoekje in de hoek).
– Als in een vierhoek alle zijden even lang zijn, en de hoeken 90° dan hebben we een *vierkant*.
– Als in een vierhoek de zijden twee aan twee evenwijdig zijn, dan hebben we een *parallellogram*.

Veel van de eigenschappen die we in de figuren kunnen vinden, kunnen we vastleggen in stellingen.

STELLING 3.1 De som van de drie hoeken in een driehoek is 180°.

Bewijs
Om het bewijs te geven tekenen we een 'willekeurige' driehoek, en door één van de punten tekenen we een lijn, evenwijdig met de lijn door de andere twee punten.



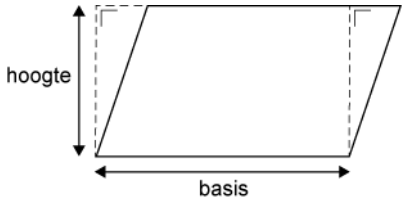
FIGUUR 3.9

In de figuur herkennen we verschillende Z-hoeken, zodat volgt: $\alpha = \gamma_1$, $\beta = \gamma_3$. En omdat $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 180°$, volgt dus ook dat $\alpha + \beta + \gamma_2 = 180°$. Ofwel, de som van de drie hoeken van een driehoek is 180°. □

OPGAVE 3.3

a Bewijs dat de som van de vier hoeken van een vierhoek gelijk is aan 360°. (Hint: trek een lijn tussen twee tegenover elkaar liggende hoekpunten, die de vierhoek verdeelt in twee driehoeken).
b Hoe groot is de som van de vijf hoeken in een vijfhoek? En van de zes hoeken in een zeshoek?
c Hoe groot is de som van de n hoeken in een n-hoek?

Een rechthoek waarvan de zijden x en y lang zijn, heeft een oppervlakte van $x \cdot y$. Een vierkant met zijden met lengte x, heeft een oppervlakte van x^2.
Voor het bepalen van de oppervlakte van een parallellogram, doen we de volgende observatie. Als we van een parallellogram rechts een driehoekje afhalen, en dat er aan de linkerkant bij doen, dan blijft de oppervlakte gelijk.



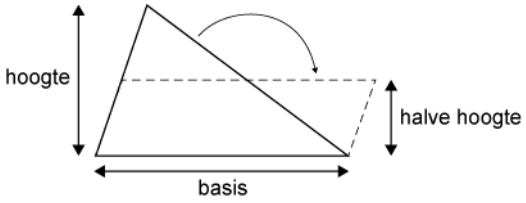
FIGUUR 3.10 Oppervlakte van een parallellogram

Basis
Hoogte

We zien nu dat de oppervlakte van een parallellogram gelijk is aan *basis* maal *hoogte*. We hebben hiermee de volgende stelling bewezen.

STELLING 3.2 De oppervlakte van een parallellogram is basis maal hoogte.

Om de formule te vinden voor de oppervlakte van een driehoek doen we iets soortgelijks. We trekken een lijn op halve hoogte door de driehoek, evenwijdig aan de basis; zie figuur 3.11. We halen het bovenste deel van de driehoek af, en roteren die 180° en plakken die aan de afgetopte driehoek. Het resultaat is dan een parallellogram, waarvoor we net een formule voor de berekening van de oppervlakte hebben afgeleid.



FIGUUR 3.11 Oppervlakte van een driehoek

We zien nu dat de oppervlakte van een driehoek gelijk is aan basis maal halve hoogte en formuleren dat in de volgende stelling.

STELLING 3.3 De oppervlakte van een driehoek is basis maal halve hoogte.

OPGAVE 3.4

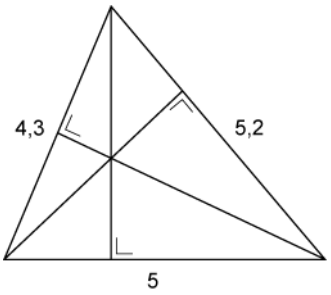
a De basis van een driehoek is 8, de hoogte is 7. Wat is de oppervlakte van deze driehoek?

b Hoeveel driehoeken zijn er met basis 8 en hoogte 7?

OPGAVE 3.5

In onderstaande figuur zijn de lengten van de zijden van een driehoek gegeven. De oppervlakte van de driehoek is 10. Bereken de lengten van de ingetekende *hoogtelijnen*, dat zijn de lijnstukken vanuit een hoekpunt die loodrecht staan op de tegenoverliggende zijde.

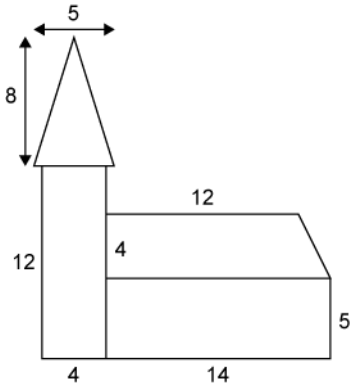
Hoogtelijn



FIGUUR 3.12

OPGAVE 3.6

Bereken van onderstaande figuur de oppervlakte.



FIGUUR 3.13

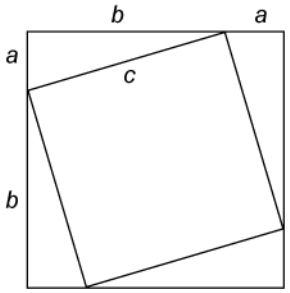
De volgende eigenschap is misschien wel de meest bekende van de wiskunde, en formuleren we weer als een stelling, waarvan we een bewijs geven.

STELLING 3.4

Stelling van Pythagoras
In een rechthoekige driehoek, waarvan de rechthoekszijden lengte a en lengte b hebben, en de lengte van de hypotenusa gelijk is aan c, geldt:

$a^2 + b^2 = c^2$

Er zijn vele bewijzen voor de stelling van Pythagoras. We geven een bewijs, waarbij we uitgaan van een vierkant, met zijden met lengte $a + b$ en daarbinnen een vierkant, met zijden met lengte c. We herkennen in de figuur vier keer een driehoek met rechthoekszijden met lengtes a en b, en een hypotenusa met lengte c.



FIGUUR 3.14 Oppervlakte van grote vierkant is oppervlakte van kleine vierkant plus de vier driehoekjes

De oppervlakte van de totale figuur is $(a + b)^2$.
In de figuur is de oppervlakte van het kleinere vierkant c^2. Naast het kleine vierkant bestaat het grote vierkant nog uit vier driehoeken, met rechthoekszijden met lengte a en b. De oppervlakte van één zo'n driehoek is $ab/2$, dus de oppervlakte van de vier driehoeken samen is gelijk aan $4 \cdot (ab/2) = 2ab$.
De oppervlakte van het grote vierkant is gelijk aan de oppervlakte van het kleine vierkant, plus de vier driehoeken. We schrijven dat in een gelijkheid:

$$(a + b)^2 = c^2 + 2ab$$

We kunnen deze gelijkheid uitwerken tot:

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

Links en rechts van het gelijkteken staat dezelfde term $2ab$. Als we die aan beide kanten weghalen, dan blijft de gelijkheid gelden, immers we halen links en rechts precies evenveel weg. Er volgt dan:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Hiermee is de stelling van Pythagoras bewezen. □

Met de formules en eigenschappen die we hierboven hebben afgeleid, kunnen we al heel wat berekeningen uitvoeren om praktische problemen op te lossen. We geven een paar voorbeelden.

VOORBEELD 3.1 Een zeilmaker berekent de oppervlakte van het zeil van een zeilschip met de formule: oppervlakte is lengte van het voorlijk, maal de afstand van de schoothoek tot het voorlijk, gedeeld door 2.

FIGUUR 3.15 Zeiloppervlakte is lengte voorlijk maal afstand schoothoek gedeeld door 2 «

VOORBEELD 3.2 De lengte van een spankabel van een zendmast, kan berekend worden door eerst het kwadraat van de hoogte van het aangrijpingspunt op te tellen bij het kwadraat van afstand van het grondblok tot de mast, en vervolgens uit deze som de wortel te trekken.

FIGUUR 3.16 Zendmast bij Lopik «

Bovenstaande voorbeelden zijn vereenvoudigde voorstellingen van zaken. De werkelijkheid is vaak wat gecompliceerder. Zo is een zeil van een zeilboot niet echt een vlakke driehoek, en zal een spankabel niet recht lopen maar een beetje doorbuigen. De resultaten van de berekeningen zijn dus benaderingen van de werkelijkheid.
De basisprincipes zijn echter correct, en worden in onvoorstelbaar veel situaties toegepast om talrijke problemen op te lossen.

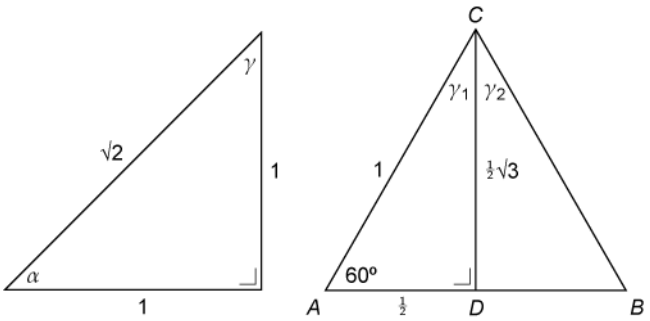
OPGAVE 3.7

a De lengten van de rechthoekszijden in een rechthoekige driehoek zijn 5 en 12. Wat is de lengte van de schuine zijde?

b De lengte van een rechthoekszijde in een rechthoekige driehoek is 9; de lengte van de schuine zijde is 15. Wat is de lengte van de derde zijde?

c De Egyptenaren deden het al bij de bouw van de piramides, en timmerlui en stoffeerders doen het tot op de dag van vandaag: de drie-vier-vijf-driehoek gebruiken om een rechte hoek te bepalen. Ga na dat in een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden met lengten 3 en 4, de lengte van de hypotenusa gelijk is aan 5.

We bekijken enkele bijzondere driehoeken wat nader, en berekenen met de Stelling van Pythagoras de lengtes van de zijden in deze driehoeken.



FIGUUR 3.17

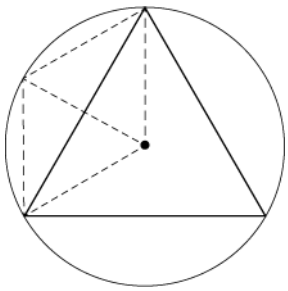
Links in figuur 3.17 staat een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden met gelijke lengte. De twee hoeken α en γ zijn gelijk en samen 90°; iedere hoek apart is dus 45°. Als de lengte van een rechthoekszijde gelijk is aan 1, dan is de lengte van de schuine zijde gelijk aan $\sqrt{2}$.
De driehoek rechts in figuur 3.17 is een gelijkzijdige driehoek. De lengte van een zijde is gelijk aan 1. Alle hoeken zijn even groot, dus gelijk aan 60°. Tekenen we vanuit één hoek de hoogtelijn, loodrecht op de tegenoverliggende zijde, dan ontstaat een rechthoekige driehoek. Vanuit symmetrieoverwegingen kunnen we concluderen dat $\gamma_1 = \gamma_2 = 30°$, en $AD = DB = \frac{1}{2}$. Met de Stelling van Pythagoras kunnen we berekenen dat $CD = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

OPGAVE 3.8

Gegeven is een rechthoekige driehoek met twee rechthoekszijden van gelijke lengte. Wat is de lengte van een rechthoekszijde als de lengte van de schuine zijde gelijk is aan 4?

OPGAVE 3.9

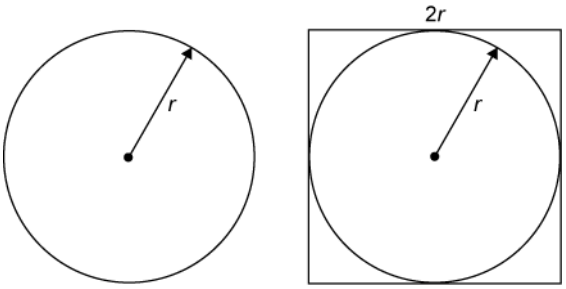
Gegeven is een cirkel met straal 1 en daarin een gelijkzijdige driehoek met de hoekpunten op de cirkel. Wat is de lengte van een zijde van de driehoek?
(Hint: teken in de cirkel ook twee gelijkzijdige driehoeken, die beide een hoekpunt in het middelpunt, en twee hoekpunten op de cirkel hebben, zie figuur 3.18.)



FIGUUR 3.18 Een cirkel met een gelijkzijdige driehoek

3 Cirkels en radialen

Naast punten, lijnen en veelhoeken (driehoeken, vierhoeken, enzovoort bij elkaar) is er nog een belangrijke basisfiguur: de cirkel. Een cirkel is de verzameling punten in het platte vlak die allemaal op gelijke afstand liggen van één punt, het middelpunt, dat we meestal aangeven met M. De afstand is de straal en geven we vaak aan met r.



FIGUUR 3.19 Een cirkel met straal r past in een vierkant met zijden $2r$

Rondom een cirkel kunnen we een vierkant tekenen met zijde $2r$. We zien daarin direct dat de oppervlakte van de cirkel kleiner is dan $4r^2$. Tussen de oppervlakte van de cirkel en r^2, geldt een vaste verhouding, die wordt weergeven met π. Het symbool 'π' is een Griekse letter en spreken we uit als 'pi'.
Als we O de oppervlakte van een cirkel met straal r noemen, dan geldt:

$O = \pi r^2$.

Het blijkt dat π geen rationaal getal is, net zoals $\sqrt{2}$. Een grove benadering van π is 3,14, maar desgewenst zijn er nauwkeuriger benaderingen van π:

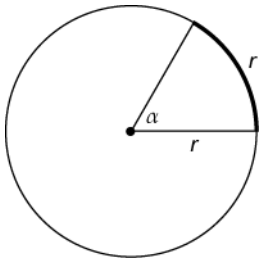
π = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209
74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651
32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128 48111 74502 84102
70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196 44288 10975 66593 34461
…

Voor praktische toepassingen is het werken met hooguit 10 decimalen meestal ruim genoeg. Bij het testen van de rekenkracht van computers worden soms gigantische hoeveelheden decimalen berekend. In 2016 was het aantal berekende decimalen van π meer dan 22 biljoen.

OPGAVE 3.10

Er zijn vele manieren om de decimalen van π te bepalen. Eén manier is om een veelhoek binnen en een veelhoek buiten een cirkel te tekenen. De oppervlakte van de cirkel moet tussen de oppervlakte van de kleine en grote veelhoek liggen.
Teken een cirkel met straal 1 en eromheen een zo klein mogelijk vierkant, en erbinnen een zo groot mogelijk vierkant. Bereken de oppervlakten van deze vierkanten, en leidt daar het interval uit af, waarin π moet liggen.
(NB Door 8-hoeken, of 16-hoeken te nemen, wordt een kleiner interval gevonden waarin π moet liggen. Deze methode om π te benaderen is niet verkeerd, maar zeer inefficiënt. Er zijn veel efficiëntere methodes bekend.)

We vermelden hier, zonder verdere onderbouwing, dat de omtrek van een cirkel gelijk is aan $2\pi r$. Als we de straal af zouden passen op de omtrek, dan zouden we dus na iets meer dan 6 keer de straal helemaal rond zijn.



FIGUUR 3.20 Een hoek van 1 radiaal

Radiaal

In het vervolg van deze cursus zullen we zien dat het soms handig is om met een andere hoekeenheid te werken dan de graad. Die andere eenheid is de hoek die we krijgen door 1 keer de straal af te passen op de omtrek, zie bovenstaande figuur. De eenheid die we dan vinden wordt één *radiaal* genoemd. De grootte van de hoek α in bovenstaande figuur is dus 1 radiaal.
Omdat we 2π keer de straal af kunnen passen op de omtrek, is een hoek van 2π radialen gelijk aan 360°, of eenvoudiger, π radialen is gelijk aan 180°. Met deze overeenkomst kunnen we schakelen tussen graden en radialen, afhankelijk van de eenheid die we willen gebruiken.
Een hoek van 1° komt overeen met $\pi/180$ radialen. Dus een hoek van 20 graden komt overeen met $20 \cdot \pi/180 = \pi/9$ radialen. In het algemeen geldt:

x graden = $x \cdot \pi/180$ radialen

Andersom kan natuurlijk ook. Een hoek van 1 radiaal komt overeen met $180/\pi$ graden ≈ 57,3°.

Een hoek van 3/2 radiaal, is dus gelijk aan (3/2) * 180/π = 270/π graden.
In het algemeen:

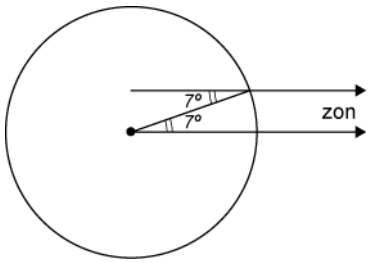
x radialen = $x \cdot 180/\pi$ graden

Het omzetten van de eenheid van radialen naar graden is dus net zoiets als het omzetten tussen de ene lengte-eenheid en de andere, zoals bijvoorbeeld tussen kilometers en (Engelse) mijlen. Afhankelijk van de toepassing kiezen we voor de ene of de andere eenheid.
Als berekeningen met een rekenmachine uitgevoerd moeten worden, dan kan ook gekozen worden tussen de ene of de andere hoekeenheid.
Soms is er nog een keuze voor een derde eenheid: 'grad'. Er gaan 400 grad in één cirkel. Deze derde hoekeenheid zullen we niet gebruiken.

OPGAVE 3.11

a Hoeveel radialen is een hoek van 30°, en een hoek van 155°?
b Hoeveel graden is een hoek van π/2 radialen, en 5π/6 radialen?

We gaan nu in op de methode die Eratosthenes in de oudheid gebruikte om een schatting te geven van de omtrek van de aarde. We refereerden daar al aan in de inleiding van deze leereenheid. Hij ging ervan uit dat de aarde bolvormig was en in zijn methode gebruikte Eratosthenes ook de *Z*-hoek.
Eratosthenes zag dat de zon op de langste dag van het jaar recht naar beneden in een diepe put scheen, maar op een andere veel noordelijker plaats was dat niet zo, en bleef er een schaduw zichtbaar. De zon kwam niet recht boven de put, maar bleef daar ongeveer 7° schuin boven, zie ook onderstaande figuur.



FIGUUR 3.21 Meer naar het Noorden komt de zon minder hoog

Met behulp van de Z-hoek volgt dat de hoek tussen de stralen uit het middelpunt van de aarde, naar de putten ook ongeveer 7° is. Omdat 7° ongeveer overeenkomt met 1/50-ste deel van een cirkelomtrek, concludeerde Erathostenes dat de omtrek van de aarde 50 keer de afstand tussen de twee putten moest zijn.

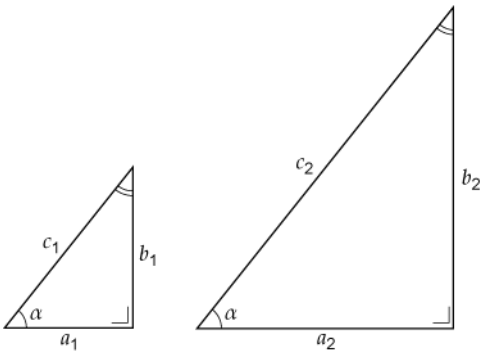
OPGAVE 3.12

Eratosthenes was nog wat preciezer en mat dat de hoek 7,14° was.
De afstand tussen de twee putten schatte hij op 5.000 stadiën (de afstandseenheid in die tijd). Als we ervan uitgaan dat een stadie gelijk is aan 150 meter, wat was dan de schatting van Eratosthenes voor de omtrek van de aarde?

4 Sinus, cosinus en tangens

In de volgende figuur zijn twee rechthoekige driehoeken getekend. We noemen de driehoeken gelijkvormig, want de overeenkomstige hoeken zijn gelijk. In gelijkvormige driehoeken zijn de verhoudingen tussen de zijden gelijk: $a_1/b_1 = a_2/b_2$. Die verhouding is alleen afhankelijk van de grootte van de hoeken, en niet van de grootte van de driehoek als geheel. Die 'constante' verhoudingen tussen de zijden in rechthoekige driehoeken noemen we *sinus*, *cosinus* en *tangens* en worden voor een hoek α genoteerd met $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ en $\tan\alpha$.

Sinus
Cosinus
Tangens



FIGUUR 3.22

$$\sin\alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}} = \frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}} = \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$$

Als we de lengten van de zijden kennen, dan kunnen we de waarden van sin, cos en tan berekenen. Voor α in figuur 3.22 geldt $a_1 = 3$, $b_1 = 4$ en $c_1 = 5$. Dan volgt: $\sin\alpha = 4/5$, $\cos\alpha = 3/5$ en $\tan\alpha = 4/3$.

Tussen sinus, cosinus en tangens gelden allerlei relaties. Zo gelden bijvoorbeeld:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Hierin staat $\sin^2\alpha$ voor $(\sin\alpha)^2$. Deze 'korte' notatie wordt zeer veel gebruikt.
We vragen u bovenstaande formules in de volgende opgaven af te leiden.

Bij een bepaalde hoek hoort een vaste verhouding van de (rechthoeks)-zijden en dus vaste waarden voor sinus, cosinus en tangens. In tabellen en rekenmachines zijn die waarden te vinden, of opgeslagen. Voor enkele hoeken zijn ze eenvoudig te berekenen, in het bijzonder voor hoeken van 30, 45 en 60 graden.

Uit de driehoek rechts in figuur 3.17 kunnen we bijvoorbeeld gemakkelijk afleiden dat $\sin 30° = (1/2) / 1 = ½$. In het volgende tabelletje geven we de waarden weer.

TABEL 3.1

α	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
graden	radialen			
30°	$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	$\pi/4$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60°	$\pi/3$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

U moet deze waarden uit uw hoofd kennen, of vlot kunnen afleiden. Verder ziet u dat de waarden van sinus en cosinus voor hoeken tussen 0 en 90 graden tussen 0 en 1 liggen. Als we ook waarden bepalen voor andere hoeken tussen 0 en 90 graden, dan liggen de waarden van sinus en cosinus steeds tussen 0 en 1. Dat is goed te begrijpen, uitgaande van de definities, immers een rechthoekszijde in een rechthoekige driehoek is altijd korter dan de schuine zijde.

OPGAVE 3.13

Gegeven is een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden met lengte 5 en 12. Naast een hoek van 90° heeft de driehoek nog twee hoeken.
De hoek bij de lange rechthoekszijde is α.

a Bereken de lengte van de hypotenusa.

b Bereken: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ en $\tan\alpha$.

c Laat zien dat in deze driehoek geldt:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha \quad \text{en} \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

d Laat zien dat in iedere rechthoekige driehoek geldt:

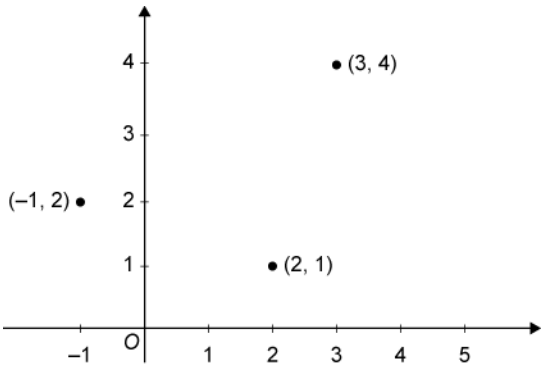
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha \quad \text{en} \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

5 Euclidische ruimte

Tot nu toe hebben we geen 'vast punt' in het platte vlak gekozen. Vaak willen we echter wel de positie van een punt of een lijn weer kunnen geven ten opzichte van een vast punt en een bepaalde richting (boven-onder, of links-rechts). We kunnen daartoe één vast punt kiezen.

Oorsprong

Dat noemen we de *oorsprong*, die we weergeven met *O*. Vanuit de oorsprong kiezen we vervolgens een assenstelsel, met twee assen die loodrecht op elkaar staan. Als we nu ook nog een eenheid voor afstand kiezen, dan kunnen we aangeven waar ieder punt in het platte vlak ligt.

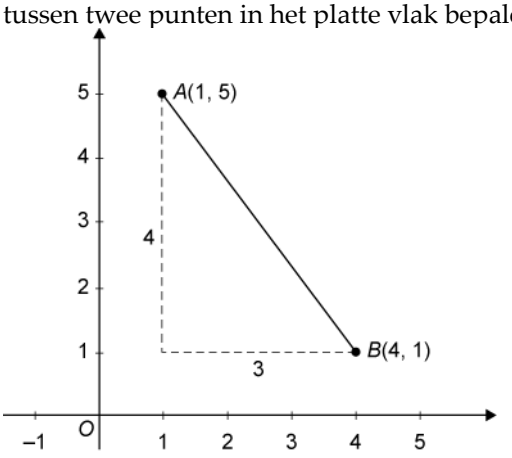


FIGUUR 3.23

Coördinaten

Een punt in het platte vlak kunnen we nu aangeven met twee *coördinaten*. De eerste coördinaat geeft aan hoe ver we naar rechts of links gaan ten opzichte van de oorsprong, en de tweede coördinaat geeft aan hoe ver we naar boven of beneden gaan. In bovenstaande figuur zijn enkele punten weergegeven.

Met behulp van de coördinaten kunnen we nu gemakkelijk de afstand tussen twee punten in het platte vlak bepalen.

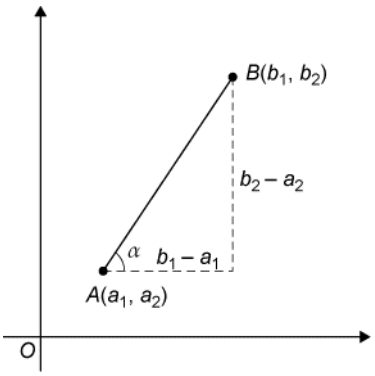


FIGUUR 3.24 Afstand tussen punten berekenen met de coördinaten

Met behulp van de stelling van Pythagoras zien we in bovenstaande figuur dat de afstand tussen de punten $A(1, 5)$ en $B(4, 1)$ gelijk is aan $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. De afstand tussen twee willekeurige punten A en B, met coördinaten a_1, a_2, respectievelijk b_1 en b_2, noteren we met $d(A, B)$, waarvoor geldt:

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Kennen we de coördinaten van twee punten op een lijn, dan kunnen we de tangens bepalen van de hoek die de lijn met de horizontale as maakt, zie figuur 3.25. We zullen deze berekening verderop in de cursus regelmatig gebruiken.



$$\tan\alpha = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$$

FIGUUR 3.25 Hoek van de lijn berekenen met de coördinaten

Tweedimensionale ruimte
Driedimensionale ruimte

Tot nu toe hebben we in 'het platte vlak' gewerkt. We noemen dat ook wel de *tweedimensionale ruimte*. We kunnen ook in de *driedimensionale ruimte* werken. Ook daar kunnen we een oorsprong definiëren, en vervolgens een assenstelsel, nu met drie assen. Punten in de drie-dimensionale ruimte geven we aan met drie coördinaten, bijvoorbeeld $P(3, 2, 4)$. De oorsprong is $O(0, 0, 0)$.
De formule voor de afstand tussen twee punten $A(a_1, a_2, a_3)$ en $B(b_1, b_2, b_3)$ in de drie dimensionale ruimte heeft dezelfde opbouw als die in het platte vlak:

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Analoog aan de definitie van een cirkel kunnen we een bol nu definiëren als de verzameling punten die gelijke afstand hebben tot een middelpunt M.

We hebben nu de twee- en driedimensionale ruimtes bekeken. Punten erin hebben twee of drie coördinaten. Maar we zouden ook punten met meer coördinaten kunnen definiëren, bijvoorbeeld met 4 of 5 coördinaten, of nog meer. Deze punten bij elkaar vormen dan weer nieuwe verzamelingen die we dan de 4- of 5-dimensionale ruimte noemen. Al die ruimtes noemen we 'Euclidische ruimtes', zolang het afstandsbegrip op soortgelijke wijze is gedefinieerd als hiervoor in de driedimensionale ruimte.

OPGAVE 3.14
Bereken de afstand tussen de volgende punten:
a $A(1, 2)$ en $B(3, 5)$
b $C(-2, 2)$ en $D(1, 5)$
c $E(-1, -3)$ en $F(4, 5)$

OPGAVE 3.15
a Bereken de tangens van de hoek die de lijn door de punten $(0, -1)$ en $(3, 2)$ maakt met de x-as.
b Wat is de grootte van de hoek in graden en radialen?

OPGAVE 3.16
Bereken in de driedimensionale ruimte de afstand tussen de punten $A(1, 4, 0)$ en $B(3, 1, 2)$.

OPGAVE 3.17

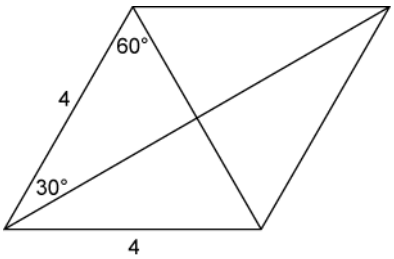
Gegeven is een cirkel met straal 7, en middelpunt (0, 0). Valt het punt (3, 6) binnen of buiten de cirkel? En het punt (–6, –4)?

SAMENVATTING

Punten en lijnen zijn elementaire meetkundige concepten waarmee op wiskundige wijze verbanden in de ruimte kunnen worden beschreven. Met lijnstukken kunnen wiskundige objecten worden gemaakt, zoals driehoeken en vierkanten.
In een rechthoekige driehoek geldt de stelling van Pythagoras: de som van de kwadraten van de rechthoekszijden is gelijk aan het kwadraat van de schuine zijde: $a^2 + b^2 = c^2$.
Hoeken waaronder lijnen elkaar snijden kunnen worden weergegeven in graden of in radialen. 360° komt overeen met 2π radialen.
Aan een hoek zijn sinus, cosinus en tangens gekoppeld. De waarden van sinus, cosinus en tangens kunnen voor hoeken van 30°, 45° en 60° bepaald worden met behulp van rechthoekige driehoeken.
Punten kunnen in een euclidische ruimte worden vastgelegd door hun coördinaten. In de tweedimensionale ruimte kan de afstand tussen twee punten bepaald worden door toepassing van de stelling van Pythagoras.

ZELFTOETS

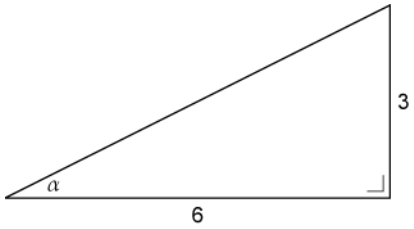
1 In de onderstaande figuur is een parallellogram getekend, met daarin twee diagonalen. Bij twee hoeken en twee zijden is aangegeven hoe groot ze zijn.



FIGUUR 3.26

a Bepaal de grootte van alle hoeken in de figuur.
b Bepaal de oppervlakte van het parallellogram.

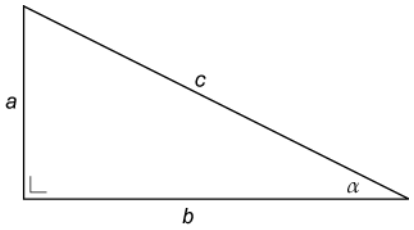
2 Gegeven is onderstaande rechthoekige driehoek.



FIGUUR 3.27

a Bepaal de lengte van de hypotenusa.
b Bepaal sin α, cos α, tan α.

3 Gegeven is onderstaande rechthoekige driehoek.



FIGUUR 3.28

a Druk sin α en cos α uit in a, b en c.
b Laat zien dat de volgende gelijkheid geldt: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

4 Wat zijn de waarden van $\sin(\pi/4)$, $\cos(\pi/4)$ en $\tan(\pi/4)$?

5 Gegeven is een vierkant waarvan de lengtes van de zijden gelijk zijn aan 1. In het vierkant wordt een zo groot mogelijke cirkel getekend. Wat is de oppervlakte van deze cirkel?

6 In de driedimensionale ruimte bevindt zich een bol, met als middelpunt de oorsprong. Het punt (4, 3, 12) bevindt zich op de oppervlakte van de bol. Wat is de straal van de bol?

Functies en grafieken

Introductie *73*

Leerkern *74*

1 Functies *74*
2 Lineaire functies *76*
3 Kwadratische functies *81*
4 Polynomiale functies *83*
5 Wortelfuncties *84*
6 Absolute-waardefuncties *85*
7 Gebroken functies *87*
8 Exponentiële functies *89*
9 Logaritmische functies *90*
10 Goniometrische functies *91*
11 Functies schalen, spiegelen en verschuiven *96*
12 Functies combineren *101*
13 Inverse functies *102*

Samenvatting *104*

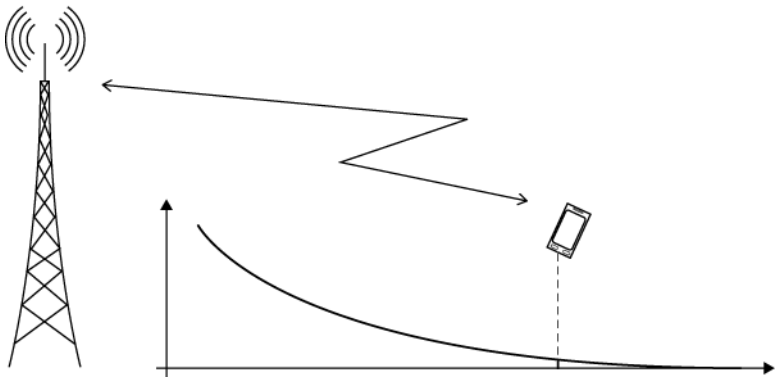
Zelftoets *105*

Leereenheid 4

Functies en grafieken

INTRODUCTIE

Computers, telefoons, modems en andere apparaten communiceren vaak draadloos met elkaar. Ze bevatten daartoe zenders en ontvangers en gebruiken elektromagnetische signalen. Vaak ook worden de signalen opgevangen door zendmasten of tussenstations, die de signalen dan weer verder transporteren.
Als de afstand tussen zender en ontvanger te groot is, dan komt het signaal niet meer door, want 'het is te zwak'. Hoe de sterkte van een signaal afhangt van de afstand tot de zender kan weergegeven worden in een plaatje.



FIGUUR 4.1 Als de afstand toeneemt, neemt de signaalsterkte af

De informatie in het plaatje, of het grafiekje, kan worden gebruikt om na te gaan wanneer het signaal beneden een bepaalde waarde komt, en niet meer ontvangen kan worden. Die informatie kan weer gebruikt worden om op een optimale wijze zendmasten te plaatsen, of stations voor draadloze communicatie in een gebouw. Om het verband tussen de afstand en de signaalsterkte goed te kunnen analyseren, moeten we kunnen rekenen met de informatie die in het plaatje staat. We zullen in deze leereenheid kijken hoe we dat met wiskunde kunnen doen. We gebruiken daar functies voor, en we maken daar plaatjes van in grafieken.

LEERDOELEN
Na het bestuderen van deze leereenheid wordt verwacht dat u
- weet wat functies zijn, definities en notaties kent
- van functies domein en bereik kunt bepalen
- functiewaarden kunt berekenen en grafieken kunt schetsen van eenvoudige lineaire, kwadratische, polynomiale, wortel, absolute waarde, gebroken, exponentiële, logaritmische en goniometrische functies

CC BY NC ND

– functies kunt samenstellen
– functies kunt schalen, spiegelen en verschuiven en weet hoe die operaties samenhangen met wijzingen in de functievoorschriften
– de definitie kent van inverse functies en kunt nagaan of functies elkaars inverse zijn.

LEERKERN

1 Functies

De in de introductie genoemde signaalsterkte is afhankelijk van de afstand tussen de zender en ontvanger. Op basis van natuurkundige principes kan afgeleid worden dat het verband is weer te geven met de volgende formule:

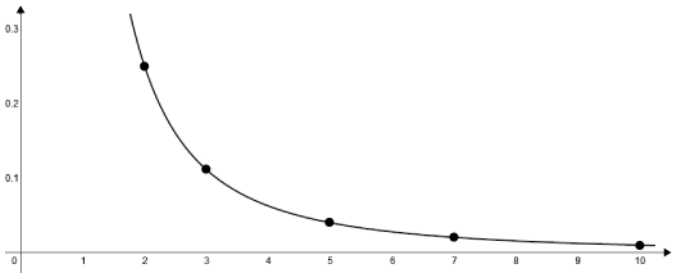
$$s = \frac{1}{a^2}$$

Hierin is a de afstand, en s is de signaalsterkte. De eenheden voor afstand en signaalsterkte zijn zodanig gekozen dat de teller in de breuk gelijk is aan 1. Voor iedere waarde van a, is daarmee een waarde van s te berekenen. Met de formule kunnen we een tabelletje maken, waarin voor verschillende waarden van de afstand staat wat de signaalsterkte is.

TABEL 4.1

a	2	3	5	7	10	…
s	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{100}$	…

Als we nu een assenstelsel tekenen, zoals we dat in de vorige leereenheid hebben geïntroduceerd, dan kunnen we daarin bij iedere afstand a aangeven wat de signaalsterkte s is, door een punt (a, s) te tekenen. Doen we dat voor de punten die we in de tabel hebben berekend, en voor nog veel meer punten daar tussenin, dan ontstaat het plaatje zoals hieronder is weergegeven.



FIGUUR 4.2 Verband tussen afstand en signaalsterkte

Ingangswaarde
Uitgangswaarde

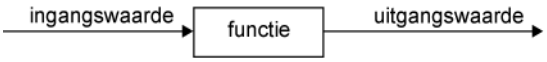
We kunnen voor iedere afstand de formule gebruiken en een signaalsterkte berekenen. Steeds komt daar precies één waarde uit. We hebben als het ware een proces met een *ingangswaarde* (de afstand), voeren een berekening uit, en het resultaat is een *uitgangswaarde* (de signaalsterkte).

Functie

Het proces dat we hier uitvoeren, met een ingangswaarde een berekening uitvoeren die een zeker resultaat oplevert, is een fundamentele activiteit in de wiskunde. Dat proces wordt een *functie* genoemd: we kiezen een waarde, voeren een berekening volgens een bepaald procedé uit en vinden een resultaat.

Variabele

We hebben steeds één ingangswaarde gekozen, maar we kunnen iedere keer andere ingangswaarden kiezen. De ingangswaarde is dus variabel. We noemen daarom dit soort functies 'functies van één *variabele*'. Er bestaan ook functies die meerdere ingangswaarden nodig hebben voor dat het resultaat kan worden berekend, maar die functies bekijken we niet in deze cursus. Er is echter altijd maar één uitgangswaarde bij een functie.



FIGUUR 4.3 Een functie bepaalt bij een ingangswaarde een uitgangswaarde

Grafiek

Als we de ingangswaarde en de uitgangswaarde als de coördinaten van een punt opvatten, dan kunnen we dat punt in een assenstelsel weergeven, zoals we in figuur 4.2 hebben gedaan. En als we dat voor verschillende ingangswaarden doen, dan ontstaat het plaatje dat bij de functie hoort, en dat noemen we de *grafiek* van de functie.

OPGAVE 4.1

Als we de lengte l van een zijde van een vierkant kennen, dan kunnen we de oppervlakte o berekenen met de formule $o = l^2$.

a Maak een tabelletje en bereken voor verschillende waardes van l de oppervlakte van het vierkant. Kies voor l de waarden 1, 2, 3, 4, 5.

b Teken de grafiek die bij de functie hoort.

Er bestaan verschillende notaties van functies die door elkaar worden gebruikt. Soms is de ene notatie handiger of duidelijker, soms de andere. Ook in deze cursus zullen we verschillende notaties gebruiken. Om naar een functie te kunnen verwijzen, moeten we haar een naam geven, bijvoorbeeld f. Vaak ook gebruiken we g of h, maar in principe is iedere naam mogelijk. Voor de ingangsvariabele kiezen we vaak de letter x. Voeren we de berekening van de functie uit, dan noteren we het resultaat met $f(x)$. We kunnen dit weergeven met de volgende notatie.

$$f\colon x \to f(x)$$

Functievoorschrift
Argument

We zeggen: de functie f beeldt de waarde x af op $f(x)$. De uitdrukking $f(x)$ wordt ook wel het *functievoorschrift* genoemd. De ingangswaarde x wordt ook wel het *argument* van de functie genoemd.

Als we de uitgangswaarde $f(x)$ opvatten als de y-coördinaat van een punt dat als x-coördinaat de ingangswaarde x heeft, dan schrijven we ook wel:

$$y = f(x)$$

Vergelijking

We noemen dit de *vergelijking* van de functie f. In de volgende paragrafen zien we concrete voorbeelden van functies, functievoorschriften en vergelijkingen van functies.

VOORBEELD 4.1

Het verband tussen afstand en signaalsterkte dat we hiervoor hebben geïntroduceerd, kunnen we S noemen en weergeven met de functie:

$S: a \rightarrow s$

Het functievoorschrift is:

$$S(a) = \frac{1}{a^2}$$

En de vergelijking die bij de functie hoort is:

$$s = \frac{1}{a^2}$$ «

Domein
Origineel

De verzameling waarden die we kunnen kiezen als ingangswaarden, wordt het *domein* van een functie genoemd. Een ingangswaarde wordt ook wel een *origineel* genoemd. Het domein is dus de verzameling originelen.

Bereik
Beeld

De verzameling uitgangswaarden die aangenomen worden, als alle mogelijke ingangswaarden worden doorlopen, wordt het *bereik* van een functie genoemd. Een uitgangswaarde wordt ook wel het *beeld* van het origineel genoemd, dus de verzameling beelden is het bereik.
In het voorbeeld hiervoor met de functie die het verband tussen de afstand en de signaalsterkte weergeeft, kunnen we voor de afstand alle waarden groter dan 0 kiezen, dus het domein is $\langle 0, \rightarrow \rangle$. Als we de grafiek voor alle afstanden zouden tekenen, dus ook voor heel kleine afstanden, dan worden alle mogelijke positieve waarden bereikt, dus het bereik is ook $\langle 0, \rightarrow \rangle$. Wiskundig klopt dit wel, maar we merken op dat het model voor heel kleine waarden niet meer realistisch zal zijn.

OPGAVE 4.2

We bekijken de functie die in opgave 4.1 is geïntroduceerd en noemen die O.

a Geef het functievoorschrift van de functie en de bijbehorende vergelijking.

b Wat is het domein en wat is het bereik van de functie?

In de volgende paragrafen bekijken we verschillende typen wiskundige functies.

2 Lineaire functies

Lineaire functie

Het eerste type functie dat we gaan bekijken is de *lineaire functie*. Dit type functies heeft de volgende vorm:

$f: x \rightarrow ax + b$

Parameters

Voor a en b kunnen we alle mogelijke reële getallen kiezen. We noemen a en b *parameters*, x is de variabele. De bijbehorende vergelijking is: $y = ax + b$.

Als we voor een functie f voor a en b de waarden 2 en –3 kiezen, en voor een functie g voor a en b de waarden –1 en 4 kiezen, dan krijgen we de volgende functies:

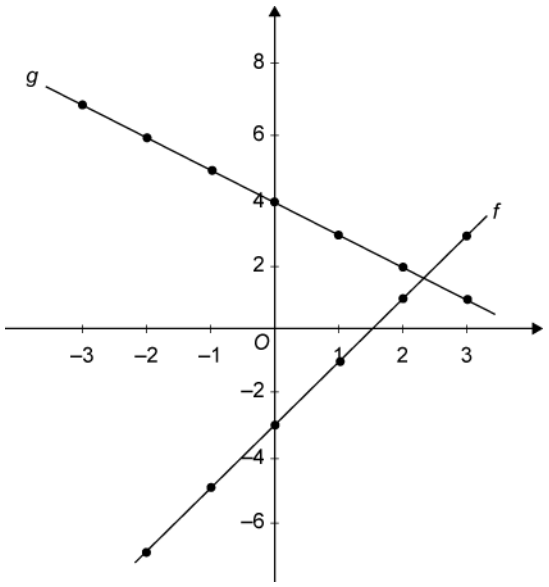
f: $x \to 2x - 3$
g: $x \to -x + 4$

We kunnen voor allerlei waarden van x de uitgangswaarden van de functies berekenen. In principe kunnen we dat doen voor ieder reëel getal x. Het domein van de functies is dus de hele verzameling $\mathbb{R}$. We berekenen voor enkele waarden van x de functiewaarden en geven die weer in onderstaande tabel.

TABEL 4.2

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	–9	–7	–5	–3	–1	1	3
$g(x)$	7	6	5	4	3	2	1

Zowel voor de functie f als voor de functie g kunnen we nu punten van hun grafieken bepalen. Dat zijn punten $(x, f(x))$ en $(x, g(x))$, voor verschillende waarden van x. Zo vinden we voor f de punten (–3, –9), (–2, –7), ... En voor g vinden we de punten (–3, 7), (–2, 6), … We tekenen die punten in onderstaand assenstelsel.



FIGUUR 4.4 De grafieken van de lineaire functies f en g

Als we voor veel meer waarden van x punten van de grafieken van f en g zouden bepalen, en die in het assenstelsel zouden intekenen, dan ontstaan vanzelf de lijnen, zoals in de figuur zijn weergegeven. We zien dat de grafieken van f en g rechte lijnen zijn.

Zonder het te bewijzen vermelden we hier dat voor iedere keuze van a en b, de grafiek van de functie met vergelijking $y = ax + b$ een rechte lijn is. Verder zien we dat als we de coördinaten van een punt (x, y) dat op de grafiek ligt, invullen in de vergelijking, de vergelijking klopt. Zo ligt het punt $(2\frac{1}{2}, 2)$ op de grafiek van f. De vergelijking van f is $y = 2x - 3$, en als we voor x de waarde $2\frac{1}{2}$ invullen en voor y de waarde 2, dan komt er te staan: $2 = 2 \cdot 2\frac{1}{2} - 3 = 5 - 3 = 2$. En dat klopt, want voor- en achteraan staan dezelfde waarden.

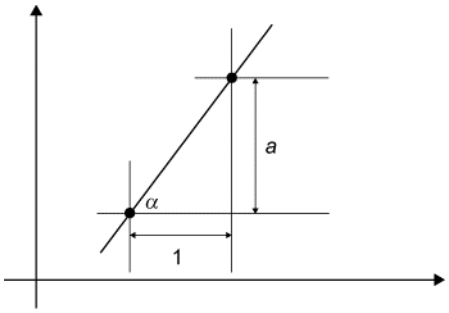
OPGAVE 4.3

a Bereken enkele punten van de grafieken van de functies f: $x \to x + 2$ en g: $x \to -2x + 4$ en teken de grafieken.
b Ga na dat het punt $(-1, 1)$ op de grafiek van f ligt en het punt $(1, 2)$ op de grafiek van g.

We kijken wat nader naar het functievoorschrift f: $x \to ax + b$ van de lijnen. Als x gelijk is aan 0, dan is $f(x) = f(0) = a \cdot 0 + b = b$. Dat betekent dat het punt $(0, b)$ een punt is van de grafiek van f, ofwel, de lijn die de grafiek van f is, snijdt de y-as op de hoogte b.
We kijken nu naar a. Als a positief is, dan neemt $f(x)$ toe, als x toeneemt. In de grafiek zien we dan dat de lijn stijgt, immers gaan we verder naar rechts, dan komt de grafiek hoger. Hoe groter a, hoe sterker de stijging. En als a negatief is (zoals bij de functie g, waar $a = -1$), dan hebben we een dalende lijn, en een dalende functie.
De waarde van a geeft de richting van de lijn aan, en wordt dan ook *richtingscoëfficiënt* genoemd.

Richtingscoëfficiënt

In onderstaande figuur zien we dat de waarde van de richtingscoëfficiënt a gelijk is aan de waarde van de tangens van de hoek die de lijn maakt met de x-as. Als x met 1 toeneemt, dan neemt de functiewaarde toe met a (als a positief is; anders neemt de functie met die waarde af). De tangens van de aangegeven hoek is $a/1 = a$.

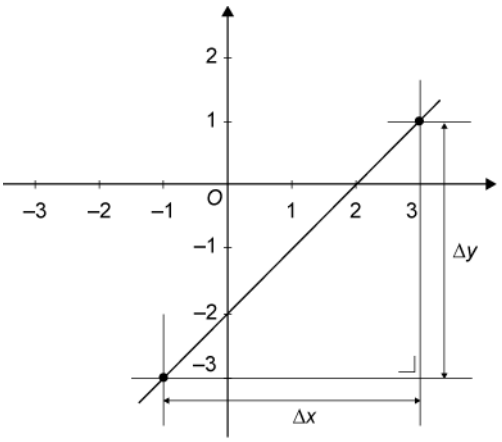


FIGUUR 4.5 De tangens van de hoek tussen de lijn en een horizontale lijn is gelijk aan de richtingscoëfficiënt

De richtingscoëfficiënt van een lijn is gelijk aan de tangens van de hoek die de lijn maakt met de x-as (of een willekeurig andere horizontale lijn). Dit betekent dat als we de coördinaten kennen van twee punten op de lijn, we de richtingscoëfficiënt kunnen berekenen.

VOORBEELD 4.2

Bekijk de lijn in onderstaande grafiek. Op de lijn liggen de punten (–1, –3) en (3, 1). Met de punten en de lijn vormen we een rechthoekige driehoek, zoals getekend in figuur 4.6. Het verschil van de y-waarden noemen we Δy en het verschil van de x-waarden Δx.
Spreek Δy uit als 'delta y'; Δ is de Griekse letter voor d. We gebruiken de Griekse d, omdat we het hebben over verschillen, ook wel differenties genoemd.



FIGUUR 4.6 Berekening van de richtingscoëfficiënt door deling van het verschil van de y-waarden Δy door het verschil van de x-waarden Δx

De richtingscoëfficiënt van de lijn door (–1, –3) en (3, 1) is nu gelijk aan het quotiënt van Δy en Δx. Om Δy te berekenen, nemen we de y-coördinaat van het tweede punt (dat is 1) minus de y-coördinaat van het eerste punt (dat is –3). Dus $\Delta y = 1 - (-3)$. Om Δx te berekenen, nemen we de x-coördinaat van het tweede punt (dat is 3) minus de x-coördinaat van het eerste punt (dat is –1). Dus $\Delta x = 3 - (-1)$. We kunnen nu a berekenen als quotiënt van Δy en Δx.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-(-3)}{3-(-1)} = \frac{4}{4} = 1$$

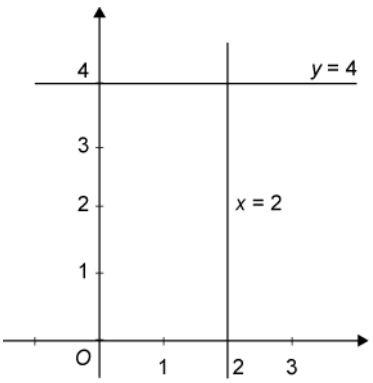
Als we ook weten in welk punt de grafiek door de y-as gaat, dan kennen we ook de waarde van b in de vergelijking. In dit geval is het snijpunt met de y-as (0, –2), dus de vergelijking van de lijn is $y = 1 \cdot x - 2$, ofwel $y = x - 2$. «

OPGAVE 4.4

De grafiek van de functie f gaat door (–1, –1) en (3, 2). De grafiek van g gaat door (0, 2) en (4, 0).

a Teken in een assenstelsel de grafieken van de functies.
b Bereken de richtingscoëfficiënten van de grafieken.
c Welke richtingscoëfficiënt is positief, welke negatief? Welke functie is stijgend en welke dalend?
d Lees uit de tekening af in welke punten de grafieken de y-as snijden.
e Stel de functievoorschriften en de vergelijkingen op van de functies.

Er zijn in het platte vlak twee bijzondere (verzamelingen) rechte lijnen, de horizontale en de verticale lijnen. We bekijken die apart.
Als we in het functievoorschrift f: $x \to ax + b$, voor a de waarde 0 kiezen, en voor b de waarde 4, dan krijgen we de functie met functievoorschrift f: $x \to 4$. Deze functie koppelt aan iedere ingangswaarde x, de uitgangswaarde 4. Voor iedere x dus dezelfde uitgangswaarde! Als we nu alle punten $(x, 4)$ tekenen, met x een willekeurig reëel getal en $y = 4$, dan krijgen we alle punten die even ver boven de x-as liggen, en dat geeft in de grafiek een horizontale lijn, zie figuur 4.7. Als we in plaats van 4 een ander getal zouden kiezen, dan krijgen we een andere horizontale lijn. Voor negatieve getallen, worden dat lijnen onder de x-as.
Voor de vergelijking van de lijn vinden we: $y = 4$. We kunnen dit ook als volgt interpreteren: ieder punt (x, y) dat op de lijn ligt moet aan de vergelijking voldoen. Blijkbaar doet de waarde van x er niet toe (want die komt niet de vergelijking voor), als maar geldt dat $y = 4$. En dat geldt precies voor de punten op de horizontale lijn. Verder zien we ook dat de lijn door het punt $(0, 4)$ gaat, dat op de y-as ligt.



FIGUUR 4.7 De horizontale lijn met vergelijking $y = 4$ en de verticale lijn met vergelijking $x = 2$

Als we ons afvragen wat het functievoorschrift is van een functie met als grafiek een verticale lijn, dan komen we in de problemen. Immers, de verticale lijn kan niet de grafiek van een functie zijn. Want bij één waarde voor x, zijn er meerdere waarden van y, waarbij het punt (x, y) op de grafiek ligt. Maar de voorwaarde die we gesteld hadden bij functies is, dat er bij iedere ingangswaarde (x), maar één uitgangswaarde (y) is. De verticale lijn is dus niet de grafiek van een functie. Of, anders gezegd, er is geen functie die als grafiek een verticale lijn heeft.
Toch kunnen we nog wel iets met de grafiek van de verticale lijn, namelijk door naar de vergelijking te kijken van de vorm $x = a$, waarin a een getal is. Bijvoorbeeld $x = 2$. Als we nu nagaan welke punten (x, y) voldoen aan de vergelijking $x = 2$, dan zijn dat alle punten met x-coördinaat 2, en willekeurige y-coördinaat. Maar dat zijn precies alle punten die op de verticale lijn liggen die door het punt $(2, 0)$ gaat. Of in het algemeen:
– Alle punten (x, y) waarvoor geldt $y = a$, liggen op een horizontale lijn door $(0, a)$.
– Alle punten (x, y) waarvoor geldt $x = a$, liggen op een verticale lijn door $(a, 0)$.

OPGAVE 4.5

a Teken de grafiek van de functie f: $x \to 1$. Wat zijn de coördinaten van het snijpunt met de y-as?

b Teken de grafiek van de lijn met vergelijking $x = -2$. Wat zijn de coördinaten van het snijpunt met de x-as?

OPGAVE 4.6

a Teken in een assenstelsel de horizontale lijn door het punt (1, –1) en de verticale lijn door het punt (3, 3).

b Stel de vergelijkingen op van de lijnen.

c Aan welke vergelijking voldoen de punten die op de x-as liggen? En aan welke vergelijking voldoen de punten die op de y-as liggen?

3 Kwadratische functies

De tweede groep functies die we gaan bekijken hebben functievoorschriften van de volgende vorm:

$f: x \to ax^2 + bx + c$

Kwadratische functie
Tweedegraadsfunctie
Tweedemachtsfunctie

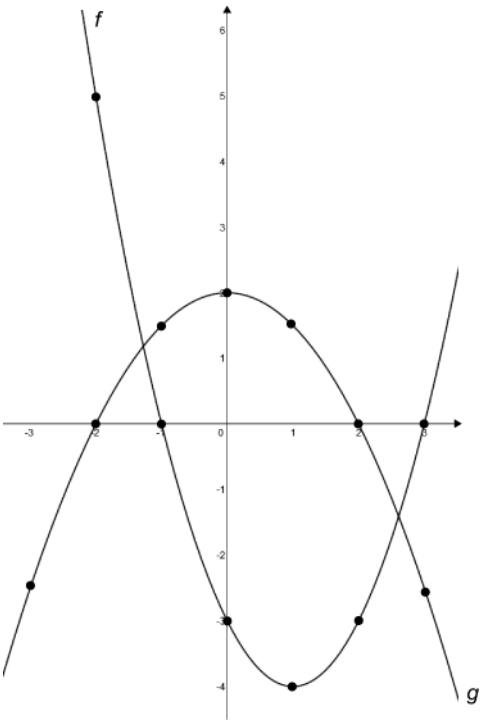
We zien dat in het functievoorschrift x in het kwadraat voorkomt, vandaar de naam *kwadratische functie*. De functies worden ook wel *tweedegraadsfuncties*, of *tweedemachtsfuncties* genoemd, omdat x tot de tweede graad of tweede macht voorkomt.
Er zijn drie parameters, a, b en c. Voor verschillende waarden van de parameters volgen verschillende functies, bijvoorbeeld:

$f: x \to 2x^2 + 4x - 7$
$g: x \to x^2 - 11$
$h: x \to -5x^2 + 3x$

We zien dat de term met x-kwadraat altijd voorkomt, vermenigvuldigd met een coëfficiënt die eventueel negatief kan zijn (dat betekent dus dat $a \neq 0$). De term met x kan voorkomen, maar ook niet (de coëfficiënt is dan 0, ofwel $b = 0$), evenals de term zonder x (als die term niet voorkomt, dan is die term gelijk aan 0, ofwel $c = 0$).
Op gelijke wijze als bij de lineaire functies kunnen we waarden kiezen voor x en de functiewaarden uitrekenen, en er een grafiek bij maken. Hieronder geven we de tabel met enkele berekende functiewaarden van de functies $f: x \to x^2 - 2x - 3$ en $g: x \to -\frac{1}{2}x^2 + 2$. Daarna volgt een figuur met de grafieken van de functies die we vinden als we voor veel waarden van x de bijbehorende functiewaarden zouden berekenen.

TABEL 4.3

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x) = x^2 - 2x - 3$	12	5	0	–3	–4	–3	0
$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$	$-2\frac{1}{2}$	0	$1\frac{1}{2}$	2	$1\frac{1}{2}$	0	$-2\frac{1}{2}$



FIGUUR 4.8 De grafieken van de kwadratische functies f en g

Parabool

De vorm van de grafieken van de kwadratische functies wordt *parabool* genoemd. Als de coëfficiënt voor x-kwadraat positief is, dan wordt de waarde van de functie heel groot als x heel groot of heel klein (sterk negatief) wordt. De grafiek lijkt op een dal, daarom spreken we van een

Dalparabool

dalparabool. Als de coëfficiënt voor de x-kwadraat negatief is, zoals bij de functie g in figuur 4.8 dan lijkt de grafiek meer op een berg, en

Bergparabool

spreken we over een *bergparabool*. Als a een waarde dicht bij 0 is, dan zijn de dal- en bergparabolen vlakker, dan voor waarden die verder van 0 liggen.

Top

De *top* van de parabool wordt het punt genoemd waar de uiterste waarde wordt aangenomen. Voor de grafiek van f in figuur 4.8 is dat het punt $(1, -4)$. Voor de grafiek van g in figuur 4.8 is dat het punt $(0, 2)$.
In de grafieken kunnen we goed zien, dat voor iedere waarde van x een functiewaarde kan worden berekend. Het domein is dus $\mathbb{R}$. Maar niet alle waarden worden aangenomen, en de waarden die aangenomen worden zijn voor iedere kwadratische functie anders. De waarden die de functie f in figuur 4.8 aanneemt zijn -4 of groter. Het bereik van f is dus het interval $[-4, \rightarrow\rangle$. Op soortgelijke wijze vinden we dat het bereik van g gelijk is aan $\langle\leftarrow, 2]$.

OPGAVE 4.7

a Bereken een aantal punten en teken de grafieken van de functies $f\colon x \rightarrow \frac{1}{2}x^2 + x$ en $g\colon x \rightarrow -2x^2 + 4$ en teken de grafieken.
b Wat zijn de coördinaten van de toppen van de functies?
c Welke grafiek is een bergparabool, welke een dalparabool?
d Wat is het domein van de functies? En wat is het bereik?

4 Polynomiale functies

Polynomiale functies
Hogeremachts-functies
Hogeregraads-functies

In de functievoorschriften in de vorige paragraaf kwam als hoogste macht een kwadraat van x voor. We kunnen natuurlijk ook hogere machten meenemen. Samen met de lineaire en de kwadratische functies krijgen we dan de verzameling *polynomiale functies*. Ze worden ook wel *hogeremachtsfuncties*, of *hogeregraadsfuncties* genoemd. Of, als bijvoorbeeld 4 de hoogste macht is, vierdegraads- of vierdemachtsfuncties.

Polynoom

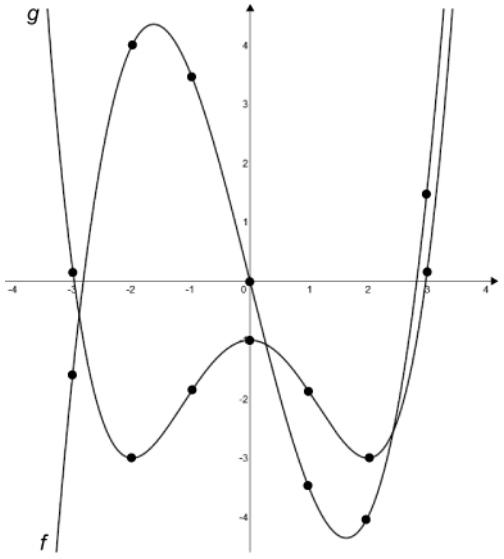
Een *polynoom* heeft in het functievoorschrift een som van verschillende machten van de variabele.
We geven weer enkele voorbeelden.

$f\colon x \to \frac{1}{2}x^3 - 4x$
$g\colon x \to \frac{1}{8}x^4 - x^2 - 1$
$h\colon x \to -5x^7 + \frac{1}{2}x^3 + 1$

We berekenen van de functies f en g enkele functiewaarden, waarna we de grafieken schetsen, zie de tabel en figuur hieronder.

TABEL 4.4

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x$	$-1\frac{1}{2}$	4	$3\frac{1}{2}$	0	$-3\frac{1}{2}$	–4	$1\frac{1}{2}$
$g(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 - 1$	$\frac{1}{8}$	–3	$-1\frac{7}{8}$	–1	$-1\frac{7}{8}$	–3	$\frac{1}{8}$



FIGUUR 4.9 De grafieken van de polynomen f en g

Het berekenen van functiewaarden en schetsen van grafieken is veel werk als dat handmatig gedaan moet worden. We hebben dat hier enkele keren gedaan, zodat u een beeld krijgt van hoe dat gaat.
Maar dit is natuurlijk makkelijk automatiseerbaar, en er zijn talrijke computerprogramma's, websites of rekenmachines die de berekeningen vlot voor u uitvoeren.

Polynomiale functies zijn gedefinieerd voor alle waarden van x; het domein is dus weer $\mathbb{R}$. Het bereik is per functie verschillend, en zal steeds afzonderlijk bepaald moeten worden. We kunnen daar wel de volgende opmerkingen over maken.
Als de hoogste macht van x oneven is, bijvoorbeeld 3, of 7 zoals bij de functie f en h hiervoor, dan is het bereik $\mathbb{R}$. Immers, als de coëfficiënt voor de hoogste macht positief is, dan worden de functiewaarden voor x steeds groter als x groter wordt, en steeds kleiner (sterker negatief) als x steeds kleiner wordt. Als de coëfficiënt voor de hoogste macht negatief is, dan is dit precies andersom, maar ook dan komen alle waarden van $\mathbb{R}$ in het bereik voor.
Als de hoogste macht van x even is, zoals bij de functie g hiervoor, en de coëfficiënt bij die macht positief, dan nemen de functiewaarden steeds toe bij heel grote of heel kleine x. Het bereik is dan de verzameling $[a, \rightarrow\rangle$, waarin a de kleinste waarde is die wordt aangenomen. Het minimum van de functie g is bijvoorbeeld –3, dus het bereik is dan $[-3, \rightarrow\rangle$.
Als de hoogste macht van x even is en de coëfficiënt bij die macht is negatief, dan nemen de functiewaarden steeds verder af bij heel grote of heel kleine x. Het bereik is dan de verzameling $\langle\leftarrow, a]$, waarin a de grootste waarde is die door de functie wordt aangenomen.

OPGAVE 4.8
a Bereken een aantal punten en teken de grafieken van de functies $f\colon x \rightarrow x^3 - 4x$ en $g\colon x \rightarrow -x^4 + x^2 + 4$. Bereken voor g ook de functiewaarden voor $x = -\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2}$.
b Wat is het domein van de functies? En wat is het bereik van f?

5 Wortelfuncties

Wortelfunctie

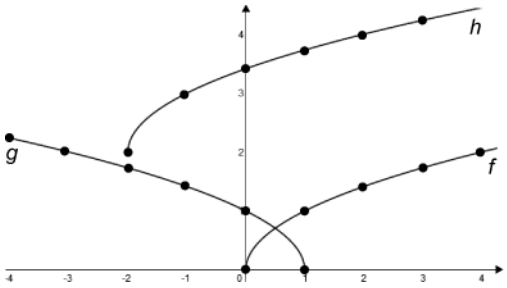
De volgende verzameling functies die we bekijken zijn de *wortelfuncties*. Dat zijn functies, waar in het functievoorschrift een wortel voorkomt. We geven weer enkele voorbeelden.

$$f(x) = \sqrt{x}$$
$$g(x) = \sqrt{-x+1}$$
$$h(x) = \sqrt{x+2} + 2$$

We beperken ons hier tot redelijk eenvoudige functievoorschriften.
In onderstaande tabel berekenen we weer een aantal functiewaarden, gevolgd door een figuur met de grafieken van de functies. Wortels van negatieve getallen zijn niet gedefinieerd, dus in die gevallen kunnen we geen functiewaarden bereken, en hebben we geen resultaten in de tabel.

TABEL 4.5

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x)=\sqrt{x}$					0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
$g(x)=\sqrt{-x+1}$	$\sqrt{5}$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0			
$h(x)=\sqrt{x+2}+2$			2	3	$2+\sqrt{2}$	$2+\sqrt{3}$	4	$2+\sqrt{5}$	$2+\sqrt{6}$



FIGUUR 4.10 De grafieken van enkele wortelfuncties

We zien dat niet voor alle waarden een functiewaarde berekend kan worden, immers de wortel kan alleen getrokken worden uit positieve getallen. Het domein van de functie f is dan ook $[0, \rightarrow\rangle$, immers, alleen voor $x \geq 0$ kunnen we de wortel berekenen. Als x toeneemt, dan nemen de functiewaarden ook steeds verder toe, dus het bereik is $[0, \rightarrow\rangle$. De functie g is alleen gedefinieerd als $x \leq 1$. Immers, alleen dan is $(-x + 1)$ positief, en kunnen we uit dat getal de wortel trekken. Het domein van g is $\langle\leftarrow, 1]$; het bereik is $[0, \rightarrow\rangle$. De functie h is alleen gedefinieerd als $x \geq -2$. Het domein is $[-2, \rightarrow\rangle$ en het bereik is $[2, \rightarrow\rangle$.

OPGAVE 4.9

a Bereken een aantal punten en teken de grafieken van de volgende functies:

$f(x)=\sqrt{-x}$
$g(x)=\sqrt{2x+2}$
$h(x)=\sqrt{x+3}-3$

b Wat is het domein van de functies? En wat is het bereik?

6 Absolute-waardefuncties

Absolute waarde

De *absolute waarde* van een getal is het getal zelf, als het positief is, en het tegengestelde als het negatief is. Dus de absolute waarde van 2 is 2, en de absolute waarde van –2 is ook 2. De absolute waarde wordt weergegeven met strepen rondom het getal.

$|-4|=4$
$\left|\frac{-2}{3}\right|=\frac{2}{3}$
$|6|=6$

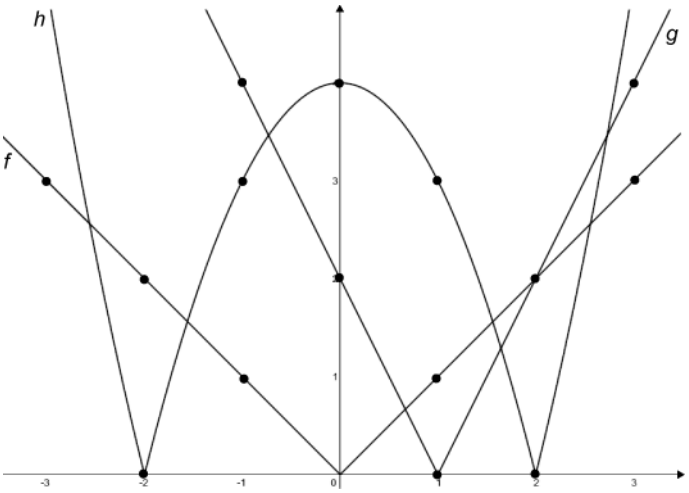
Een bijzondere klasse van functies krijgen we als we steeds de absolute waarde nemen van de functiewaarden nemen. Enkele voorbeelden:

$$f(x) = |x|$$
$$g(x) = |2x - 2|$$
$$h(x) = |x^2 - 4|$$

Ook voor deze functie bereken we weer enkele functiewaarden, gevolgd door een figuur met de grafieken van de functies.

TABEL 4.6

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x) = \|x\|$	3	2	1	0	1	2	3
$g(x) = \|2x - 2\|$	8	6	4	2	0	2	4
$h(x) = \|x^2 - 4\|$	5	0	3	4	3	0	5



FIGUUR 4.11 De grafieken van enkele absolute-waardefuncties

De functies g en h zijn de absolute waarde van een lineaire en kwadratische functie. Eerder hebben we zulke functies al bekeken, maar toen zonder de absolute waarde er van te nemen. Als u de grafieken vergelijkt, dan ziet u dat het effect van het nemen van de absolute waarde is, dat het deel van de grafiek dat onder de x-as ligt, als het ware naar boven omgeklapt wordt.

Dit is ook het geval met de functie $f\colon x \to |x|$. De functie $f\colon x \to x$ heeft een grafiek die een lijn is door de oorsprong en een hoek van 45 graden maakt met de x- en de y-as. Als we het deel van de grafiek onder de x-as, naar boven omklappen, dan krijgen we de grafiek van $|x|$, zoals aangegeven in figuur 4.11. We kunnen dat ook als volgt weergeven, waarbij we een presentatie krijgen zonder gebruik te maken van de absolute-waardestrepen:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & voor \quad x \geq 0 \\ -x & voor \quad x < 0 \end{cases}$$

OPGAVE 4.10

a Bereken een aantal punten en teken de grafiek van de volgende functies:

$f(x) = |1 - x|$
$g(x) = |1 - x^2|$

b Geef een functiebeschrijving zonder gebruik te maken van absolute-waardestrepen.
c Wat is het domein van de functies? En wat is het bereik?

In leereenheid 2 hebben we gezien dat $\sqrt{x^2} = x$ alleen geldt voor $x \geq 0$. Voor $x < 0$ geldt $\sqrt{x^2} = -x$. Maar dat komt dus precies overeen met de absolute waarde van x. Dus voor alle x geldt: $\sqrt{x^2} = |x|$.

7 Gebroken functies

Gebroken functies

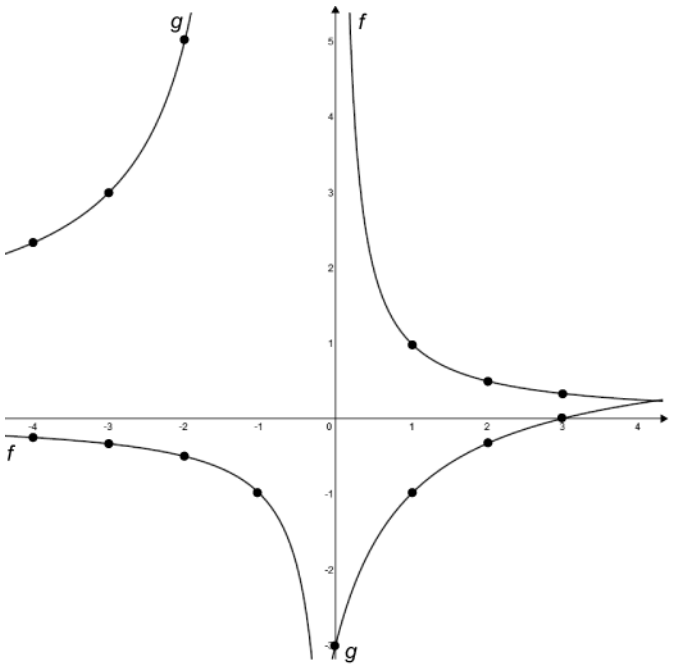
De volgende klasse functies die we bekijken zijn de *gebroken functies*, functies met in het functievoorschrift een breuk, waarin de variabele in de noemer voorkomt en eventueel ook in de teller. Enkele voorbeelden:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$
$$g(x) = \frac{x-3}{x+1}$$

Ook hier berekenen we in een tabel weer enkele functiewaarden van de functies, en tekenen we de grafieken.

TABEL 4.7

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	1		1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$g(x) = \frac{x-3}{x+1}$	$2\frac{1}{3}$	3	5		-3	-1	$-\frac{1}{3}$	0



FIGUUR 4.12 De grafieken van enkele gebroken functies

We zien dat de grafieken heel anders zijn dan de grafieken die we tot nu toe gezien hebben. In de buurt van één of meer waarden in het domein worden de functiewaarden erg groot, positief of negatief. In de buurt van 0, nemen de functiewaarden van $f(x) = 1/x$ bijvoorbeeld sterk toe naar + of – oneindig. Dat is begrijpelijk, want als we voor x heel kleine waarden kiezen (1/100, 1/10.000 of nog kleiner, dan wordt $1/x$ juist heel erg groot. En voor $x = 0$, kunnen we de functiewaarden helemaal niet uitrekenen, want een deling door 0 is niet gedefinieerd.
We kunnen nog wat zeggen over het domein van de functies. Als de noemer van de functie voor een zekere x de waarde 0 krijgt, dan kunnen we daar de functiewaarde niet berekenen. Die waarde van x hoort dus niet tot het domein. We kunnen dus vaststellen dat het domein van $f(x)$ gelijk is aan $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ en het domein van $g(x)$ is $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

OPGAVE 4.11

a Bereken een aantal functiewaarden van de functie $f(x) = 1/(x - 2)$.
b Bereken enkele extra waarden in de buurt van $x = 2$, bijvoorbeeld $1\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{4}$ en $2\frac{1}{2}$.
c Schets de grafiek van de functie. Welke x-waarde hoort niet tot het domein?

8 Exponentiële functies

Exponentiële functies

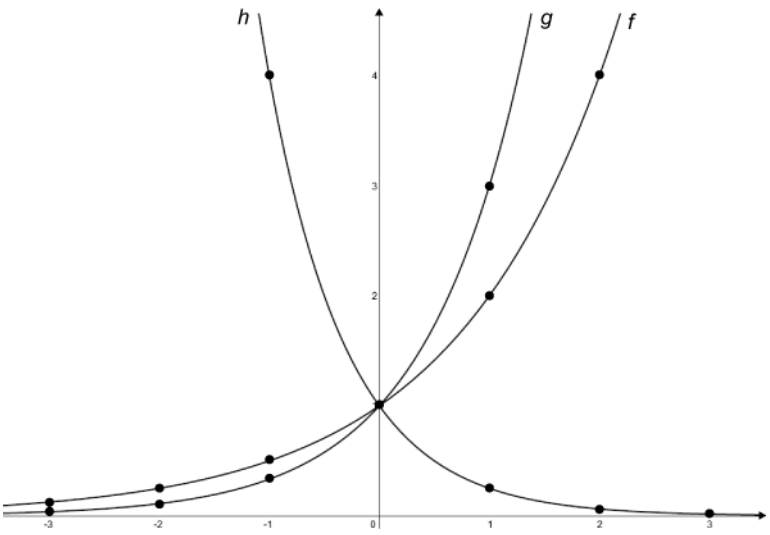
We bekijken nu *exponentiële functies*, waarbij de variabele x in de exponent van een macht voorkomt. We doen dat weer aan de hand van enkele voorbeelden. Het grondtal van de macht is steeds positief.

$f(x) = 2^x$
$g(x) = 3^x$
$h(x) = (\frac{1}{4})^x$

We berekenen weer een aantal functiewaarden en schetsen de grafieken.

TABEL 4.8

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g(x) = 3^x$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$h(x) = (\frac{1}{4})^x$	64	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$



FIGUUR 4.13 De grafieken van enkele exponentiële functies

In de figuur zien we dat de grafiek van 2^x een functie is die altijd positief is. Voor positieve waarden van x ligt dat voor de hand, maar ook voor negatieve waarden van x is de functiewaarde positief. We kunnen immers schrijven:

$$2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

We zien hierin dat als de exponent een negatieve waarde heeft ($-x$, waarin x dan weer positief is), dat we dat als breuk kunnen schrijven met in de noemer 2^x, en die is weer positief. En we kunnen ook naar de verdere uitwerking $(\frac{1}{2})^x$ kijken en zien dan ook dat het resultaat positief zal zijn.
Verder zien we in de figuur dat als het grondtal groter is, de grafiek sneller stijgt, de grafiek daalt als het grondtal kleiner is dan 1, het domein van de functies $\mathbb{R}$ is en het bereik is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
We herhalen hier nog een keer dat we alleen exponentiële functie gaan bekijken voor positieve grondtallen. Bij negatieve grondtallen zouden problemen kunnen ontstaan. Zo is $(-2)^x$ bijvoorbeeld wel gedefinieerd voor $x = 2$, maar niet voor $x = \frac{1}{2}$. Om die problemen te voorkomen, beperken we ons tot de positieve grondtallen.

OPGAVE 4.12

a Bereken functiewaarden en teken de grafieken van

$f(x) = (2/3)^x$
$g(x) = 4^x$
$h(x) = 1^x$

b Wat is het domein en bereik van deze functies?
c Wat valt op aan de functiewaarden van alle functies die we in deze paragraaf hebben bekeken voor $x = 0$?

9 Logaritmische functies

Logaritmische functies

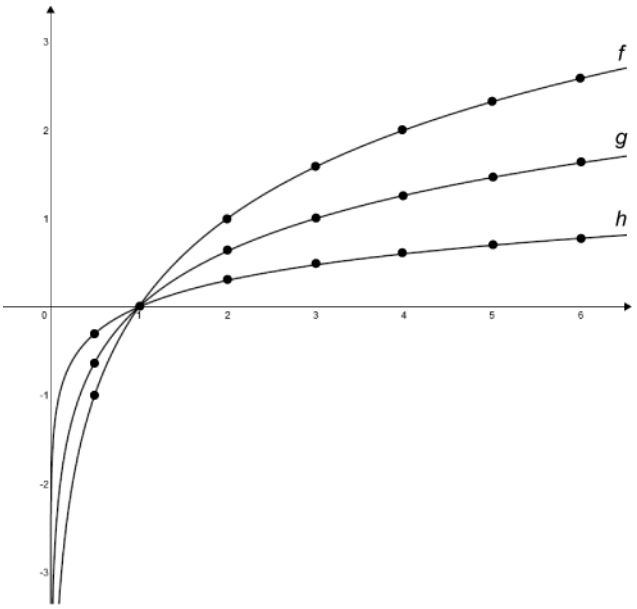
De volgende klasse van functies die we bekijken zijn de *logaritmische functies*, waarbij in het functievoorschrift een logaritme voorkomt.
De grondtallen van de logaritmische functies zijn altijd positief, om dezelfde reden als geldt bij de exponentiële functies.
Als voorbeelden gaan we de volgende functies eens nader bekijken.

$f(x) = {}^2\log x$
$g(x) = {}^3\log x$
$h(x) = {}^{10}\log x$

We berekenen weer enkele functiewaarden voor diverse waarden van x in onderstaande tabel. Voor sommige waarden, zoals ${}^2\log\frac{1}{2}$, ${}^2\log 1$ en ${}^2\log 2$ kunnen we de waarden makkelijk berekenen met behulp van de definities. Voor de overige waarden gebruiken we een rekenmachine.
Verder nemen we altijd $x > 0$, immers ${}^a\log x$ is alleen gedefinieerd voor positieve x. Kijk eventueel nog terug in leereenheid 1 voor de definities en de berekeningen met logaritmen.
We schetsen vervolgens de grafieken.

TABEL 4.9

x	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6
$f(x) = {}^2\log x$	–1	0	1	1,58..	2	2,32..	2,58..
$g(x) = {}^3\log x$	–0,63..	0	0,63..	1	1,26..	1,46..	1,63..
$h(x) = {}^{10}\log x$	–0,30..	0	0,30..	0,48..	0,60..	0,70..	0,78..



FIGUUR 4.14 De grafieken van enkele logaritmische functies

We zien we dat de functies dichter bij de x-as verlopen, naarmate het grondtal groter is. De grafieken snijden alle drie de x-as bij $x = 1$, immers de functiewaarde is daar de macht waartoe we het grondtal moeten verheffen om 1 te krijgen. En wat het grondtal ook is, als we dat tot de macht 0 verheffen, dan is het resultaat gelijk aan 1.

OPGAVE 4.13
Wat is het bereik en domein van de functies f, g en h in deze paragraaf?

NB We hebben tot nu toe steeds een beeld gekregen van de grafieken van de functies door een aantal functiewaarden te berekenen, daar de punten van in een assenstelsel te tekenen, en er een lijn of curve door te schetsen. We veronderstellen daar dan bij dat de grafiek gelijkmatig verloopt. Maar dat hoeft niet altijd zo te zijn. We zouden daar achter kunnen komen door veel meer punten te berekenen.

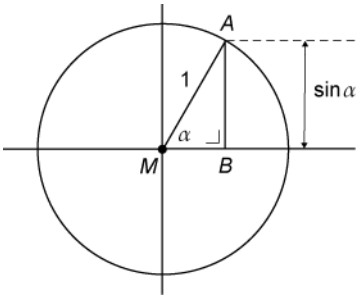
10 Goniometrische functies

Goniometrische functies

Goniometrische functies zijn een uitbreiding van de concepten sinus, cosinus en tangens, zoals gedefinieerd in de meetkunde bij rechthoekige driehoeken. In leereenheid 3 hebben we de sinus, cosinus en tangens van een hoek geïntroduceerd, als de verhoudingen tussen rechthoekszijden en de hypotenusa in een rechthoekige driehoek. In een rechthoekige driehoek kunnen we in principe op die manier voor iedere hoek tussen 0° en 90° de waarden van sinus, cosinus en tangens bepalen.
Ook in leereenheid 3 hebben we de hoek bekeken tussen twee lijnstukken die één eindpunt gemeen hebben, en waarin één lijnstuk ronddraait. Dan zijn grotere hoeken dan 90° mogelijk, en we kunnen ook negatieve hoeken definiëren door het lijnstuk de andere kant op te draaien.

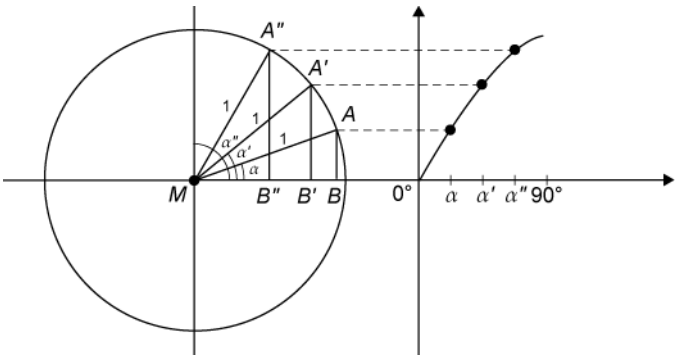
Eenheidscirkel

We combineren bovenstaande twee benaderingen, waarmee we sinus, cosinus en tangens op kunnen vatten als functies. We tekenen daartoe een cirkel met middelpunt M waarvan de straal lengte 1 heeft, zie figuur 4.15. We noemen deze cirkel de *eenheidscirkel*. In de cirkel tekenen we een horizontale en een verticale lijn door het middelpunt. Een lijnstuk vanuit het middelpunt naar een punt A op de cirkel, maakt een hoek α met de horizontale lijn. Vanuit het punt A op de cirkel tekenen we een lijnstuk AB loodrecht naar beneden tot op de horizontale lijn.



FIGUUR 4.15 De eenheidscirkel met daarin $\sin\alpha$ als de lengte van een rechthoekszijde

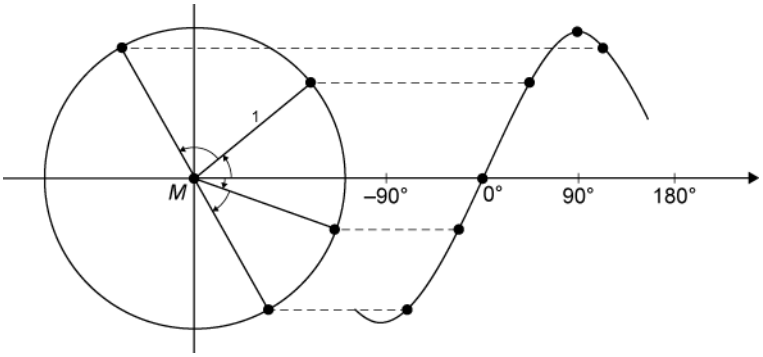
In de cirkel hebben we nu een rechthoekige driehoek MAB getekend. Per definitie is de waarde van $\sin\alpha$ gelijk aan AB/AM (overstaande rechthoekszijde gedeeld door schuine zijde). De lengte van AM is 1, zodat geldt: $\sin\alpha = AB$. Ofwel, de waarde van $\sin\alpha$ is gelijk aan de lengte van lijnstuk AB. Kiezen we de hoek α wat groter of wat kleiner, dan kunnen we steeds het lijnstuk tekenen, en steeds geldt $\sin\alpha = AB$.
In figuur 4.16 hebben we dat gedaan voor de hoeken α, α' en α'', waarbij we de lijnstukken AB, $A'B'$ en $A''B''$ hebben getekend. We zetten de groottes van hoeken α uit op de horizontale as in een assenstelsel naast de eenheidscirkel. Als we op die manier de hoek α toe laten nemen, van 0° tot 90° en bij iedere hoek de lengte van het lijnstuk bepalen, dan hebben we een functie geconstrueerd, immers, bij iedere ingangswaarde, vinden we een uitgangswaarde.



FIGUUR 4.16 Bij verschillende waarden van α horen verschillende waarden van $\sin\alpha = AB$ waarmee we de functie $\sin\alpha$ definiëren

Als we nu op een horizontale as de waarde van de hoek α uitzetten, dan is de functiewaarde gelijk aan de lengte van het bijbehorende lijnstuk. Daarmee vinden we een punt van de grafiek. We hebben dat in het rechterdeel van figuur 4.16 voor de drie waarden van α gedaan. We zien dat als α nog klein is de grafiek snel stijgt, en naarmate α dichter bij 90° komt, dat de stijging minder sterk is, tot het maximum wordt bereikt.

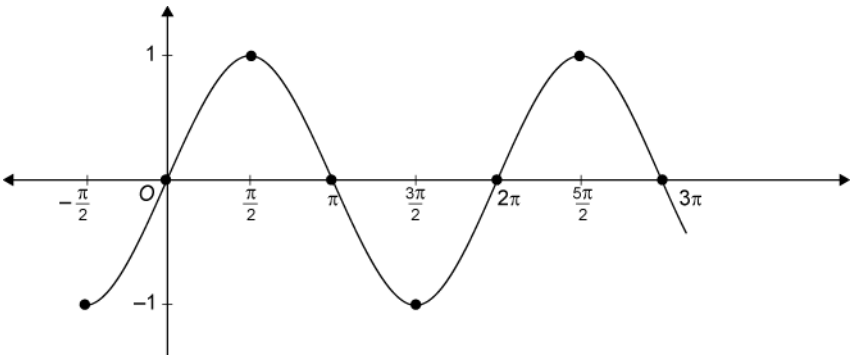
Als we nu in figuur 4.16 het lijnstuk verder rond laten draaien, en we hoeken krijgen die groter zijn dan 90° dan kunnen we nog steeds de afstand van het punt op de cirkel tot de horizontale lijn bepalen. We definiëren die afstand als de sinus van de hoek voor waarden groter dan 90°. We kunnen op dezelfde wijze de sinus voor negatieve hoeken bepalen. We hebben dit in figuur 4.17 voor een aantal hoeken gedaan.



FIGUUR 4.17 $\sin\alpha$ voor waarden van α buiten het interval [0°, 90°]

We kunnen dit nu verder voortzetten. Als het lijnstuk 360° rond is gedraaid, gaan we gewoon verder met een volgende omwenteling en hebben we hoeken van meer dan 360°. Of als we in negatieve richting zijn gedraaid, gaan we gewoon verder, voorbij –360°.
Uiteindelijk vinden we de grafiek zoals weergegeven in figuur 4.18, die oneindig door blijft slingeren, zowel voor positieve α als voor negatieve. Dit is de grafiek van de *sinusfunctie*.

Sinusfunctie

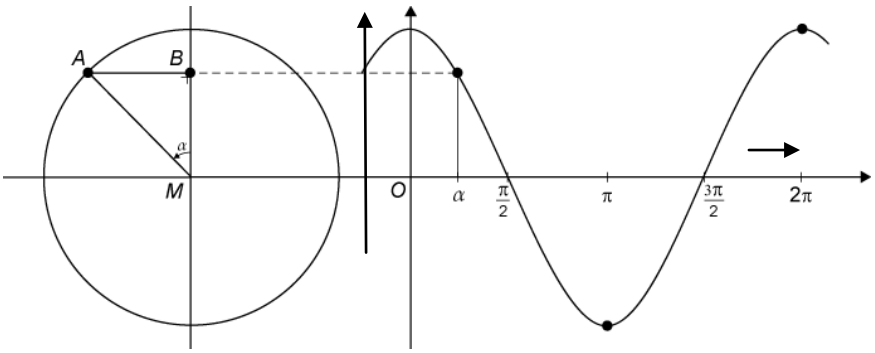


FIGUUR 4.18 De grafiek van $\sin\alpha$

In figuur 4.18 zijn we op de horizontale as naar een andere hoekeenheid overgestapt. In plaats van graden gebruiken we radialen. We zullen in het vervolg bij goniometrische functies altijd gebruik maken van deze eenheid. NB π radialen komt overeen met 180°; kijk eventueel terug in de vorige leereenheid.

We zien verder in de grafiek dat de waarde van $\sin\alpha$ maximaal 1 is, bijvoorbeeld voor $\alpha = \pi/2$. En 2π verderop, wordt die waarde opnieuw bereikt. De grafiek herhaalt zich iedere 2π radialen. De functie wordt daarom ook wel een *periodieke functie* genoemd (met periode 2π).
Periodieke functie
De minimale waarde $\sin\alpha$ is gelijk aan –1, voor $\alpha = 3\pi/2$. Die waarde wordt om de 2π bereikt.

Op soortgelijke wijze als voor de sinus, kunnen we ook voor de cosinus de grafiek maken. We laten het lijnstuk dat we gaan draaien, nu niet vanuit een horizontale positie starten, maar vanuit een verticale, zie figuur 4.19. Voor de hoek α in die figuur geldt dat $\cos\alpha$ gelijk is aan de lengte van het lijnstuk *BM*, immers $\cos\alpha$ hebben we gedefinieerd als *BM*/*AM*, (aanliggende rechthoekszijde gedeeld door schuine zijde) en omdat $AM = 1$, geldt $\cos\alpha = BM$. Dit leidt tot de grafiek van de *cosinusfunctie* zoals getekend in figuur 4.19
Cosinusfunctie



FIGUUR 4.19 De grafiek van $\cos\alpha$

De grafiek van de cosinus lijkt erg op die van de sinus. Ze zijn alleen wat verschoven ten opzichte van elkaar. Bij $\alpha = 0$ begint $\sin\alpha$ bij 0 en gaat stijgen, terwijl $\cos\alpha$ begint bij 1 en gaat dalen.

In leereenheid 3 hebben we voor enkele waarden van α met $0 < \alpha < \pi/2$ de waarden van $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ en $\tan\alpha$ bepaald (zie tabel 3.1). Op grond van symmetrieoverwegingen kunnen we nu voor veel waarden buiten het interval $\langle 0, \pi/2\rangle$ ook de waarden van de functies bepalen. Zo geldt bijvoorbeeld $\sin(5\pi/6) = \sin(\pi - \pi/6) = \sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$ en ook $\sin(7\pi/6) = -\sin(\pi/6) = -\frac{1}{2}$.

OPGAVE 4.14
a Wat is het domein en het bereik van de functies $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$?
b Voor welke waarden van α (in radialen) zijn de functiewaarden van $\sin\alpha$ gelijk aan 0?
c Voor welke waarden van α (in radialen) zijn de functiewaarden van $\cos\alpha$ gelijk aan 1? En voor welke waarden gelijk aan –1?

OPGAVE 4.15
In de vorige leereenheid zijn de waarden van $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$ bepaald voor $\alpha = \pi/6$, voor $\alpha = \pi/4$ en voor $\alpha = \pi/3$ (zie tabel 3.1).
a Wat zijn de waarden van $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$ voor $\alpha = 0$ en $\alpha = \pi/2$?
b Teken een assenstelsel en daarin de punten met coördinaten $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ voor $\alpha = 0, \pi/6, \alpha = \pi/4, \alpha = \pi/3$ en $\alpha = \pi/2$.
c Welke figuur ontstaat als we alle punten $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ tekenen met $0 \le \alpha \le \pi/2$?

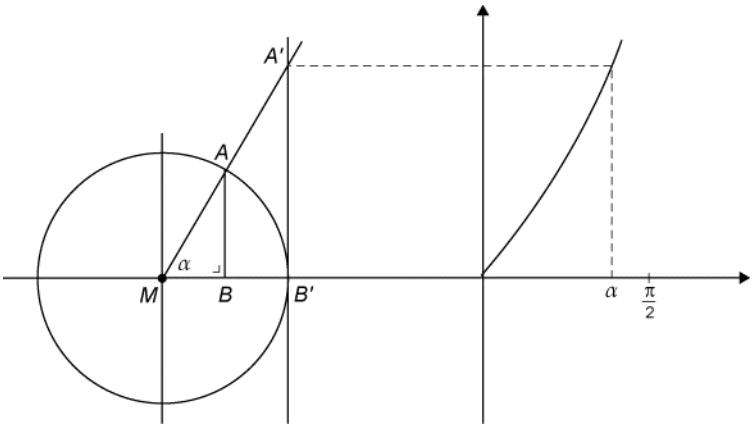
OPGAVE 4.16

Gebruik de symmetrie van de grafiek van de cosinusfunctie, om de volgende waarden te bepalen:

a $\cos(5\pi/6)$
b $\cos(3\pi/4)$
c $\cos(7\pi/4)$

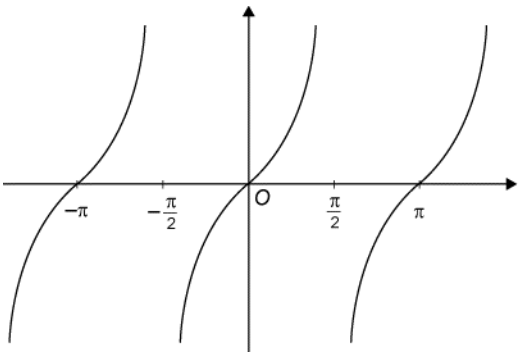
Tangensfunctie

Als laatste bekijken we in deze paragraaf de grafiek van de *tangensfunctie*. We schetsen weer een eenheidscirkel met daarop een punt A, en tekenen daarin een rechthoekige driehoek. Zie figuur 4.20.



FIGUUR 4.20 De grafiek van $\tan\alpha$ voor $0 < \alpha < \pi/2$

Er geldt dat $\tan\alpha$ gelijk is aan AB/MB (overstaande rechthoekszijde gedeeld door aanliggende rechthoekszijde). Dit is niet gelijk aan de lengte van een lijnstuk in de figuur zoals we dat konden gebruiken bij het tekenen van de grafieken van sinus en cosinus. Om toch zo'n lijnstuk te vinden, doen we het volgende. We trekken een verticale lijn, die aan de rechterkant de eenheidscirkel raakt in punt B', en we trekken lijnstuk MA door, totdat deze de verticale lijn snijdt. Het snijpunt noemen we A'. Er geldt nu dat $\tan\alpha$ ook gelijk is aan $A'B'/MB'$, en omdat $MB' = 1$, volgt dus dat $\tan\alpha = A'B'$. De waarde van $\tan\alpha$ is dus voor een bepaalde hoek α gelijk aan de lengte van het lijnstuk $A'B'$ en dat kunnen we gebruiken om een punt van de grafiek te tekenen.
Als we dit doen voor verschillende hoeken α, dan ontstaat de grafiek zoals weergegeven in figuur 4.20. Naarmate de hoek α groter wordt, schiet A' omhoog, en zeer dicht in de buurt van $\pi/2$ zal de waarde van de functie naar oneindig gaan (de lijn MA' is dan bijna verticaal, en het snijpunt komt steeds hoger).
Als α groter wordt dan $\pi/2$ dan verlengen we de lijn door M en A' naar rechtsonder, en zoeken we opnieuw het snijpunt met de verticale lijn door B'. We vinden dan een punt onder de x-as, en wat overeenkomt met een negatieve waarde van $\tan\alpha$. Als α verder toeneemt tot π, dan nadert $\tan\alpha$ tot 0. Ook voor negatieve waarden van α kunnen we op deze wijze de waarde van $\tan\alpha$ steeds bepalen. Het resulteert uiteindelijk in een grafiek, zoals weergegeven in figuur 4.21.



FIGUUR 4.21 De grafiek van tanα

Voor $\alpha = 0$ is tan $\alpha = 0$. Voor $\alpha = \pi/2$ gaat de grafiek naar +oneindig. Daarna komt de grafiek van –oneindig en gaat naar 0 voor $\alpha = \pi$. En vervolgens herhaalt de grafiek zich.

OPGAVE 4.17

a Wat is het domein en het bereik van de functie tanα?
b Voor welke waarden van α (in radialen) zijn de functiewaarden van tanα gelijk aan 0?
c Voor welke waarde van α met $0 < \alpha < \pi/2$ is de functiewaarden van tanα gelijk aan 1?

OPGAVE 4.18

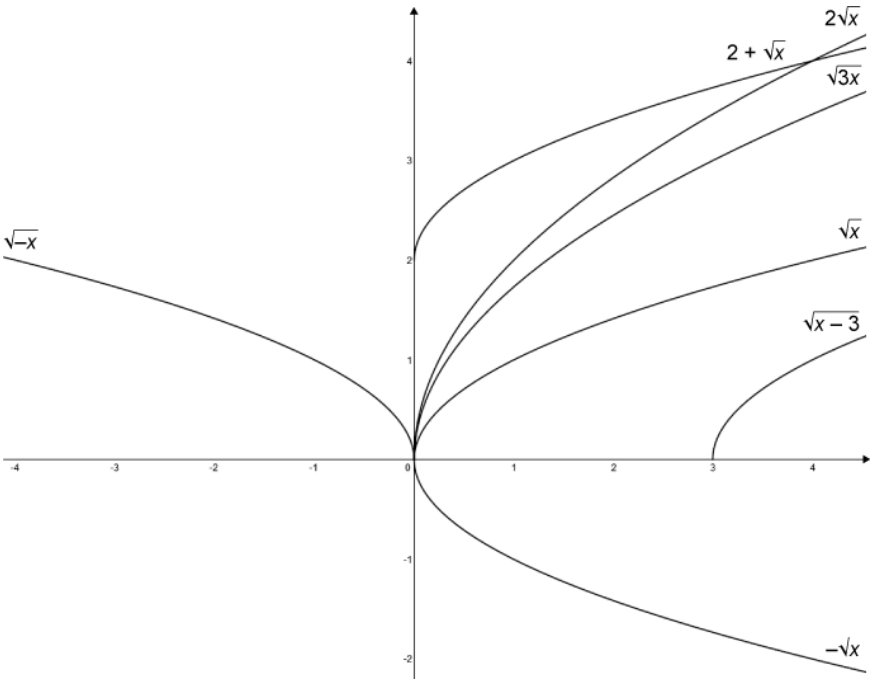
Gebruik de symmetrie van de grafiek van de tangensfunctie, om de volgende waarden te bepalen:
a tan(–π/4)
b tan(4π/3)

11 Functies schalen, spiegelen en verschuiven

In de vorige paragrafen hebben we de belangrijkste wiskundige basis-functies geïntroduceerd en de grafieken die daar bij horen bekeken. We kunnen bij deze functies eindeloos veel varianten maken, door andere parameters te gebruiken. We bekijken in deze paragraaf wat het effect is van het veranderen van de parameters.
We doen dat steeds aan de hand van de wortelfunctie f: $x \to \sqrt{x}$, en vragen u in de opgaven grafieken te schetsen van varianten van andere functies.

In figuur 4.22 zijn de grafieken getekend van

$\sqrt{x}$, $2+\sqrt{x}$, $2\sqrt{x}$, $-\sqrt{x}$, $\sqrt{3x}$, $\sqrt{-x}$ en $\sqrt{x-3}$.



FIGUUR 4.22 Grafiek van $\sqrt{x}$ en verwante functies

Het is uiteraard mogelijk om van alle functies afzonderlijk functiewaarden te berekenen en vervolgens grafiekjes te schetsen, of een computeralgebrapakket te gebruiken, om de grafieken te maken. Maar door te redeneren over de functies en de functievoorschriften kunnen we ook begrijpen wat de samenhang is tussen de verschillende grafieken.

Kijk eerst eens naar $2 + \sqrt{x}$. Voor iedere waarde van x waarvoor we $\sqrt{x}$ kunnen berekenen is daar 2 bij gekomen. De grafiek is dus als het ware 2 eenheden omhooggegaan. De grafiek van $2 + \sqrt{x}$ heeft dan ook dezelfde vorm als die van $\sqrt{x}$, maar is omhooggeschoven.

Vergelijk nu de grafieken van $\sqrt{x}$ en $2\sqrt{x}$. We zien dat de functiewaarden van $2\sqrt{x}$ allemaal precies 2 keer zo groot zijn als die van $\sqrt{x}$. Het vermenigvuldigen van een functievoorschrift met een constante, heeft dus tot gevolg dat de grafiek in verticale richting wordt geschaald. Als de constante 2 is, zoals in dit geval, dan wordt de grafiek met een factor 2 naar boven toe opgerekt. We kunnen vanzelfsprekend ook andere schalingsfactoren gebruiken. Een functie $10\sqrt{x}$, zal nog veel verder verticaal worden opgerekt. En als we een factor kleiner dan 1 (maar groter dan 0) nemen, dan zal de grafiek ingeduwd worden, richting de x-as. En nemen we een negatieve factor, bijvoorbeeld –1, zodat we als functievoorschrift $-\sqrt{x}$ krijgen, dan wordt de grafiek gespiegeld in de x-as.

We kijken nu naar de grafieken van $\sqrt{x}$ en $\sqrt{3x}$. De functie $\sqrt{3x}$ heeft functiewaarde $\sqrt{3}$, als $x = 1$. De functie $\sqrt{x}$ neemt die waarde pas aan voor $x = 3$. Soortgelijk geldt steeds: de functie $\sqrt{3x}$ bereikt 3 keer zo snel bepaalde functiewaarden als $\sqrt{x}$. We kunnen de grafiek van $\sqrt{3x}$ dus vinden door de grafiek van $\sqrt{x}$ met een factor 3 horizontaal te comprimeren, richting de y-as. Het vervangen van de variabele x, door $3x$ heeft dus tot gevolg dat de grafiek met een factor 3 horizontaal gedrukt wordt naar de y-as.
Op dezelfde manier redenerend kunnen we vinden dat als we de variabele x door $\frac{1}{3}x$ vervangen, dat dan eerst x 3 keer zo groot moet worden voordat we dezelfde functiewaarden bereiken, ofwel, de grafiek wordt met een factor 3 in horizontale richting ten opzichte van de y-as uitgerekt.

Wat is nu de relatie tussen $\sqrt{x}$ en $\sqrt{-x}$? Wel, laten we eens kijken naar $x = -2$. Als $x = -2$, dan is $-(-x) = 2$, dus dan is $\sqrt{-x} = \sqrt{2}$. Ofwel, voor $x = -2$, heeft $\sqrt{-x}$ dezelfde waarde als $\sqrt{x}$ voor $x = 2$. Maar dat betekent dat de grafiek van $\sqrt{-x}$ gevonden kan worden door de grafiek van $\sqrt{x}$ te spiegelen in de y-as.
Dit geldt algemeen: als we in een functievoorschrift x vervangen door $-x$, dan vinden we de nieuwe grafiek, door de oorspronkelijke te spiegelen in de y-as.
We zien nu ook direct dat een en ander klopt met de domeinen van de functies: $\sqrt{x}$ is gedefinieerd voor $x \geq 0$; $\sqrt{-x}$ is gedefinieerd voor $x \leq 0$.

Als laatste kijken we naar de grafiek van de functie $\sqrt{x-3}$; hoe hangt die samen met de grafiek van de functie $\sqrt{x}$?
De functiewaarde van $\sqrt{x-3}$ voor een zekere waarde van x, is gelijk aan de functiewaarde van $\sqrt{x}$, maar dan voor x verminderd met 3. Voor een bepaalde waarde van x, moeten we dus 3 naar links kijken en daar de functiewaarde van $\sqrt{x}$ ophalen, en die toekennen aan $\sqrt{x-3}$. Het effect daarvan is dat we de grafiek van $\sqrt{x}$ precies 3 naar rechts moeten schuiven om de grafiek van $\sqrt{x-3}$ te krijgen. Dat is ook makkelijk te onthouden door te kijken wanneer er onder het wortelteken in $\sqrt{x-3}$ precies 0 staat. Dat is het geval als $x = 3$, en dan heeft $\sqrt{x-3}$ dus dezelfde waarde als $\sqrt{x}$, voor $x = 0$.
Het vervangen in een functievoorschrift van x door $x - 3$ heeft dus tot gevolg dat de grafiek 3 naar rechts schuift. Op dezelfde manier geldt dat als x in een functievoorschrift vervangen wordt door $x + 3$, dat dan de grafiek 3 naar links schuift. In dit geval worden de functiewaarden al '3 eerder' aangenomen.

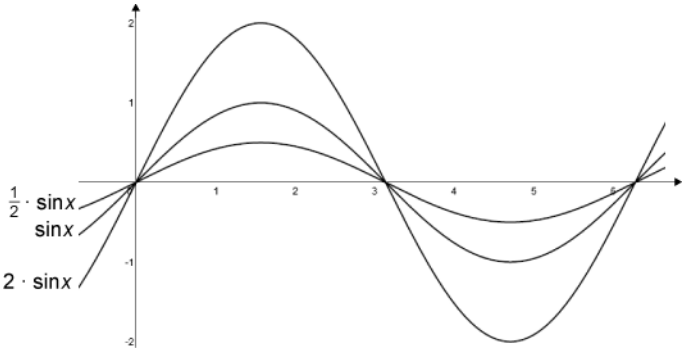
OPGAVE 4.19

a Bereken een aantal functiewaarden van de functie f: $x \to x^2$, en teken de grafiek in een assenstelsel.
b Wat is het domein en bereik van f?
c Teken in dezelfde figuur de grafieken van $x^2 + 2$, $(\frac{1}{2}x)^2$, $-x^2$ en $(x - 2)^2$.
d Wat is het domein en bereik van de functies in onderdeel c.

Bij de functie $f(x) = \sin x$ zijn ook veel varianten te maken. We krijgen een hele familie van functies door enkele parameters te gebruiken. We schrijven dan: $f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$. We bekijken een voor een de effecten van de afzonderlijke parameters.

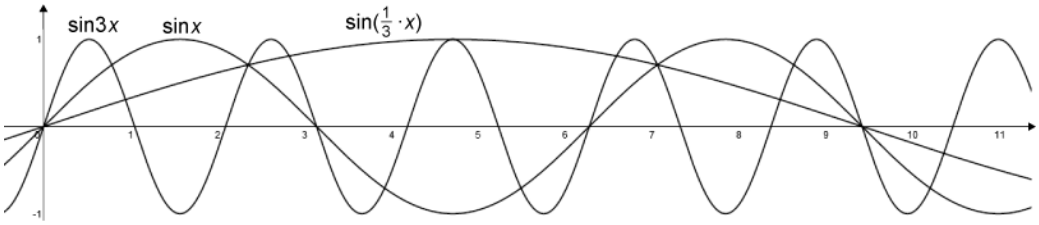
Amplitude

Als we in plaats van $\sin x$ de functie $a \cdot \sin x$ bekijken, dan zijn alle functiewaarden met a vermenigvuldigd, en hebben we dus een vergroting of verkleining met een factor a. Zie in onderstaande figuur de grafieken van $\sin x$, $\frac{1}{2} \cdot \sin x$ en $2 \cdot \sin x$. De waarde van a is de *amplitude* van de grafiek.



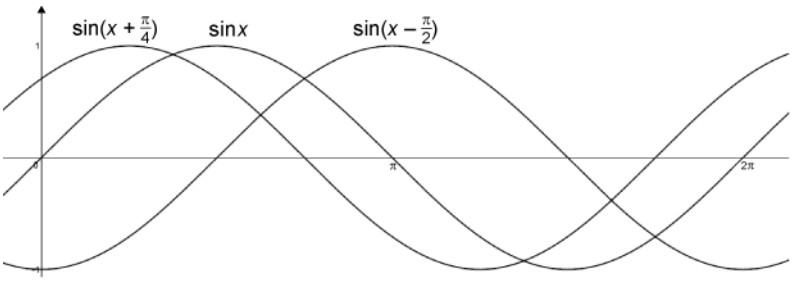
FIGUUR 4.23 Grafieken van $\sin x$ en $a \cdot \sin x$

Als we naar $\sin(bx)$ kijken, dan neemt bx eerder bepaalde waarden aan dan x, als b groter is dan 1, en later als b kleiner is dan 1. Als b groter is dan 1, dan wordt de grafiek als het ware horizontaal ingedrukt, richting de y-as, en als b kleiner is dan 1, dan wordt ze uitgetrokken. Zie in onderstaande figuur de grafieken van $\sin x$, $\sin(3x)$ en $\sin(\frac{1}{3} \cdot x)$.



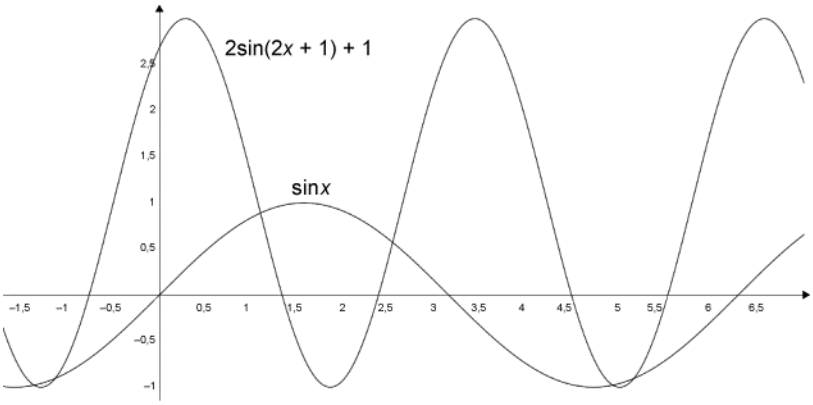
FIGUUR 4.24 Grafieken van $\sin x$ en $\sin(bx)$

Als we grafiek van de functie $\sin(x + c)$ bekijken, dan is de grafiek verschoven ten opzichte van de grafiek van $\sin x$. De grafiek is naar links verschoven als c positief is, en naar rechts, als c negatief is. Zie in figuur 4.25 de grafieken van $\sin x$, $\sin(x + \pi/4)$ en $\sin(x - \pi/2)$.



FIGUUR 4.25 Grafieken van $\sin x$ en $\sin(x + c)$

De parameter d in de grafiek van $f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$ zorgt ervoor dat de grafiek in zijn geheel naar boven (bij positieve waarden van d) of naar beneden (bij negatieve waarden van d) gaat.
Natuurlijk kunnen de diverse waarden van de parameters ook worden gecombineerd. In onderstaande figuur zijn de grafieken van $\sin x$ en $2\sin(2x + 1) + 1$ getekend.



FIGUUR 4.26 Grafieken van $\sin x$ en $2\sin(2x + 1) + 1$

OPGAVE 4.20
Ga in figuur 4.26 na hoe uit de grafiek van $\sin x$ de grafiek van $2\sin(2x + 1) + 1$ kan worden verkregen.

OPGAVE 4.21
a De grafiek van $\sin x$ doorloopt één periode in het interval $[0, 2\pi]$. Hoeveel perioden doorloopt de grafiek van $\sin(10x)$ in het interval $[0, 2\pi]$?
b Als $a \cdot \sin x + d$ geen snijpunten heeft met de x-as. Wat kan er dan gezegd worden over a en d?

Even functie

We kunnen ook nog op een andere manier naar de sinus- en cosinusfuncties kijken. Als we $\cos x$ in de y-as spiegelen, dan krijgen we dezelfde grafiek. Er geldt dus dat $\cos x = \cos(-x)$. Een functie met zo'n eigenschap wordt een *even functie* genoemd. Voor een even functie geldt dus $f(x) = f(-x)$.

Oneven functie

Als we daarentegen $\sin x$ spiegelen in de y-as, dan krijgen we een grafiek die het tegengestelde is. Er geldt dus: $\sin x = -\sin(-x)$. Zo'n functie wordt een *oneven functie* genoemd. Voor een oneven functie geldt dus $f(x) = -f(-x)$.

OPGAVE 4.22
Welke van de volgende functies zijn even, en welke oneven?
a $\tan x$
b x^2
c x^3
d x

12 Functies combineren

We kunnen functies op allerlei manieren combineren, bijvoorbeeld door twee functies bij elkaar op te tellen. We krijgen dan de *somfunctie*. De functie s is de som van de functies f en g, als voor iedere x geldt:

Somfunctie

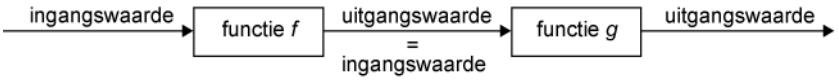
$s(x) = f(x) + g(x)$

Op soortgelijke wijze kunnen we *verschil-, product en quotiëntfuncties* definiëren. De laatste voor zover de noemer ongelijk is aan 0.

Verschilfunctie
Productfunctie
Quotiëntfunctie

$v(x) = f(x) - g(x)$
$p(x) = f(x) \cdot g(x)$
$q(x) = f(x) / g(x)$, voor $g(x) \neq 0$

We bekijken nu nog een andere manier waarop twee functies met elkaar gecombineerd kunnen worden. Een functie voegt aan een ingangswaarde een uitgangswaarde toe, en die kunnen we vervolgens weer gebruiken als de ingangswaarde voor een volgende functie.
In een schema is dat als volgt weer te geven:



FIGUUR 4.27 Twee functies combineren

Stel we hebben de functie f: $x \to 1/x$ en de functie g: $x \to x^2 + 2x - 1$. Als we beginnen met de ingangswaarde $x = 3$, dan volgt dat $f(3) = 1/3$. Deze uitgangswaarde van f kunnen we weer als ingangswaarde van g kiezen, dus dan berekenen we $g(1/3) = -2/9$. We hebben nu eerst f, en daarna g toegepast. We noteren dat met $g(f(x))$. Let goed op deze notatie, die als het ware van binnen naar buiten loopt. Met de ingangswaarde x berekenen we $f(x)$, en dat resultaat gebruiken we als ingangswaarde of argument in $g(x)$.
Eigenlijk hebben we hier met twee functies een nieuwe functie gemaakt. We hebben een nieuwe functie 'samengesteld'. Veelal noemen we zo'n functie dan ook een *samengestelde functie*. Naast de notatie $g(f(x))$ wordt ook de volgende notatie gebruikt: $g \circ f(x)$.

Samengestelde functie

Laten we de samengestelde functie h noemen, dus $h(x) = g(f(x))$. Op de volgende wijze is het functievoorschrift te bepalen van de nieuwe samengestelde functie: neem het functievoorschrift van g en schrijf in plaats van iedere x die daar in voorkomt, het functievoorschrift van f.
In dit geval wordt dat:

$$f(x) = 1/x$$
$$g(x) = x^2 + 2x - 1$$
$$h(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + 2 \cdot f(x) - 1 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{x} - 1 = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - 1 = \frac{1 + 2x - x^2}{x^2}$$

Als we nu in $h(x)$ voor x de waarde 3 invullen, dan vinden we dezelfde waarde –2/9, als die we eerder vonden in het afzonderlijk toepassen van f en g.
We kunnen natuurlijk ook meer dan twee functies achter elkaar toepassen, en op die manier nog complexere samenstellingen maken. De analyse van grafiek, domein en bereik van samengestelde functies is in essentie dezelfde als voor de elementaire functies, maar door de complexere functievoorschriften wel ingewikkelder.

Hiervoor hebben we eerst de functie f, en daarna de functie g toegepast. Als we de volgorde van het toepassen van de functies omdraaien, dan krijgen we een andere samengestelde functie.
Als we met de voorgaande functies f en g, de samengestelde functie $f(g(x))$ bepalen, dan vinden we:

$$f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x^2 + 2x - 1}$$

En dit is echt een andere functie dan $g(f(x))$.

OPGAVE 4.23
Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2$ en $h(x) = 1/(x + 1)$.
a Bepaal de functievoorschriften van $f(g(x))$ en $g(f(x))$.
b Bepaal het functievoorschrift van $h(g(f(x)))$.

13 Inverse functies

Als laatste in deze leereenheid bekijken we de samenstelling van twee functies, die na elkaar toegepast op een ingangswaarde weer de originele ingangswaarde opleveren. Als we bijvoorbeeld een functie hebben die de ingangswaarde kwadrateert, en een functie die uit de ingangswaarde de wortel trekt, en als we die functies na elkaar toepassen, dan hebben we na afloop weer de originele waarde waar we mee begonnen (ten minste als we ons beperken tot de niet negatieve reële waarden).
In formule vorm:

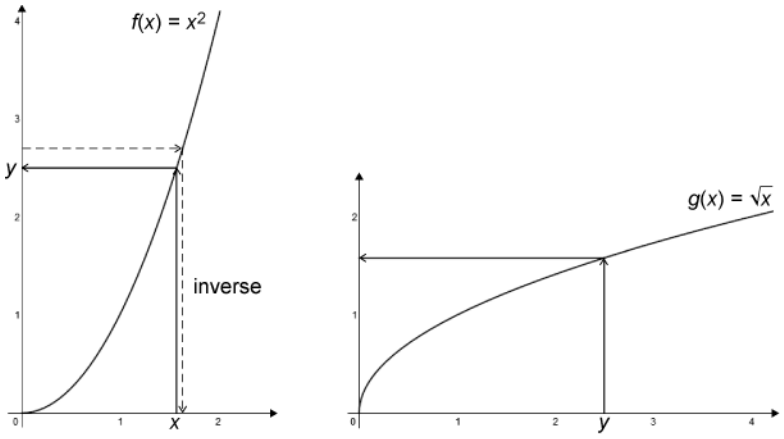
$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = \sqrt{x}$$
$$h(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = x, \quad voor \quad x \geq 0$$

Identiteit

Inverse functie

Het resultaat van de samenstelling is de functie $h(x) = x$, de functie die als uitgangswaarde dezelfde waarde geeft als dat de ingangswaarde is. Deze functie wordt ook wel de *identiteit* genoemd. En functies die na elkaar toegepast de identiteit opleveren worden ook wel 'inversen' van elkaar genoemd. De *inverse functie* van een functie f wordt ook wel genoteerd met f^{-1}. En dat leidt dan weer tot de formule: $f^{-1}(f(x)) = x$.

Als we naar de grafieken van twee functies die elkaars inverse zijn kijken, dan zien we wat bijzonders.



FIGUUR 4.28 De grafieken van de inverse functies f en g

In de linkergrafiek bepalen we bij een bepaalde waarde van x, de functiewaarde $y = f(x)$. Als we nu in de linkergrafiek, uitgaande van een bepaalde waarde voor y, nagaan wat het oorspronkelijke origineel was, dan zijn we dus de inverse aan het bepalen. Maar daarbij gaan we dus uit van originelen op de y-as en beelden op de x-as. Als we de assen verwisselen, dan krijgen we de rechtergrafiek, de grafiek van de inverse. We vinden die dus door de grafiek te spiegelen in de lijn $y = x$.

OPGAVE 4.24

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x - 2$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

a Bereken $f(3)$, en gebruik die waarde als ingangswaarde in $g(x)$ en bepaal de daarbij behorende uitgangswaarde.

b Bepaal de functievoorschriften van $g(f(x))$ en van $f(g(x))$. Welke conclusie trekt u uit deze twee functievoorschriften?

OPGAVE 4.25

Gegeven zijn de functies $f(x) = 1/x$ en $g(x) = 1/x$.

a Bereken $f(3)$, en gebruik die waarde als ingangswaarde in $g(x)$ en bepaal de daarbij behorende uitgangswaarde.

b Bepaal het functievoorschrift van $g(f(x))$. Welke conclusie trekt u uit dit functievoorschrift?

SAMENVATTING

Functies zijn een erg belangrijk en veelgebruikt concept in de wiskunde. Een functie koppelt een ingangswaarde aan een uitgangswaarde, veelal via een formule. De verzameling ingangswaarden is het domein van de functie, de verzameling uitgangswaarden is het bereik. Bij iedere ingangswaarde wordt precies één uitgangswaarde berekend, niet meer, niet minder.
Door ingangs- en uitgangswaarden als coördinaten x en y van punten in het platte vlak op te vatten, kan in een assenstelsel een grafiek van de functie worden getekend.
Lineaire functies hebben als functievoorschrift $f\colon x \to ax + b$. De parameter a is de richtingscoëfficiënt en geeft de richting van de lijn weer, die de grafiek is van een lineaire functie. De waarde b geeft het punt $(0, b)$ weer, waar de lijn de y-as snijdt. Een horizontale lijn heeft als vergelijking $y = b$, en een verticale lijn heeft als vergelijking $x = a$.
Kwadratische functies hebben als functievoorschrift $f\colon x \to ax^2 + bx + c$. De grafieken van kwadratische functies zijn parabolen. Als a positief is, dan is de grafiek een dalparabool, is a negatief dan is de grafiek een bergparabool. In het functievoorschrift van polynomiale functies komen ook hogere machten van x voor.
In wortelfuncties en logaritmische functies komt de variabele in de wortel respectievelijk de logaritme voor. In gebroken functies komt de variabele in de noemer van de breuken. Deze functies zijn niet altijd voor alle mogelijke waarden van x gedefinieerd, zodat het domein niet de gehele verzameling $\mathbb{R}$ is.
Bij exponentiële functies komt de variabele in de exponent voor.
Goniometrische functies zijn een uitbreiding van de concepten sinus, cosinus en tangens, zoals gedefinieerd in de meetkunde bij rechthoekige driehoeken.

Gebaseerd op de basisfuncties kunnen nieuwe functies worden gedefinieerd door schaling, spiegeling en verschuiving. Ook door functies te combineren kunnen nieuwe functies worden gecreëerd.
Als twee functies na elkaar toegepast als resultaat de originele ingangswaarde opleveren, dan zijn ze elkaars inversen: $f^{-1}(f(x)) = x$.

ZELFTOETS

1 a Bereken enkele functiewaarden en schets grafieken van de volgende functies:

$f(x) = x - 1$
$g(x) = -x^2 + 2x$
$h(x) = \frac{1}{8}x^3$

b Wat zijn de domeinen en bereiken van de functies?

2 a Bereken enkele functiewaarden en schets grafieken van de volgende functies:

$f(x) = \sqrt{x+1}$
$g(x) = (\frac{1}{3})^x$
$h(x) = {}^4\log x$

b Wat zijn de domeinen en bereiken van de functies?

3 a Bereken enkele functiewaarden en schets de grafiek van de functie f: $x \to 2^x$.
b Gebruik de grafiek van $f(x) = 2^x$ om de grafieken te tekenen van -2^x, 2^{-x} en $2^{(x-2)}$.

4 Gegeven zijn de functies f: $x \to 2^x$ en g: $x \to 1/x$.
Bepaal $g(f(x))$ en $f(g(x))$.

5 Gegeven zijn de volgende twee functies:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$
$$g(x) = \frac{x+1}{x}$$

Ga na dat de twee functies elkaars inversen zijn.

cc BY NC ND

Vergelijkingen en ongelijkheden

Introductie *107*

Leerkern *108*

1 Eerste graads en hogere-ordevergelijkingen *108*
  1.1 Lineaire vergelijkingen *108*
  1.2 Kwadratische vergelijkingen *113*
  1.3 Hogere-ordevergelijkingen *117*
2 Gebroken vergelijkingen *118*
3 Wortelvergelijkingen *119*
4 Exponentiële en logaritmische vergelijkingen *120*
5 Goniometrische vergelijkingen *121*
6 Ongelijkheden *122*
7 Toepassingen *124*

Samenvatting *127*

Zelftoets *127*

Leereenheid 5

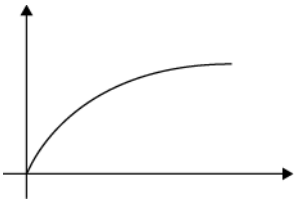
Vergelijkingen en ongelijkheden

INTRODUCTIE

Als een product 'in de markt gezet wordt', dan heeft de afzet vaak een bepaald patroon. Denk bijvoorbeeld aan de introductie van een apparaat zoals een tabletcomputer, of een softwarepakket. In het begin neemt de afzet toe, maar na verloop van tijd vlakt de groei af totdat het groeiplafond is bereikt. Dit patroon of verloop kan vaak weergegeven worden met een 'logistische functie'.
Een voorbeeld van zo'n logistische functie is:

$$f(x) = \frac{1-2^{-x}}{1+2^{-x}}$$

In een grafiek ziet die functie er als volgt uit. Voor grote waarden van x is de functiewaarde ongeveer gelijk aan 1, immers de termen 2^{-x} zijn dan vrijwel gelijk aan 0.



FIGUUR 5.1 Logistische groei

Als het verloop van de groei bekend is, dan kunnen vervolgens allerlei vragen gesteld worden, zoals: wanneer is 50% van de afzet bereikt? Om deze vraag te kunnen beantwoorden, moet de waarde van x bepaald worden, zodat geldt: $f(x) = \frac{1}{2}$. Dat betekent dus dat de x gevonden moet worden waarvoor geldt:

$$\frac{1-2^{-x}}{1+2^{-x}} = \frac{1}{2}$$

De uitdrukking die hierboven staat noemen we in de wiskunde een 'vergelijking', en het vinden van de x, waarvoor geldt dat links en rechts van het gelijkteken hetzelfde staat, noemen we het 'oplossen van een vergelijking'. Het oplossen van vergelijkingen is een belangrijke vaardigheid in de wiskunde.

In deze leereenheid gaan we diverse typen vergelijkingen oplossen. We focussen daarbij vooral op de wiskundige vaardigheden, en zullen aan het eind nog wel enkele toepassingen laten zien, maar het belangrijkste is in deze leereenheid te oefenen met dit belangrijke onderdeel van de wiskunde.

LEERDOELEN
Na het bestuderen van deze leereenheid wordt verwacht dat u
- weet wat vergelijkingen en ongelijkheden zijn
- eenvoudige lineaire, kwadratische, gebroken, logaritmische, exponentiële, goniometrische en wortelvergelijkingen op kunt lossen
- het functievoorschrift op kunt stellen van een lineaire functie waarvan de grafiek door twee gegeven punten gaat
- de *abc*-formule kent en kunt toepassen om kwadratische vergelijkingen op te lossen
- na kunt gaan in welke intervallen ongelijkheden gelden.

LEERKERN

1 Eerstegraads en hogere-ordevergelijkingen

1.1 LINEAIRE VERGELIJKINGEN

Lineaire vergelijking

We starten met het oplossen van lineaire vergelijkingen. Een voorbeeld van een *lineaire vergelijking* is:

$4x - 5 = 3$

De vergelijking noemen we lineair, omdat de hoogste macht of graad van x in de vergelijking 1 is, net zoals we gezien hebben bij de lineaire functies in de vorige leereenheid.
De opdracht is nu een getal te vinden, dat we voor x kunnen invullen, zodat de vergelijking 'klopt': aan de rechter- en linkerkant van het gelijkteken moeten dan gelijke waarden staan (we vergelijken linker- en rechterlid). Even proberen maakt al snel duidelijk dat als we voor x de waarde 2 invullen, en het linkerlid uitrekenen, dat er dan 3 uitkomt, zodat de vergelijking klopt. We hebben de vergelijking opgelost en de *oplossing* is: $x = 2$.

Oplossing

Bovenstaande vergelijking is eenvoudig, en met wat proberen vinden we de oplossing. Maar vergelijkingen kunnen ingewikkelder zijn en daarom willen we een systematische aanpak volgen, zodat we (lineaire) vergelijkingen altijd op kunnen lossen. We gebruiken daarbij het volgende uitgangspunt:
– Als linker- en rechterlid van een vergelijking gelijk moeten zijn, en we voeren op beide leden dezelfde operatie uit (er iets bij optellen, met een factor vermenigvuldigen, enzovoort), dan moeten linker- en rechterlid na de operatie ook weer gelijk zijn.
Met dit uitgangspunt kunnen we vergelijkingen veranderen. En als we dat op een slimme manier doen, dan vinden we de oplossing. We lichten dit toe voor bovenstaande vergelijking, die we in enkele stappen omwerken. Na iedere vergelijking schrijven we op wat we doen om de volgende vergelijking te krijgen, of we geven enige toelichting.

$4x - 5 = 3$	We tellen 5 op bij linker- en rechterlid.
$4x = 3 + 5$	We zien hier dat de 5 naar de andere kant is gegaan en van teken gewisseld; we tellen nu 3 en 5 op.
$4x = 8$	We delen linker- en rechterlid door 4.
$x = 2$	

De laatste uitdrukking is de oplossing van de vergelijking waar we mee begonnen, immers als we nu voor x de waarde 2 kiezen, dan zijn linker- en rechterlid in de laatste uitdrukking gelijk. En omdat we steeds dezelfde operaties uit hebben gevoerd op linker- en rechterlid, moet dat ook steeds gelden voor de uitdrukkingen daarboven. Met $x = 2$ moet dus ook de eerste vergelijking kloppen, dus is $x = 2$ de oplossing. Desgewenst vullen we de oplossing in in de oorspronkelijke vergelijking, om na te gaan dat het linker- en rechterlid inderdaad aan elkaar gelijk zijn.
We geven een wat ingewikkelder voorbeeld.

$\frac{3}{2}x + 1 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$	We tellen $\frac{1}{2}x$ op bij linker- en rechterlid.
$\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x + 1 = -\frac{1}{8}$	We zien dat $\frac{1}{2}x$ naar de andere kant is gegaan en van teken gewisseld; we kunnen $\frac{3}{2}x$ en $\frac{1}{2}x$ bij elkaar optellen.
$2x + 1 = -\frac{1}{8}$	We trekken 1 af van linker- en rechterlid.
$2x = -\frac{1}{8} - 1$	We zien dat 1 naar de andere kant is gegaan en van teken gewisseld; we nemen $-\frac{1}{8}$ en –1 samen.
$2x = -1\frac{1}{8}$	We delen linker- en rechterlid door 2.
$x = -\frac{9}{16}$	

In de laatste stap is de oplossing gevonden: $x = -\frac{9}{16}$. In het vervolg zullen we niet steeds achter de vergelijkingen schrijven wat voor bewerking we uitvoeren, meestal is dat makkelijk te zien.

OPGAVE 5.1
Vul voor x de waarde $-\frac{9}{16}$ in, in de vergelijking $\frac{3}{2}x + 1 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$ en verifieer dat $x = -\frac{9}{16}$ een oplossing is van deze vergelijking.

De aanpak die we steeds volgen om lineaire vergelijkingen op te lossen is er op gericht dat de termen met x links komen te staan, en de termen zonder x rechts. Als we termen bij het linker- en rechterlid optellen, of er van aftrekken, dan halen we zo'n term als het ware naar de andere kant van het gelijkteken, waarbij het teken verandert. Vervolgens is door vermenigvuldigen of delen met een geschikte waarde de oplossing te vinden. In het algemeen zijn er veel verschillende volgorden van de bewerkingen mogelijk, maar ze leiden allemaal tot dezelfde oplossing.

OPGAVE 5.2
Los de vergelijking $\frac{3}{2}x + 1 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$ op, door eerst linker- en rechterlid met 8 te vermenigvuldigen om zo de breuken uit de vergelijking te verwijderen. Werk daarna door tot de oplossing is gevonden.

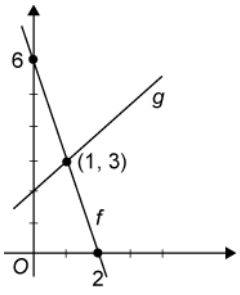
OPGAVE 5.3
Los op:
a $2x = 12$
b $4x + 6 = -1$
c $3x - 6 = 2x - 8$
d $x + 6 = -x - 1$
e $10x = 8 + 2x$
f $-7x - 1 = 2x + 8$
g $x - 1 = 2x - 8$
h $4x + 4 = 0$

In de vorige leereenheid hebben we lineaire functies bekeken. De grafieken daarvan zijn rechte lijnen, met vergelijkingen van de vorm $y = ax + b$. Als de richtingscoëfficiënt a ongelijk aan 0 is, dan snijdt een rechte lijn op één of andere plaats de x-as. De y-coördinaat van zo'n snijpunt is gelijk aan 0. We kunnen daarom de x-coördinaat van het snijpunt met de x-as vinden als oplossing van de vergelijking $0 = ax + b$.

VOORBEELD 5.1 Gegeven is de lineaire functie f: $x \to -3x + 6$. De vergelijking van de grafiek is $y = -3x + 6$. De x-coördinaat van het snijpunt met de x-as vinden we door de volgende vergelijking op te lossen.

$0 = -3x + 6$
$3x = 6$
$x = 2$

De coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de x-as zijn dus (2, 0). Omdat we door $x = 0$ in de vergelijking in te vullen vinden dat dan $y = 6$, is het snijpunt met de y-as (0, 6). Hiermee hebben we twee punten van de grafiek gevonden, waar we eenvoudig de rechte lijn door kunnen trekken.



FIGUUR 5.2 De grafiek van $y = -3x + 6$ gaat door (0, 6) en (2, 0) en snijdt de lijn $y = x + 2$ in (1, 3) «

Met het oplossen van een lineaire vergelijking kunnen we ook het snijpunt vinden van twee lijnen die niet evenwijdig zijn. We gebruiken daarvoor de functievoorschriften van de lijnen. Als twee lijnen een snijpunt hebben, dan moeten voor een bepaalde waarde van x, de functiewaarden van de twee functies gelijk zijn. Immers, dan ligt bij beide het punt (x, y) op de grafiek, en dat is dan dus het snijpunt.

VOORBEELD 5.2 Gegeven zijn de lineaire functies f: $x \to -3x + 6$ en g: $x \to x + 2$. We gaan zoeken naar de waarde van x waarvoor de functiewaarden van de functies gelijk zijn. De x-coördinaat van het snijpunt vinden we dus door de volgende vergelijking op te lossen.

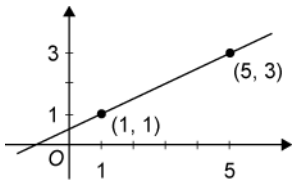
$-3x + 6 = x + 2$
$-4x = -4$
$x = 1$

De x-coördinaat van het snijpunt is dus 1. De y-coördinaat van het snijpunt vinden we door $x = 1$ in te vullen in één van de functievoorschriften (of in het linker- of rechterlid van de bovenste van bovenstaande vergelijkingen). We vinden $y = 3$. Het snijpunt is dus (1, 3), zie figuur 5.2. «

OPGAVE 5.4
Bepaal de snijpunten van onderstaande tweetallen lijnen.
a $f: x \to 2x - 6$ en $g: x \to x - 3$
b $f: x \to -2x + 9$ en $g: x \to x$
c $f: x \to x + 1$ en $g: x \to -x + 2$

In de voorgaande leereenheid hebben we gezien hoe we bij een gegeven voorschrift van een lineaire functie of vergelijking van een rechte lijn de bijbehorende grafiek kunnen maken. We hebben ook gezien hoe we de richtingscoëfficiënt kunnen bepalen als we twee punten op de grafiek kennen, en het volledige functievoorschrift als we het snijpunt van de lijn met de y-as kennen.
Met het oplossen van een lineaire vergelijking kunnen we nu het functievoorschrift van een willekeurige lijn bepalen als we de coördinaten kennen van twee punten op de lijn. We werken dit uit in het volgende voorbeeld.

VOORBEELD 5.3 Een lijn gaat door de punten (1, 1) en (5, 3), zie de onderstaande figuur.



FIGUUR 5.3 Lijn door de punten (1, 1) en (5, 3)

In de vorige leereenheid hebben we gezien dat de richtingscoëfficiënt te berekenen is met $\Delta y/\Delta x$. In dit geval is dat $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

We kunnen de vergelijking nu dus gedeeltelijk invullen: $y = \frac{1}{2}x + b$.
Hoe vinden we de waarde van b? Wel, we weten dat het punt (1, 1) op de lijn ligt, dus als we dat invullen in de vergelijking, dan moet de vergelijking kloppen. We vinden als we $y = 1$ en $x = 1$ invullen:
$1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + b$. We moeten nu de vergelijking voor b oplossen:

$1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + b$
$1 = \frac{1}{2} + b$
$\frac{1}{2} = b$

We vinden dus $b = \frac{1}{2}$ en de vergelijking van de lijn is $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
Het functievoorschrift is $f: x \to \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. «

cc BY NC ND

OPGAVE 5.5
Bepaal het functievoorschrift van de lijn door de punten:
a (1, –1) en (3, 3)
b (0, 4) en (4, 2)
c (–1, –1) en (5, 2)
d (–2, –1) en (3, –1)

In het laatste onderdeel van opgave 5.5 hebben de twee punten een gelijke y-coördinaat. Dat betekent dat we een horizontale lijn hebben, en de richtingscoëfficiënt dus 0 is. Als we die situatie herkennen, dan kunnen we dus direct concluderen wat de vergelijking van de lijn is (in plaats van de methode toe te passen zoals beschreven). In de opgave was de vergelijking: $y = -1$. Als we een verticale lijn hebben (door twee punten met een gelijke x-coördinaat) dan kunnen de hier beschreven methode niet toepassen, want bij het bepalen van de richtingscoëfficiënt zouden we dan door 0 moeten delen (het verschil van de x-coördinaten). Echter, we kunnen in zo'n geval direct concluderen wat de vergelijking van de lijn is, namelijk $x = a$, met a gelijk aan de x-coördinaten van de punten.

OPGAVE 5.6
Stel de vergelijking op van de lijn door de punten:
a (1, 3) en (3, 3)
b (1, 4) en (1, 2)
c (–1, –2) en (5, –2)
d (–2, –1) en (–2, 6)

Er doen zich bijzondere situaties voor als we snijpunten willen bepalen van lijnen die evenwijdig zijn. Er zijn dan twee mogelijkheden:
– De lijnen zijn verschillend (maar wel evenwijdig); er is dan geen snijpunt.
– De lijnen zijn gelijk (ze vallen samen): ieder punt op de lijnen is dan een snijpunt, dus er zijn er oneindig veel.
Ook deze situaties en wat er gebeurt als we de vergelijkingen op gaan lossen, lichten we weer toe met voorbeelden.

VOORBEELD 5.4 Bepaal het snijpunt van de lijnen met vergelijkingen $y = 5x + 1$ en $y = 5x + 10$. De richtingscoëfficiënten zijn gelijk, dus de lijnen zijn evenwijdig. Als we de methode uit de voorgaande voorbeelden toe willen passen, dan moeten we dus oplossen:

$$5x + 1 = 5x + 10$$

Als we $5x$ van het linker- en rechterlid aftrekken, dan krijgen we:

$$1 = 10$$

Formeel gezien is dit ook een vergelijking, maar er is geen enkele waarde van x waarvoor dit kloppend kan zijn. In dit geval is er dus geen oplossing. Er bestaat geen enkele waarde voor x die de vergelijking kloppend maakt. Twee evenwijdige ongelijke lijnen hebben dus geen snijpunt. «

VOORBEELD 5.5

Bepaal het snijpunt van de lijnen met vergelijkingen $y = 5x + 1$ en $y = 5x + 1$. Dit is dus twee keer dezelfde lijn. Nu moeten we oplossen:

$5x + 1 = 5x + 1$

Als we $5x$ van het linker- en rechterlid aftrekken, dan krijgen we:

$1 = 1$

Deze vergelijking is waar voor elke willekeurige waarde van x. Het doet er blijkbaar niet toe wat voor waarde voor x we kiezen. Er zijn dus oneindig veel oplossingen. En er zijn oneindig veel punten die zowel op de ene, als op de andere lijn liggen. «

OPGAVE 5.7

Bepaal of de lijnen, weergegeven door de volgende vergelijkingen geen, één of oneindig veel punten gemeen hebben. Als er één snijpunt is, bepaal dan de coördinaten van de snijpunt.

a $y = 2x + 1$ en $y = 2x + 4$
b $y = 3x + 1$ en $y = 3x + 1$
c $y = 4x + 1$ en $y = -x + 7$

1.2 KWADRATISCHE VERGELIJKINGEN

We gaan nu door met vergelijkingen van het volgende type:

$ax^2 + bx + c = 0$

Tweedegraads-vergelijking
Kwadratische vergelijking

We zien dat er nu een term ax^2 met een tweede macht, of tweede graad van x in voorkomt, vandaar de naam *tweedegraads* of *kwadratische vergelijking*. Als er meerdere termen met x^2 voor komen, dan kunnen we die bij elkaar nemen, en aan de linkerkant schrijven. Dat kunnen we ook doen voor termen met x, en eveneens voor de constanten. Altijd kunnen we dus uitkomen op de vorm zoals hierboven staat.

We bekijken eerst hoe we oplossingen kunnen vinden voor enkele bijzondere gevallen van de kwadratische vergelijking. Vervolgens introduceren we een methode die altijd een oplossing geeft of waarmee we vast kunnen stellen dat er geen oplossing is. Dat doen we met de *abc*-formule.

$x^2 + c = 0$

In het eerste bijzondere geval geldt $a = 1$ en $b = 0$. Als we, nu als voorbeeld, ook nog hebben $c = -9$, dan wordt de vergelijking:

$x^2 - 9 = 0$

We tellen er links en rechts 9 bij op (of anders gezegd, we halen 9 naar de andere kant en veranderen het teken van – in +), zodat we krijgen:

$x^2 = 9$

Om de oplossing te vinden nemen we nu de wortel van het linkerlid en de wortel van het rechterlid. Een oplossing is nu dus de wortel uit 9, dat is 3. Maar let op: er is nog een oplossing, namelijk –3. Vul immers –3 voor x in, in de vergelijking $x^2 = 9$ en ook dan zijn linker- en rechterlid gelijk.

Omdat er twee oplossingen zijn, noteren we de oplossingen ook wel met $x_1 = 3$ en $x_2 = -3$.
We zien ook direct dat een vergelijking zoals $x^2 + 9 = 0$ geen oplossing heeft. Voor geen enkele waarde van x uit het domein van de reële getallen, geldt $x^2 = -9$, immers een kwadraat is altijd groter of gelijk aan 0.

$x^2 + bx = 0$

In het tweede bijzondere geval is opnieuw $a = 1$, maar nu is $b \neq 0$ en $c = 0$. We kiezen voor b een waarde, bijvoorbeeld 2, zodat we de volgende vergelijking vinden:

$$x^2 + 2x = 0$$

Hoe vinden we van deze vergelijking de oplossing? In het linkerlid kunnen we x buiten haakjes halen (zie eventueel leereenheid 2). Dan krijgen we:

$$x \cdot (x + 2) = 0$$

In het linkerlid staat nu een product (vermenigvuldiging) van twee factoren. De factoren zijn x en $(x + 2)$. Het product is 0, als één van de factoren 0 is. Dat wil zeggen, als $x = 0$, of als $x + 2 = 0$. Dit laatste is een lineaire vergelijking met als oplossing $x = -2$.
We hebben nu dus twee oplossingen, namelijk $x_1 = 0$ en $x_2 = -2$. Vul desgewenst deze oplossingen in de vergelijking in om na te gaan dat dan inderdaad linker- en rechterlid gelijk worden.

OPGAVE 5.8
Bepaal de oplossingen van de volgende vergelijkingen:
a $x^2 - 4 = 0$
b $x^2 = 36$
c $x^2 - 25 = 0$
d $x^2 = 0$
e $x^2 - 1 = 0$
f $x^2 + 1 = 0$

OPGAVE 5.9
Bepaal de oplossingen van de volgende vergelijkingen:
a $x^2 - 4x = 0$
b $x^2 = 2x$
c $x^2 - 25x = 0$
d $3x = -x^2$

Ontbinden in factoren

In het voorgaande bijzondere geval, konden we een factor x buiten haakjes halen, en kregen we een product van twee factoren. Soms kunnen we ook makkelijk zien hoe we uitdrukkingen van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ in een product van twee factoren kunnen ontbinden, en dan kunnen we ook redelijk gemakkelijk de oplossingen vinden. We laten dit weer zien aan de hand van voorbeelden.

VOORBEELD 5.6

Stel we hebben de vergelijking $x^2 + 7x + 10 = 0$. Het linkerlid kunnen we in factoren ontbinden (zie ook leereenheid 2):

$$x^2 + 7x + 10 = 0$$
$$(x + 2)(x + 5) = 0$$

Net als in het vorige bijzondere geval, is deze gelijkheid correct, als één van de twee factoren $x + 2$ of $x + 5$ gelijk is aan 0, dus al $x = -2$ of $x = -5$. We vinden dus twee oplossingen: $x_1 = -2$ en $x_2 = -5$.
Het vinden van de factoren in een kwadratische vergelijking is altijd wat puzzelen, maar een mogelijke ontbinding is makkelijk op correctheid te controleren door de vermenigvuldiging van de twee factoren weer uit te werken. Zo kan $3x^2 + 7x + 2$ ontbonden worden in $(3x + 1)(x + 2)$, immers:

$$\begin{aligned}&(3x + 1)(x + 2)\\ &= 3x \cdot x + 3x \cdot 2 + 1 \cdot x + 1 \cdot 2\\ &= 3x^2 + 7x + 2\end{aligned}$$

De oplossingen van de vergelijking $3x^2 + 7x + 2 = 0$ zijn dus $x_1 = -\frac{1}{3}$ en $x_2 = -2$. «

OPGAVE 5.10
Bepaal de oplossingen van de volgende vergelijkingen:
a $x^2 - 3x - 4 = 0$
b $x^2 + 6x + 5 = 0$
c $x^2 + 5x + 6 = 0$
d $x^2 + 3x - 4 = 0$
e $x^2 = 2x + 8$
f $x^2 - x = 20$

abc-formule
Wortelformule

Als het niet lukt om met één van de bovenstaande methoden de oplossingen te vinden van een tweedegraads vergelijking, dan kan altijd nog de *abc-formule* worden toegepast. De *abc*-formule, ook wel bekend als de *wortelformule*, geeft de oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$. De oplossingen x_1 en x_2 zijn:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

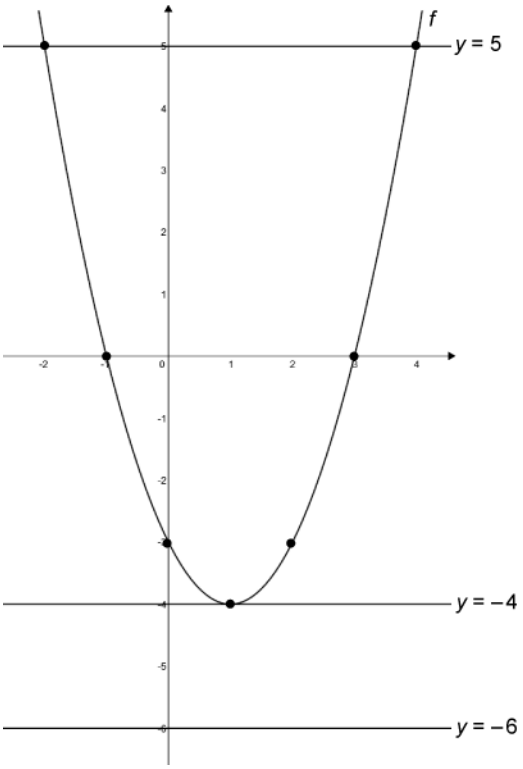
We hebben hier de *abc*-formule gegeven zonder uit te leggen hoe we daaraan komen. Dat is niet heel ingewikkeld, maar toch wel wat gemanipuleer. Eventueel is na te gaan dat de formule klopt, door de formule voor x_1 of x_2 in te vullen in de oorspronkelijke vergelijking.
De *abc*-formule moet u uit uw hoofd kennen, en vlot kunnen toepassen. We geven hieronder een voorbeeld van hoe we de *abc*-formule toepassen om de oplossingen te vinden van de vergelijking $2x^2 - 7x + 5 = 0$. In deze vergelijking is $a = 2$, $b = -7$ en $c = 5$. Invullen geeft:

$$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{7 \pm 3}{4}$$
$$x_1 = \frac{7 + 3}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$
$$x_2 = \frac{7 - 3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Er zijn dus twee oplossingen: $x_1 = \frac{5}{2}$ en $x_2 = 1$. Als u de oplossingen in de vergelijking invult, kunt u verifiëren dat dit inderdaad oplossingen zijn.

OPGAVE 5.11
Pas de *abc*-formule toe om de oplossingen van de volgende vergelijkingen te vinden:
a $2x^2 + 5x + 2 = 0$
b $2x^2 + 3x + 1 = 0$
c $x^2 - x - 1 = 0$
d $x^2 - 3x - 6 = 0$

In de vorige leereenheid hebben we de kwadratische functies geïntroduceerd. Met de nu behandelde methodes kunnen we bepalen voor welke x een kwadratische functie een bepaalde waarde heeft.
Willen we bijvoorbeeld weten voor welke x het beeld van de functie f: $x \to x^2 - 2x - 3$ gelijk is aan 5, dan moeten we daartoe de vergelijking $x^2 - 2x - 3 = 5$ oplossen. Door links en rechts 5 van de vergelijking af te trekken, vinden we de vergelijking $x^2 - 2x - 8 = 0$. Door het linkerlid in factoren te ontbinden, of met de *abc*-formule vinden we dan $x_1 = -2$ en $x_2 = 4$.
In de volgende figuur is de grafiek getekend van f: $x \to x^2 - 2x - 3$ en ook de lijn met de vergelijking $y = 5$.



FIGUUR 5.4 Snijpunten van lijn en parabool

We zien in de figuur dat de grafiek van f twee snijpunten heeft met de lijn $y = 5$. Hiervoor hebben we afgeleid dat dat het geval is voor $x = -2$, of $x = 4$. Dus $(-2, 5)$ en $(4, 5)$ zijn de snijpunten. Maar als de lijn lager zou hebben gelegen, dan was er maar één 'snijpunt', of zelfs geen snijpunt. In het laatste geval heeft de kwadratische vergelijking geen oplossingen, en als er één snijpunt is, is er één oplossing.
We bekijken deze twee gevallen.

Stel dat we hadden willen oplossen: $x^2 - 2x - 3 = -4$. Dan vinden we:

$x^2 - 2x - 3 = -4$
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$(x - 1)^2 = 0$

En nu is er één oplossing van de vergelijking: $x = 1$. En de grafiek van f heeft één snijpunt met de lijn $y = -4$. Het punt $(1, -4)$ noemen we wel een snijpunt, maar echt snijden doen de grafiek en de lijn elkaar niet. Beter zou zijn om te zeggen dat de grafieken één punt gemeen hebben, of ook wel één raakpunt.

Stel dat we hadden willen oplossen: $x^2 - 2x - 3 = -6$. Dan vinden we:

$x^2 - 2x - 3 = -6$
$x^2 - 2x + 3 = 0$

We kunnen nu geen ontbinding in factoren vinden. Toepassen van de *abc*-formule geeft:

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

Onder de wortel in de teller staat een negatief getal. Maar daar bestaat geen wortel van in de reële getallen, dus vinden we geen oplossing. En dat klopt want de parabool en de lijn $y = -6$, hebben geen punten gemeen.

Discriminant

De uitdrukking $b^2 - 4ac$ die in de *abc*-formule onder het wortelteken staat wordt de *discriminant* genoemd. Als de discriminant negatief is, dan zijn er geen oplossingen. Is de discriminant gelijk aan 0, dan is er één oplossing, en is de discriminant positief, dan zijn er twee oplossingen.

OPGAVE 5.12
Bepaal de snijpunten van de parabolen en lijnen gegeven door de volgende vergelijkingen:
a $y = x^2 - 2x$ en $y = 2x - 4$
b $y = x^2 + 3x + 2$ en $y = -2x - 4$

OPGAVE 5.13
Bepaal of de parabolen, gegeven door de volgende vergelijkingen, nul, één of twee snijpunten hebben met de x-as.
a $y = x^2 + 3x + 4$
b $y = x^2 + 4x - 1$
c $y = 4x^2 - 12x + 9$

1.3 HOGERE-ORDEVERGELIJKINGEN

In de voorgaande paragrafen hebben we methoden bekeken, waarmee in principe alle eerste- en tweede-ordevergelijkingen zijn op te lossen. Voor hogere-ordevergelijkingen zijn er geen gemakkelijke algemene methoden die altijd tot oplossingen leiden. Wel zijn er bijzondere gevallen die we kunnen aanpakken. We geven enkele voorbeelden.

VOORBEELD 5.7 Gegeven is de vergelijking $x^3 + x^2 - 6x = 0$. Alle termen in het linkerlid van deze derdegraadsvergelijking hebben een factor x. Als we die buiten haakjes halen, en de resterende factor verder ontbinden, dan vinden we drie oplossingen:

$$x^3 + x^2 - 6x = 0$$
$$x(x^2 + x - 6) = 0$$
$$x(x - 2)(x + 3) = 0$$

De oplossingen zijn $x = 0$, $x = 2$ en $x = -3$. «

VOORBEELD 5.8 Gegeven is de vergelijking $x^4 - 16 = 0$. In het linkerlid staat de term x^4. Die kunnen we ook beschouwen als het kwadraat van x^2 en dan herkennen we een bijzonder product, waarvan we weer een factor verder kunnen ontbinden:

$$x^4 - 16 = 0$$
$$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$
$$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$$

De term $x^2 + 4$ kan nooit 0 zijn, dus de oplossingen zijn $x = 2$, $x = -2$. «

OPGAVE 5.14
Bepaal de oplossingen van de volgende vergelijkingen:
a $x^4 + x^3 - 6x^2 = 0$
b $2x^3 - 8x^2 - 10x = 0$
c $x^8 - 1 = 0$
d $16x^4 - 625 = 0$

2 Gebroken vergelijkingen

Gebroken vergelijking

Gebroken vergelijkingen zijn vergelijkingen waarin breuken voorkomen, waarbij de variabele x ook in de noemer voorkomt. We starten met een voorbeeld waarin we wederom op zoek zijn naar de oplossing van de vergelijking, ofwel de waarde(n) van x, die de vergelijking kloppend maakt. Na iedere vergelijking geven we aan wat we doen om tot de volgende vergelijking te komen.

VOORBEELD 5.9

$$\frac{2x-5}{x+2} = \frac{x-2}{x}$$

We vermenigvuldigen linker- en rechterlid met $(x + 2)x$, het product van de noemers.

$$\frac{(2x-5)(x+2)x}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2)x}{x}$$

We vereenvoudigen de breuken.

$$(2x-5)x = (x-2)(x+2)$$

We werken de uitdrukkingen uit.

$$2x^2 - 5x = x^2 - 4$$

We halen alles naar links.

$$2x^2 - x^2 - 5x + 4 = 0$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

We ontbinden in factoren.

$$(x-4)(x-1) = 0$$
$$x = 4 \text{ of } x = 1$$

«

Door de vergelijking links en rechts met het product van de noemers te vermenigvuldigen, verdwijnen de noemers, waarna we een eenvoudiger vergelijking overhouden. De eerste twee stappen kunnen in één keer worden uitgevoerd. In plaats van vermenigvuldigen met de noemers en vervolgens vereenvoudigen, kan ook 'kruislings' worden vermenigvuldigd. Daartoe wordt de teller van de eerste breuk vermenigvuldigd met de noemer van de tweede en dit gelijkgesteld aan de vermenigvuldiging van de noemer van de eerste met de teller van de tweede. Het resultaat is uiteraard hetzelfde.
Een complicerende factor bij het oplossen van gebroken vergelijkingen is, dat niet voor alle waarden van x de breuken in de vergelijking betekenis hebben. In het voorgaande voorbeeld mag x niet gelijk zijn aan –2, of 0, want dan zijn de breuken niet gedefinieerd. Aan het einde van de berekeningen moet daarom altijd gecontroleerd worden, of de gevonden oplossingen wel kunnen gelden.

Ook hier geldt weer dat er vele verschillende routes zijn om de oplossing te vinden. In het algemeen is het een goede aanpak om de breuken weg te werken, door de vergelijking te vermenigvuldigen met het product van de noemer(s) of door kruislings te vermenigvuldigen.

OPGAVE 5.15
Bepaal de oplossingen van de volgende vergelijkingen:

a $\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x+2}{x+1}$

b $\dfrac{x^2+15}{x-1}=2x$

c $\dfrac{x+3}{x^2+2}=\dfrac{1}{x}$

d $\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{x-3}{2x}$

3 Wortelvergelijkingen

Wortelvergelijking

Als in een vergelijking een wortel voorkomt, met onder het wortelteken de variabele, dan spreken we van een *wortelvergelijking*. Als de wortel als enige aan één kant van de vergelijking staat, of als aan beide kanten alleen een wortel staat, dan kunnen we die wegwerken door zowel linker- als rechterlid te kwadrateren.

$\sqrt{x-1}=\sqrt{5-x^2}$	We kwadrateren linker- en rechterlid.
$x-1=5-x^2$	We brengen alle termen naar links.
$x^2+x-6=0$	Ontbinden in factoren.
$(x+3)(x-2)=0$	
$x=-3$ of $x=2$	

Net als bij de gebroken vergelijkingen moeten we oppassen, want het kan zijn dat er oplossingen naar voren komen die geen oplossing blijken te zijn. We zien in dit voorbeeld dat de oplossing –3 niet kan, immers dan staan onder de wortelteken negatieve getallen. We zullen dus altijd moeten controleren of de gevonden waarden ook werkelijk oplossingen zijn van de oorspronkelijke vergelijking.

OPGAVE 5.16
Bepaal de oplossingen van de volgende vergelijkingen:

a $\sqrt{x} = \sqrt{x^2 - 4x}$

b $\sqrt{x^2 - 4x} = \sqrt{5}$

c $\sqrt{8x - 4} = 2x$

d $\sqrt{2x - 7} = \sqrt{1 - x^2}$

e $\sqrt{x} = 2 - \sqrt{x - 1}$

f $x + 1 = \sqrt{-3x - 3}$

4 Exponentiële en logaritmische vergelijkingen

Exponentiële vergelijking

Als de variabele x in de exponent voorkomt, dan spreken we van een *exponentiële vergelijking*. We lossen zulke vergelijkingen op, door ze om te werken, zodat de grondtallen gelijk zijn. De oplossing(en) vinden we dan door de exponenten gelijk te stellen.

$$2^{x^2+4x} = \frac{1}{16}$$
$$2^{x^2+4x} = 2^{-4}$$
$$x^2 + 4x = -4$$
$$x^2 + 4x + 4 = 0$$
$$(x+2)^2 = 0$$
$$x = -2$$

Vergelijkingen met logaritmen

Ook *vergelijkingen met logaritmen* kunnen we oplossen door ervoor te zorgen dat links en rechts van het gelijkteken logaritmen met hetzelfde grondtal staan.

$$^2\log(x-1) = 3$$
$$^2\log(x-1) = {}^2\log 8$$
$$x - 1 = 8$$
$$x = 9$$

Omdat logaritmen alleen gedefinieerd zijn als het argument groter is dan 0, moeten we nog wel nagaan of de gevonden oplossing niet tot problemen leidt in de oorspronkelijke opgave. In dit geval ontstaat er met $x = 9$ geen probleem.
Een andere manier om bovenstaande vergelijking op te lossen, is door te gebruiken dat als linker- en rechterlid gelijk zijn, dat dan ook machten met gelijk grondtal en exponenten gelijk aan het linker- en rechterlid gelijk moeten zijn:

$$^2\log(x-1) = 3$$
$$2^{{}^2\log(x-1)} = 2^3$$
$$x - 1 = 8$$
$$x = 9$$

OPGAVE 5.17

Bepaal de oplossingen van de volgende vergelijkingen:

a $3^{4x} = 9^{x^2+1}$

b $7^{2x-5} = \frac{1}{49}$

c $25^{x} = 5^{x-1}$

d $^{10}\log(x-1) = 2$

e $^{2}\log(x^2+2x) = {}^{2}\log 3$

f $^{5}\log(x-1) = {}^{5}\log(2x+1)$

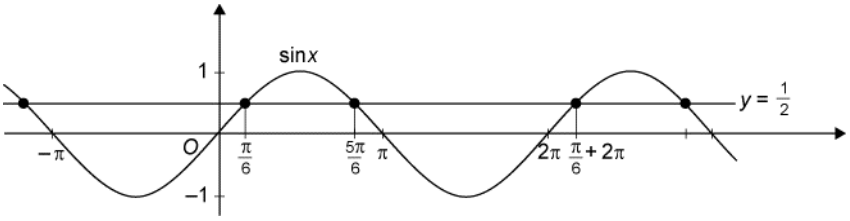
5 Goniometrische vergelijkingen

Goniometrische vergelijking

In de vorige leereenheid zijn goniometrische functies geïntroduceerd. We gebruiken die om *goniometrische vergelijkingen* op te lossen. We spreken van goniometrische vergelijkingen als er termen zoals $\sin x$ of $\cos(2x + 4)$ in voorkomen. Omdat de goniometrische functies periodieke functies zijn, zijn er vaak meerdere oplossingen. We laten de oplosmethode weer zien aan de hand van enkele voorbeelden.

VOORBEELD 5.10

We zoeken de oplossing(en) van de vergelijking $\sin x = \frac{1}{2}$. In leereenheid 3 hebben we al gezien dat als $x = \frac{\pi}{6}$, dat dan $\sin x = \frac{1}{2}$. Hiermee hebben we een eerste oplossing te pakken.
Er zijn echter meer oplossingen. Kijk daartoe naar onderstaande grafiek van $\sin x$.



FIGUUR 5.5 Snijpunten van sin$x$ en de lijn $y = \frac{1}{2}$

De grafiek van $\sin x$ herhaalt zich iedere 2π radialen. Dat betekent dat niet alleen $\frac{\pi}{6}$ een oplossing is, maar ook $\frac{\pi}{6} + 2\pi$, $\frac{\pi}{6} + 4\pi$, en zo verder. Ook verder naar links vinden we oplossingen: $\frac{\pi}{6} - 2\pi$, $\frac{\pi}{6} - 4\pi$, enzovoort. Al deze oplossingen nemen we in één keer samen en noteren die met:

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Met $k \in \mathbb{Z}$ geven we weer dat k ieder geheel getal, inclusief 0 kan zijn. Uit symmetrieoverwegingen die we herkennen in de figuur kunnen we bovendien afleiden dat ook $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ een oplossing is. Omdat deze oplossing ook iedere 2π voorkomt, vinden we nog een verzameling oplossingen:

$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

We concluderen dat de oplossingen van de vergelijking $\sin x = \frac{1}{2}$ de waarden van x zijn waarvoor geldt: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ of $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. «

VOORBEELD 5.11 We lossen nu een iets ingewikkelder vergelijking op: $\cos(3x + \frac{\pi}{8}) = 1$. Uit de grafiek van $\cos x$ leiden we af dat $\cos x = 1$, als $x = 2k\pi$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$. Dan is $\cos(3x + \frac{\pi}{8}) = 1$ als $(3x + \frac{\pi}{8}) = 2k\pi$. Dit kunnen we verder uitwerken:

$3x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi$
$3x = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi$
$x = -\frac{\pi}{24} + \frac{2k\pi}{3}$, voor alle $k \in \mathbb{Z}$

De laatste uitdrukking geeft de verzameling met alle oplossingen van de vergelijking weer. Voor elke gehele waarde van k vinden we een oplossing. «

OPGAVE 5.18
Bepaal de oplossingen van de volgende vergelijkingen:
a $\sin(2x) = 1$
b $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$
c $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
d $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
e $2 + \sin(3x) = 1$

6 Ongelijkheden

In de voorgaande paragrafen hebben we steeds gekeken wanneer twee uitdrukkingen aan elkaar gelijk zijn. Vaak willen we juist kijken wanneer ze ongelijk zijn, bijvoorbeeld wanneer de ene functie groter is dan een andere. We zoeken dan dus een oplossing of oplossingen voor de

Ongelijkheid

ongelijkheid $f(x) > g(x)$. Om dit te analyseren, kunnen we voor een groot deel gebruik maken van de hiervoor behandelde technieken. Soms is het voldoende om bij het omwerken van de vergelijkingen, het gelijkteken door een ongelijkteken te vervangen. In sommige gevallen is nadere analyse nodig.

VOORBEELD 5.12 Los op: $2x - 4 > 2$
Uitwerking:

$2x - 4 > 2$	Tel links en rechts 4 op.
$2x > 6$	Deel links en rechts door 2.
$x > 3$	

«

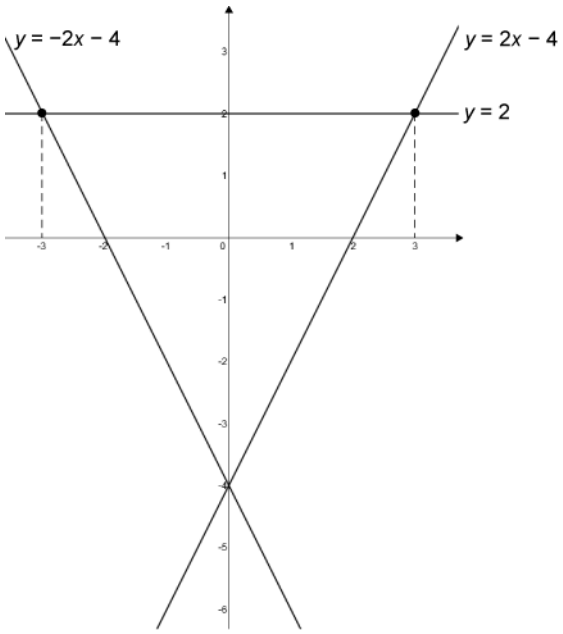
We zien dat als $x > 3$, dat dan $2x - 4 > 2$. Het omwerken van de ongelijkheden gaat net zoals bij de gelijkheden.
In onderstaand voorbeeld loopt het echter net wat anders.

VOORBEELD 5.13 Los op: $-2x - 4 > 2$

Uitwerking:

$-2x - 4 > 2$	Tel links en rechts 4 op.
$-2x > 6$	Deel links en rechts door –2; het teken draait daarbij om, immers, als $a > b$, dan is $-a < -b$
$x < -3$	«

Als we delen (of vermenigvuldigen) met een negatief getal, dan draait het ongelijkteken om. Een en ander is ook geschetst in onderstaande figuur, waarin de lijnen $y = 2x - 4$, $y = -2x - 4$ en $y = 2$ zijn getekend. In die figuur is goed af te lezen voor welke waarden van x de ongelijkheden gelden, en dus wat de oplossingen zijn van de ongelijkheden.



FIGUUR 5.6 Grafische weergave van ongelijkheden

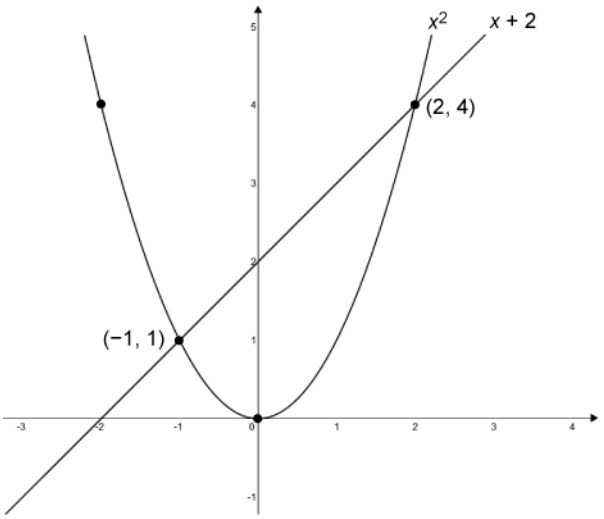
Hiervoor is aangegeven dat er bij het oplossen van ongelijkheden opgelet moet worden of het ongelijkteken omgedraaid moet worden. Als door x, of een term met x erin gedeeld wordt, dan is het lastig dat te beoordelen, want we weten niet wat x is; die kan positief of negatief zijn. Een betere aanpak is dan het linker- en rechterlid op te vatten als de voorschriften van twee functies en de snijpunten van de twee grafieken te berekenen, een schets te maken van de grafieken, en daaruit af te leiden wat de oplossing is van de ongelijkheid. We geven weer een voorbeeld.

VOORBEELD 5.14 Los op: $x^2 > x + 2$

Uitwerking:

$x^2 > x + 2$	We maken van de ongelijkheid eerst een gelijkheid.
$x^2 = x + 2$	We halen alle termen naar links.
$x^2 - x - 2 = 0$	Ontbinden in factoren.
$(x - 2)(x + 1) = 0$	Afzonderlijke factoren gelijk aan 0 stellen.
$x = 2$ of $x = -1$	

Met $x = 2$ en $x = -1$ vinden we de snijpunten (2, 4) en (–1, 1). We berekenen nog enkele punten van de lijn en de parabool en tekenen de grafieken samen in een assenstelsel.



FIGUUR 5.7 Grafische weergave van $x^2 > x + 2$

We zien nu in de figuur dat als $x > 2$ er geldt dat $x^2 > x + 2$. Maar ook voor $x < -1$ geldt dit. De oplossing voor de ongelijkheid $x^2 > x + 2$ is nu dus $x > 2$ of $x < -1$.
Als we de oplossing zoeken voor de ongelijkheid $x^2 \geq x + 2$ dan vinden we $x \geq 2$ of $x \leq -1$. Let op dat we hier in plaats van het groter-teken, het groter-of-gelijk-teken hebben gebruikt. «

OPGAVE 5.19
Bepaal de oplossingen van de volgende ongelijkheden:
a $2x < 6$
b $x^2 + 3x \geq 0$
c $x^2 - x \leq x + 3$
d $x^2 + 5x > x + 5$
e $\sin(2x) > 0$

7 Toepassingen

TOEPASSING 1 We zijn nu in staat het vraagstuk uit de introductie op te lossen. De vraag die daar was gesteld, was wanneer de helft van de uiteindelijk te verwachten afzet bereikt is. Daartoe moesten we de volgende vergelijking oplossen:

$$\frac{1-2^{-x}}{1+2^{-x}} = \frac{1}{2}$$

We lossen deze vergelijking als volgt op:

$$\frac{1-2^{-x}}{1+2^{-x}} = \frac{1}{2}$$
$$2-2\cdot 2^{-x} = 1+2^{-x}$$
$$-3\cdot 2^{-x} = -1$$
$$2^{-x} = \tfrac{1}{3}$$
$${}^{2}\log(2^{-x}) = {}^{2}\log(\tfrac{1}{3})$$
$$-x = -{}^{2}\log 3$$
$$x = {}^{2}\log 3 = 1{,}58$$

Dus zodra $x = 1{,}58$ is de afzet de helft van het totaal.

TOEPASSING 2

Informatie die verzonden wordt over het internet moet soms worden versleuteld. Dit geldt bijvoorbeeld voor gegevens van creditcards of betaalpassen. Voor de versleuteling worden sleutels gebruikt, die bestaan uit reeksen cijfers. Het aantal cijfers is de lengte van een sleutel. Om de veiligheid te garanderen moeten sleutels lang genoeg zijn. Maar omdat de rekenkracht van computers voortdurend toeneemt, kunnen afluisteraars steeds langere sleutels ontcijferen en moeten de sleutels in de toekomst dus steeds langer zijn. Stel dat de lengte van sleutels die veilig geacht worden, zijn weer te geven door de volgende formule:

$$l(n) = 256\cdot(\sqrt[5]{2})^{n-2014}$$

Hierin is n het jaartal, en $l(n)$ is de lengte van een veilige sleutel in jaar n. Met $n = 2014$, volgt dat $l(2014) = 256$. Dus in 2014 is in dit model een sleutel met lengte 256 veilig te noemen.
We kunnen ons nu afvragen wanneer we sleutels langer dan 1000 cijfers moeten gaan gebruiken. Daartoe moeten we voor n oplossen:

$$l(n) > 1000$$
$$256\cdot(\sqrt[5]{2})^{n-2014} > 1000$$
$$(\sqrt[5]{2})^{n-2014} > 1000/256$$
$${}^{10}\log((\sqrt[5]{2})^{n-2014}) > {}^{10}\log(1000/256)$$
$$(n-2014)\cdot {}^{10}\log(\sqrt[5]{2}) > {}^{10}\log(1000/256)$$
$$n-2014 > \frac{{}^{10}\log(1000/256)}{{}^{10}\log(\sqrt[5]{2})}$$
$$n > 2014 + \frac{{}^{10}\log(1000/256)}{{}^{10}\log(\sqrt[5]{2})} \approx 2024$$

Dus vanaf het jaar 2024 moeten sleutels van meer dan 1000 cijfers gebruikt gaan worden (als het vermelde model klopt).

TOEPASSING 3

We bekijken een heel ander voorbeeld. Wereldwijd wordt een index gebruikt om een indicatie te geven of iemand te zwaar of te licht is. Deze index is de Body Mass Index (BMI). De BMI wordt berekend uitgaande van het gewicht (g) in kilogrammen en de lengte (l) in meters. De formule voor de BMI is:

$$\text{BMI} = \frac{g}{l^2}$$

Iemand met een gewicht van 70 kg een lengte van 1,75 m en heeft een BMI van $70/(1{,}75)^2 = 22{,}86$. Als de BMI tussen 18,5 en 25 is, dan is sprake van een normaal gewicht. Boven de 25 is sprake van overgewicht; onder de 18,5 is sprake van ondergewicht.
Stel dat we willen weten hoe lang iemand met een gewicht van 80 kg moet zijn, om niet te zwaar te zijn. Daartoe moeten we oplossen:

$$\text{BMI} < 25$$
$$\frac{g}{l^2} < 25$$
$$\frac{80}{l^2} < 25$$
$$80 < 25 \cdot l^2$$
$$\frac{80}{25} < l^2$$
$$l^2 > \frac{80}{25}$$
$$l > \sqrt{\frac{80}{25}} \approx 1{,}79$$

Dus iemand van 80 kg, heeft volgens de BMI-index een normaal gewicht als hij of zij langer is dan 1,79 m.
Let op dat wiskundig gezien we in de laatste stap ook oplossingen vinden van de vorm $l < -1{,}79$. Maar lengtes van mensen zijn niet negatief, dus deze oplossingen komen te vervallen.

OPGAVE 5.20
Wanneer is in het voorbeeld in toepassing 1 een afzet bereikt van 90% van de uiteindelijke afzet?

OPGAVE 5.21
In welk jaar moeten volgens het model in toepassing 2 de sleutels minimaal 500 cijfers lang zijn?

OPGAVE 5.22
Iemand is 1,70 meter lang. Wat moet zijn gewicht volgens de BMI-index minimaal zijn, om niet te licht te zijn?

SAMENVATTING

In deze leereenheid hebben we vergelijkingen en ongelijkheden leren oplossen. Een vergelijking is een uitdrukking van de vorm $f(x) = g(x)$, waarin f en g allerlei vormen aan kunnen nemen. Het oplossen van een vergelijking bestaat uit het vinden van waarden van x, waarvoor geldt dat als ze in de vergelijking worden ingevuld, en de waarden worden berekend, er aan de linker- en rechterkant van het gelijkteken dezelfde waarde staat. Het oplossen van een ongelijkheid $f(x) > g(x)$ bestaat uit het vinden van waarden van x waarvoor deze geldt.
Door het op dezelfde wijze omwerken van de linker- en rechterleden van een vergelijking, kan de oplossing worden gevonden.
Bij kwadratische vergelijkingen kan soms de *abc*-formule worden toegepast om oplossingen te vinden. De oplossingen van de kwadratische vergelijking

$$ax^2 + bx + c = 0$$

zijn:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Oplossingen bestaan alleen als de discriminant $b^2 - 4ac$ groter of gelijk aan 0 is.
Bij wortelvergelijkingen en gebroken vergelijkingen moet worden opgelet of de gevonden oplossingen ook werkelijk oplossingen zijn, want soms worden oplossingen in het oplosproces geïntroduceerd, die geen oplossing kunnen zijn (bijvoorbeeld omdat wortels van negatieve waarden niet zijn gedefinieerd in de reële getallen).
Bij goniometrische vergelijkingen komen vaak meerdere oplossingen voor, omdat goniometrische functies periodiek zijn.

ZELFTOETS

1 a Bepaal het snijpunt van de grafieken van de functies f: $x \to x - 2$ en g: $x \to -\frac{1}{2}x + 2$.
b Bepaal de coördinaten van de punten waarin de grafiek van f de x-as en de y-as snijdt.
c Ligt het punt (7, –1) op de grafiek van g?

2 Bepaal het functievoorschrift waarvan de grafiek de lijn is die door de punten (–2, 3) en (4, 1) gaat.

3 Geef de vergelijkingen van de horizontale en de verticale lijn door het punt (1, 2).

4 Bepaal de oplossingen van de vergelijkingen:
   a $x^2 - 100 = 0$
   b $x^2 - 3x + 2 = 0$
   c $x^2 - 5x + 1 = 0$

5 Bepaal de oplossingen van de volgende vergelijkingen

   a $\frac{x+1}{x-3} = \frac{x}{x-1}$
   b $\sqrt{6+x} = \sqrt{x^2 - 4x}$
   c $27^x = 3^{x^2+2}$
   d ${}^7\log(x^2 - 15) = 2$
   e $\cos x = \frac{1}{2}$

6 Voor welke waarden van x gelden de volgende ongelijkheden?

   a $x^2 + 3x \leq x$
   b $x^2 > 4x + 5$
   c $\sin x \leq 0$

Differentiëren

Introductie *131*

Leerkern *132*

1 Snelheid *132*
2 Differentiequotiënt en afgeleide *132*
3 De afgeleide van constante en lineaire functies *136*
4 Rekenregels *137*
  4.1 Somregel en verschilregel *137*
  4.2 Productregel en quotiëntregel *138*
  4.3 Kettingregel *141*
5 Standaardafgeleiden *143*
  5.1 Machtsfuncties *143*
  5.2 Goniometrische functies *145*
  5.3 Exponentiële functies *146*
  5.4 Logaritmische functies *148*
  5.5 Oefenen met differentiëren *149*

Samenvatting *150*

Zelftoets *151*

Leereenheid 6

Differentiëren

INTRODUCTIE

Het begrip snelheid wordt op allerlei manieren in het dagelijks leven gebruikt. Ook in informatica en communicatietechnologie duikt het begrip op, denk aan de snelheid van een processor, van datatransport, maar ook bijvoorbeeld de snelheid waarmee het aantal gebruikers van internet toeneemt. Maar hoe kunnen we snelheid bepalen? Om te beginnen kijken we naar een voorbeeld uit de dagelijkse praktijk.

In elke auto bevinden zich de volgende meetinstrumenten: een *kilometerteller* die het aantal gereden kilometers aangeeft, en een *snelheidsmeter* die de snelheid aanwijst (in kilometer per uur). Wat is het verband tussen die twee? Als de auto met een *constante* snelheid rijdt, is het heel eenvoudig: de afgelegde afstand (in kilometer) gedeeld door de tijd die daarvoor nodig is (in uren), is de snelheid. Wanneer de auto bijvoorbeeld, rijdend met een constante snelheid, in 12 minuten (= 0,2 uur) een afstand van 10 kilometer aflegt, dan is de snelheid 10/0,2 = 50 km per uur. Maar hoe bepalen we de snelheid als deze varieert? Dan zullen we eerst moeten weten wat we precies onder snelheid verstaan.

De techniek die we gaan ontwikkelen en gebruiken heet 'differentiëren'. De theorie waarbinnen we dit doen is de 'differentiaalrekening'. Deze theorie is een belangrijk onderdeel van de wiskunde, wordt op ontelbaar veel plaatsen toegepast en heeft in hoge mate bijgedragen aan de ontwikkeling van wetenschap en technologie in de afgelopen eeuwen.

LEERDOELEN

Na het bestuderen van deze leereenheid wordt verwacht dat u

- weet wat een differentiequotïent is, en dit voor gegeven functies uit kunt rekenen
- kunt uitleggen wat de afgeleide van een functie is
- weet dat de snelheid van een bewegend punt de afgeleide is van de afgelegde afstand als functie van de tijd
- de interpretatie kent van de afgeleide als richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek
- de afgeleiden kent van de standaardfuncties
- rekenregels kent voor het bepalen van de afgeleide van samengestelde functies
- met behulp van rekenregels en standaardafgeleiden functies kunt differentiëren.

CC BY NC ND

LEERKERN

1 Snelheid

Gemiddelde snelheid

In de introductie zagen we hoe we de snelheid van een auto kunnen bepalen als deze constant is. Is de snelheid niet constant, dan geeft zo'n rekensom de *gemiddelde* snelheid over dat traject. Hoe kunnen we dan op een vergelijkbare manier het precieze snelheidsverloop bepalen? Verdeel in gedachten het tijdsinterval van 12 minuten in een groot aantal kleine deelintervalletjes, bijvoorbeeld van 0,001 uur (dat is 3,6 seconde), en neem aan dat op zo'n klein deelinterval de snelheid bij benadering constant is. De afstand (in kilometer) die de auto in dat kleine tijdsinterval heeft afgelegd, geeft na deling door 0,001 de gemiddelde snelheid over die 3,6 seconde. Omdat de snelheid in een zo korte tijd nauwelijks verandert, is dat een goede benadering van de *momentane snelheid* op elk tijdstip binnen dat interval. Was de afgelegde afstand in 0,001 uur bijvoorbeeld 47 meter (dus 0,047 km), dan was de gemiddelde snelheid 0,047/0,001 = 47 km per uur, en dat zal ook wel zo ongeveer de momentane snelheid zijn geweest op elk tijdstip binnen dat tijdsintervalletje.

Momentane snelheid

Dit proces kunnen we desgewenst nog verder verfijnen. In wiskundige termen betekent dit dat we de momentane snelheid $v(t)$ op een zeker tijdstip t bepalen door de waarde te bepalen waarnaar het quotiënt $\Delta s/\Delta t$ nadert als we Δt naar 0 laten gaan. Hierbij wordt de afgelegde afstand (in km) weergegeven door de letter s, en de tijd (in uren) door t, terwijl met het symbool Δ (de Griekse hoofdletter delta) een toename (of afname) wordt aangeduid.

2 Differentiequotiënt en afgeleide

In paragraaf 1 hebt u gezien hoe we in principe bij een afstandsfunctie s de snelheid op een moment t kunnen bepalen. Ook van andere functies kunnen we de 'snelheid' waarmee een functie toeneemt op een bepaald moment benaderen door de 'gemiddelde toenamesnelheid'. Als voorbeeld nemen we de functie $f(x) = x^2$. De gemiddelde toename over het interval [1, 3] berekenen we met behulp van het quotiënt

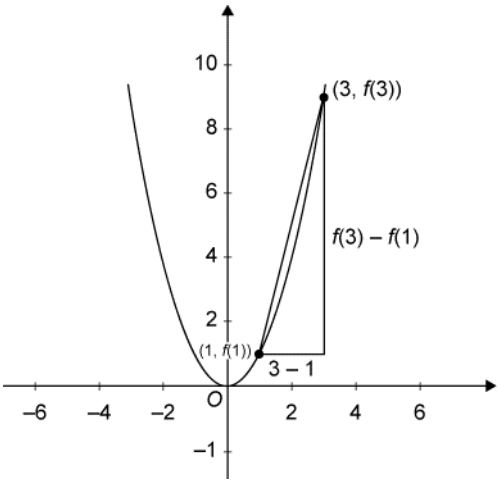
$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{9-1}{2}=4$$

Differentiequotiënt

We noemen zo'n quotiënt een *differentiequotiënt*: het verschil (de differentie) van de functiewaarden wordt gedeeld door het verschil van de x-waarden. Een veelgebruikte notatie voor dit soort verschillen is de Griekse hoofdletter delta, Δ. U kent deze notatie uit paragraaf 2 van leereenheid 4. Met behulp van deze delta's schrijven we het differentiequotiënt als volgt:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{9-1}{2}=4$$

In figuur 6.1 is de grafiek van de functie $f(x) = x^2$ getekend. De waarde van het differentiequotiënt is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn door de punten (1, $f(1)$) en (3, ($f(3)$).



FIGUUR 6.1 Het differentiequotiënt van de functie $f(x) = x^2$ over [1, 3]

In tabel 6.1 is een aantal differentiequotiënten weergegeven over intervallen [1, b] waarbij we b steeds dichter bij 1 gekozen hebben. De waarden lijken te naderen naar 2. Ook als we het getal 1 vanaf de linkerkant benaderen, en differentiequotiënten over [b, 1] uitrekenen, naderen de waarden naar 2 als we b steeds dichter bij 1 kiezen. U ziet dit in de rechterkolom van tabel 6.1.

TABEL 6.1 Differentiequotiënten van de functie $f(x) = x^2$ over [1, b] en [b, 1]

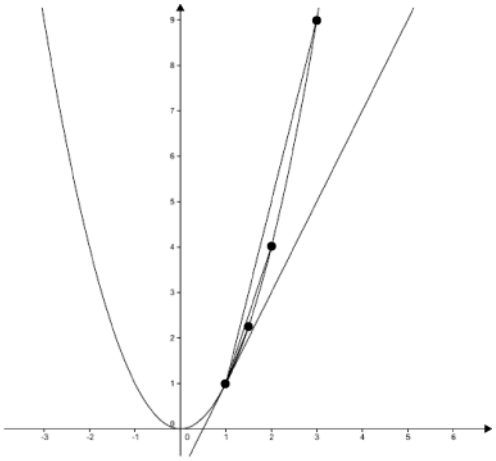
b	$\frac{f(b)-f(1)}{b-1}$	b	$\frac{f(1)-f(b)}{1-b}$
3	4	–1	0
2	3	0	1
1,5	2,5	0,5	1,5
1,2	2,2	0,8	1,8
1,1	2,1	0,9	1,9
1,05	2,05	0,95	1,95
1,02	2,02	0,98	1,98
1,01	2,01	0,99	1,99
1,001	2,001	0,999	1,999

Merk op dat het voor de berekening niet uitmaakt of we b links of rechts van 1 kiezen; het differentiequotiënt over [b, 1] is gelijk aan:

$$\frac{f(1)-f(b)}{1-b} = \frac{f(b)-f(1)}{b-1}$$

Bij het uitschrijven van differentiequotiënten zetten we het variabele deel meestal voorop.

In figuur 6.2 zijn voor een aantal waarden van b de lijnstukken tussen de punten $(1, f(1))$ en $(b, (f(b))$ getekend. Naarmate b dichter bij 1 gekozen wordt, gaan deze lijnen steeds meer lijken op de raaklijn aan de grafiek door het punt $(1, f(1))$ en het ligt voor de hand dat deze raaklijn dan ook richtingscoëfficiënt 2 zal hebben.



FIGUUR 6.2 Een aantal lijnstukken behorend bij differentiequotiënten en de raaklijn aan de grafiek van $f(x) = x^2$ in $x = 1$

We noemen de waarde waarnaar de differentiequotiënten naderen de afgeleide van de functie in $x = 1$ en noteren deze als $f'(1) = 2$.

Een exact wiskundige definitie van het begrip afgeleide zullen we in deze cursus niet geven. We volstaan met de volgende omschrijving:

Afgeleide

Als van een functie f de differentiequotiënten

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

naar een bepaalde waarde c naderen als we b naar a laten gaan, dan zeggen we dat f differentieerbaar is in $x = a$ met *afgeleide* $f'(a) = c$.

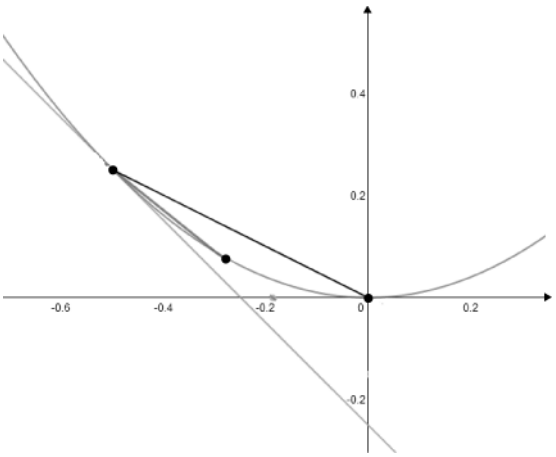
VOORBEELD 6.1 In tabel 6.2 is voor verschillende waarden van b het differentiequotiënt

$$\frac{f(b) - f(-\frac{1}{2})}{b - (-\frac{1}{2})}$$

van de functie $f(x) = x^2$ uitgerekend, in de linkerkolommen is $b > -\frac{1}{2}$ gekozen, in de rechterkolommen staan waarden voor $b < -\frac{1}{2}$. In beide gevallen naderen de differentiequotiënten naar –1. De afgeleide van f in $x = -\frac{1}{2}$ is dan ook gelijk aan $f'(-\frac{1}{2}) = -1$. U ziet dat zowel de differentiequotiënten als de afgeleide in dit geval negatief zijn. Dat correspondeert met een negatieve richtingscoëfficiënt van verbindingslijnstukken en raaklijn. Dit zijn dalende lijnen, zoals u kunt zien in figuur 6.3.

TABEL 6.2 Differentiequotiënten van de functie $f(x) = x^2$

b	$\frac{f(b) - f(-\frac{1}{2})}{b - (-\frac{1}{2})}$	b	$\frac{f(-\frac{1}{2}) - f(b)}{-\frac{1}{2} - b}$
0	$-\frac{1}{2}$	–1	$-1\frac{1}{2}$
–0,3	–0,8	–0,7	–1,2
–0,4	–0,9	–0,6	–1,1
–0,45	–0,95	–0,55	–1,05
–0,48	–0,98	–0,52	–1,02
–0,49	–0,99	–0,51	–1,01
–0,499	–0,999	–0,501	–1,001



FIGUUR 6.3 Enkele lijnstukken behorend bij differentiequotiënten en de raaklijn aan de grafiek van $f(x) = x^2$ in $x = -\frac{1}{2}$ «

OPGAVE 6.1
Bereken het differentiequotiënt over $[a, b]$ voor $f(x) = x^2$. Naar welke waarde nadert dit quotiënt als b naar a gaat?

OPGAVE 6.2
Bereken het differentiequotiënt over $[3, b]$ en de afgeleide in $x = 3$ van
a $f(x) = -4$
b $f(x) = 2x$
c $f(x) = -4x + 2$

OPGAVE 6.3
a Bereken het differentiequotiënt over $[1, b]$ voor $f(x) = \frac{1}{x}$. Naar welke waarde nadert dit quotiënt als b naar 1 gaat?
b Bereken het differentiequotiënt over $[a, b]$ voor $f(x) = \frac{1}{x}$. Naar welke waarde nadert dit quotiënt als b naar a gaat?

Vaak kunnen we bij een functie f de afgeleide bepalen voor elke x in het domein. Daarmee definiëren we een nieuwe functie, namelijk de functie die aan x de afgeleide $f'(x)$ toevoegt.

Afgeleide functie

DEFINITIE 6.1 De functie die aan elke x de afgeleide waarde van f in x toevoegt, noemen we de afgeleide functie.

Differentiëren
Differentieerbaar

Het bepalen van de afgeleide noemen we *differentiëren*, een functie waarvan de afgeleide bepaald kan worden heet *differentieerbaar*.

Notatie

De afgeleide functie van een functie f wordt genoteerd als f'. Als we willen benadrukken van welke variabele de functie afhangt zeggen we ook wel dat de afgeleide van $f(x)$ gelijk is aan $f'(x)$. Andere notaties die gebruikt worden zijn $\frac{df}{dx}$ of $\frac{d}{dx} f$.

VOORBEELD 6.2

In opgave 6.1 hebt u laten zien dat de afgeleide van $f(x) = x^2$ in $x = a$ gelijk is aan $2a$. De afgeleide functie f' heeft dus als functievoorschrift $f'(x) = 2x$. Op dezelfde manier volgt uit opgave 6.3 dat de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ als afgeleide de functie $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ heeft. «

3 De afgeleide van constante en lineaire functies

Het bepalen van afgeleiden met behulp van differentiequotiënten is omslachtig en geeft lang niet altijd direct een antwoord. In deze paragraaf en paragraaf 5 zullen we van een aantal standaardfuncties de afgeleiden geven. Met behulp van de rekenregels uit de volgende paragraaf kunt u vervolgens van veel functies de afgeleide bepalen.

In paragraaf 2 is opgemerkt dat de afgeleide van een functie in een bepaald punt opgevat kan worden als de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in dat punt aan de grafiek. Voor constante en lineaire functies kunnen we hier omgekeerd direct de afgeleide mee bepalen. Immers de grafiek van een constante functie is een horizontale lijn. In elk punt valt de raaklijn aan de grafiek samen met deze grafiek. De richtingscoëfficiënt van een horizontale lijn is gelijk aan 0, en dus is de afgeleide van een constante functie ook gelijk aan 0. We kunnen dit ook laten zien met differentiequotiënten. In opgave 6.2a zag u dat alle differentiequotiënten over $[3, b]$ bij de functie $f(x) = -4$ gelijk zijn aan 0 en dus ook de afgeleide gelijk is aan 0.

Een zelfde soort berekening kunnen we uitvoeren voor een willekeurige constante functie $f(x) = c$.

OPGAVE 6.4
Toon aan dat de afgeleide van de constante functie $f(x) = c$ gelijk is aan $f'(x) = 0$.

We gaan vervolgens op zoek naar de afgeleide van een lineaire functie $f(x) = ax + b$. We bepalen eerst het differentiequotiënt over een interval $[p, q]$ waarmee we $f'(p)$ kunnen uitrekenen. Dit is gelijk aan

$$\frac{f(q)-f(p)}{q-p} = \frac{(aq+b)-(ap+b)}{q-p} = \frac{aq-ap}{q-p} = \frac{a(q-p)}{q-p} = a \quad (\text{voor } q \neq p)$$

U ziet dat de uitkomst van het differentiequotiënt onafhankelijk is van de waarde van q, namelijk steeds gelijk aan a. Als we q naar p laten naderen blijft de waarde van het differentiequotiënt gelijk aan a. De afgeleide $f'(p)$ is dus a. Dit geldt voor elke p, dus de afgeleide functie is de constante functie $f'(x) = a$.

We vatten de resultaten van deze paragraaf samen:

Afgeleide van lineaire en constante functie

De afgeleide van een constante functie $f(x) = c$ is $f'(x) = 0$
De afgeleide van een lineaire functie $f(x) = ax + b$ is $f'(x) = a$.

OPGAVE 6.5
Gegeven is de functie $f(x) = 4x - 8$.
Bepaal $f'(2)$, $f'(5)$, $f'(-3)$.

OPGAVE 6.6
Bepaal van de volgende functies de afgeleide functie
a $f(x) = -2x + 10$
b $f(x) = \sqrt{2} \cdot x - \frac{1}{2}$
c $f(x) = x$
d $f(x) = 25$
e $f(x) = 8 - x$

4 Rekenregels

4.1 SOMREGEL EN VERSCHILREGEL

Als introductie op deze paragraaf beginnen we met een opgave.

OPGAVE 6.7
Laat $f(x) = 3x + 2$ en $g(x) = 2x + 6$
a Bepaal $f' + g'$ en $(f + g)'$. Wat valt op?
b Bepaal $f' - g'$ en $(f - g)'$. Wat valt op?
c Wat gebeurt er met de afgeleide van de functie f als we deze functie met een constante vermenigvuldigen?

Opgave 6.7 suggereert dat er regels zijn waarmee afgeleiden van functies zijn te bepalen. In deze paragraaf geven we rekenregels voor het bepalen van de afgeleiden van de som en het verschil van twee functies. In de volgende paragrafen komen regels voor het product, quotiënt en kettingfuncties aan bod. Omdat we geen exacte definitie van het begrip afgeleide hebben gegeven, is het ook niet mogelijk om deze rekenregels te bewijzen, we zullen ze wel aannemelijk maken.

In opgave 6.7 hebt u gezien dat de afgeleide van de som van twee lineaire functies gelijk is aan de som van de afgeleiden van deze functies. Dit is een speciaal geval van de somregel voor het differentiëren.

VOORBEELD 6.3 Een fietser fietst op een tanker in de vaarrichting. De weg die de fietser in een bepaalde tijd aflegt is de som van de gefietste en gevaren afstand, en zijn snelheid is de som van de snelheden. Als de fietser tegengesteld aan de vaarrichting fietst, is zijn snelheid juist gelijk aan het verschil tussen de vaarsnelheid en zijn eigen snelheid. «

Als f en g differentieerbaar zijn met afgeleiden f' en g' dan geldt

Somregel $f + g$ is differentieerbaar met afgeleide $f' + g'$
Verschilregel $f - g$ is differentieerbaar met afgeleide $f' - g'$
Maal een constante cf is differentieerbaar met afgeleide cf' voor een constante c.

VOORBEELD 6.4 In de vorige paragraaf leerde u hoe u de afgeleide van de functie $f(x) = 3x - 2$ berekent. Deze is gelijk aan $f'(x) = 3$. In voorbeeld 6.2 hebt u gezien dat de afgeleide van $g(x) = x^2$ gelijk is aan $g'(x) = 2x$. Laat $h(x) = 2x^2 + 3x - 2$. Uit de rekenregels volgt nu:

$$h'(x) = (2g + f)'(x) = (2g)'(x) + f'(x) = 2g'(x) + f'(x) = 4x + 3$$ «

OPGAVE 6.8
In voorbeeld 6.2 hebt u gezien dat de afgeleide van $f(x) = x^2$ gelijk is aan $f'(x) = 2x$ en de afgeleide van $g(x) = \frac{1}{x}$ gelijk is aan $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Bepaal de afgeleide van
a $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$
b $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$
c $f(x) = (x - 3)(1 - \frac{1}{x})$

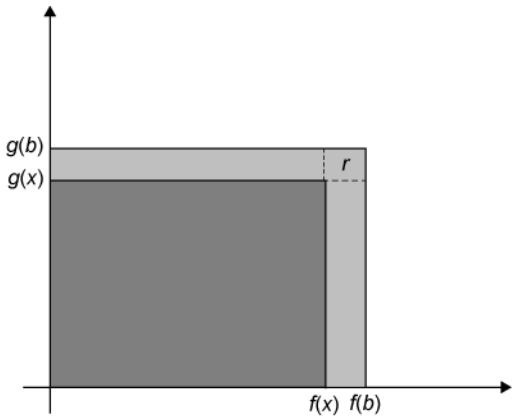
OPGAVE 6.9
Bepaal de afgeleide in $x = 3$ van
a $f(x) = -x^2 - 3x$
b $f(x) = \frac{3}{x}$

4.2 PRODUCTREGEL EN QUOTIËNTREGEL

Aan de hand van het volgende voorbeeld kunt u zien dat in het algemeen niet geldt dat de afgeleide van een product van twee functies gelijk is aan het product van de afgeleiden. Neem $f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = x$. We hebben gezien dat $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ en $g'(x) = 1$, dus $(f' \cdot g')(x) = -\frac{1}{x^2}$. Het product van de functies f en g is een constante functie, want $f \cdot g\,(x) = 1$, en de afgeleide hiervan is de nul-functie $(f \cdot g)'(x) = 0$. In dit geval geldt dus dat $(f \cdot g)' \neq (f' \cdot g')$.

Er is wel een rekenregel waarmee u de afgeleide van een product kunt berekenen. Deze maken we via een plaatje aannemelijk.

In figuur 6.4 ziet u een rechthoek. Lengte en breedte van de rechthoek variëren onafhankelijk van elkaar. De lengte is gelijk aan $f(x)$ en de breedte aan $g(x)$.



FIGUUR 6.4 Differentiequotiënt van een product van twee functies

We bekijken de oppervlakte $f \cdot g$ van deze rechthoek. Het differentiequotiënt van $f \cdot g$ over het interval $[x, b]$ is gelijk aan de toename van het oppervlak gedeeld door $b - x$. In figuur 6.4 zien we dat de toename van het oppervlak gelijk is aan

$$(f(b) - f(x)) \cdot g(x) + (g(b) - g(x)) \cdot f(x) + r$$

waarbij r de oppervlakte is van het kleine rechthoekje rechtsboven. Voor waarden van b dicht bij x is dit te verwaarlozen (een bewijs dat dit zo is valt buiten de cursus), het differentiequotiënt is dus bij benadering gelijk aan

$$\frac{\Delta(f \cdot g)}{\Delta x} \approx \frac{(f(b) - f(x)) \cdot g(x) + (g(b) - g(x)) \cdot f(x)}{b - x}$$

We splitsen deze breuk in twee delen:

$$\frac{(f(b) - f(x)) \cdot g(x) + (g(b) - g(x)) \cdot f(x)}{b - x} =$$
$$\frac{(f(b) - f(x)) \cdot g(x)}{b - x} + \frac{(g(b) - g(x)) \cdot f(x)}{b - x} =$$
$$\frac{(f(b) - f(x))}{b - x} \cdot g(x) + \frac{(g(b) - g(x))}{b - x} \cdot f(x)$$

Als b naar x nadert, nadert de eerste breuk in deze som naar $f'(x)$, en de tweede naar $g'(x)$. Daarmee hebben we de volgende rekenregel aannemelijk gemaakt:

Productregel

Als f en g differentieerbaar zijn met afgeleiden f' en g' dan geldt $f \cdot g$ is differentieerbaar met afgeleide $f' \cdot g + f \cdot g'$.

VOORBEELD 6.5

Om de afgeleide van de functie $h(x) = (3x + x^2)(2x^2 - 5)$ uit te rekenen gebruiken we de productregel. De functie h is te schrijven als product van de functies $f(x) = 3x + x^2$ en $g(x) = 2x^2 - 5$. Met voorbeeld 6.2 en de rekenregels uit paragraaf 4.1 berekenen we de afgeleiden van f en g: $f'(x) = 3 + 2x$ en $g'(x) = 4x$. De afgeleide van h is dus gelijk aan
$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = (3 + 2x) \cdot (2x^2 - 5) + (3x + x^2) \cdot 4x$
$= 8x^3 + 18x^2 - 10x - 15$.

OPGAVE 6.10

Bereken de afgeleide van

a $f(x) = (1 - x^2)(3x + 6)$
b $f(x) = 7x^2(\frac{1}{x} - 2x + 4)$
c $f(x) = (2x + 2x^2)(-x + 5x^2)$
d $f(x) = (1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x)$

OPGAVE 6.11

a Gebruik de productregel en de afgeleide van $x \to x^2$ uit voorbeeld 6.2 om de afgeleide te bepalen van x^3, x^4, x^5, ... Ziet u een patroon?
b Gebruik de productregel en de afgeleide van $\frac{1}{x}$ uit voorbeeld 6.2 om afgeleiden te bepalen van x^{-2},x^{-3}, x^{-4}, ... Ziet u een patroon?

OPGAVE 6.12
Er geldt $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$. De functie $x \to \sqrt{x}$ is differentieerbaar voor $x > 0$.
Gebruik de productregel om de afgeleide te bepalen van $\sqrt{x}$.

OPGAVE 6.13
De functie $x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$ is differentieerbaar voor $x > 0$. Bepaal de afgeleide van $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Met de tweede rekenregel uit deze paragraaf kunt u de afgeleide van het quotiënt van twee functies bepalen. We geven deze regel zonder bewijs, in paragraaf 4.3 zullen we de regel alsnog afleiden met behulp van de kettingregel.

Quotiëntregel

Als f en g differentieerbaar zijn met afgeleiden f' en g', dan geldt $\frac{f}{g}$ is differentieerbaar voor $g(x) \neq 0$ met afgeleide

$$\frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}.$$

VOORBEELD 6.6

De afgeleide van de functie

$$h(x) = \frac{2 + x^2}{3 + 7x}$$

berekenen we met behulp van de quotiëntregel. De functie h is te schrijven als het quotiënt van de functies $f(x) = 2 + x^2$ en $g(x) = 3 + 7x$. De afgeleide van h is dus:

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{(3+7x) \cdot 2x - (2 + x^2) \cdot 7}{(3 + 7x)^2} = \frac{7x^2 + 6x - 14}{(3 + 7x)^2} \quad «$$

Ezelsbruggetje

Een ezelsbruggetje om de quotiëntregel te onthouden is:

$$\frac{\text{nat} - \text{tan}}{\text{n}^2}$$

Dit staat voor: (noemer maal afgeleide teller – teller maal afgeleide noemer) gedeeld door noemer in het kwadraat.

OPGAVE 6.14
Bereken de afgeleide van

a $f(x) = \frac{2x + 4}{x - 5x^2}$

b $f(x) = \frac{x^2 - \frac{1}{x}}{x + 2}$

c $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{4x^2 + 3x + 6}$

OPGAVE 6.15
Bereken de afgeleide van

a $f(x) = 2x + \dfrac{x}{(x-3)}$

b $f(x) = \dfrac{(x^2-2)(1+x)}{1-2x}$

c $f(x) = \dfrac{1+x}{x^2} \cdot \dfrac{2-x}{1+x^2}$

4.3 KETTINGREGEL

De kettingregel stelt ons in staat om de afgeleide van samengestelde functies zoals $h(x) = \sqrt{(2x + 3x^2)}$ te bepalen.

Kettingregel

Als f en g differentieerbaar zijn, dan is ook de samenstelling $h = g \circ f$ differentieerbaar met afgeleide $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Om met behulp van de kettingregel een functie te differentiëren moeten we dus het volgende doen:
i Schrijf de functie h als samenstelling $g \circ f$
ii Bepaal de afgeleide functie g'
iii Bepaal $g'(f(x))$ door in g' overal x te vervangen door $f(x)$
iv Bepaal $f'(x)$
v Vermenigvuldig $g'(f(x))$ en $f'(x)$

Als u nog niet veel met de kettingregel hebt gewerkt, is het verstandig deze stappen eerst afzonderlijk uit te voeren. Als u wat meer ervaring hebt kunt u stappen samennemen. We zullen dat in de cursus ook doen: de eerste voorbeelden en opgaven werken we stapsgewijs uit. Daarna nemen we stappen samen.

VOORBEELD 6.7

We berekenen de afgeleide van de functie $h(x) = \sqrt{(2x + 3x^2)}$.
i $h(x)$ is te schrijven als de samenstelling $g \circ f$ van de functies $f(x) = 2x + 3x^2$ en $g(x) = \sqrt{x}$.

ii $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

iii Bereken $g'(f(x))$ door f in te vullen voor x in $g'(x)$:

$$g'(f(x)) = \frac{1}{2\sqrt{2x+3x^2}}$$

iv $f'(x) = 2 + 6x$
v Vermenigvuldig $g'(f(x))$ en $f'(x)$

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+3x^2}} \cdot (2+6x) = \frac{1+3x}{\sqrt{2x+3x^2}}$$ «

Net als de rekenregels uit de vorige paragraaf zullen we ook deze rekenregel niet bewijzen maar wel aannemelijk maken.

Het differentiequotiënt van de functie $h = g \circ f$ over $[a, b]$ is

$$\frac{\Delta(g \circ f)}{\Delta x} = \frac{g(f(b)) - g(f(a))}{b - a}$$

Dit is ook als volgt te schrijven:

$$\frac{g(f(b)) - g(f(a))}{b - a} = \frac{g(f(b)) - g(f(a))}{b - a} \cdot \frac{f(b) - f(a)}{f(b) - f(a)}$$
$$= \frac{g(f(b)) - g(f(a))}{f(b) - f(a)} \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Bekijk het laatste product. De rechterfactor is gelijk aan het differentiequotiënt van f over $[a, b]$, de linker gelijk aan het differentiequotiënt van g over $[f(a), f(b)]$. Als b naar a nadert, zal de rechterfactor dus naar de afgeleide van f in $x = a$ naderen. Om te kunnen concluderen dat de linkerfactor naar de afgeleide van g in $f(a)$ nadert, moeten we onder andere weten dat $f(b)$ naar $f(a)$ nadert. Dit blijkt inderdaad zo te zijn als f differentieerbaar is. We concluderen dat het differentiequotiënt van de functie $h = g \circ f$ over $[a, b]$ nadert naar $g'(f(a)) \cdot f'(a)$ en dat de afgeleide van h in $x = a$ dus gelijk is aan $g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

VOORBEELD 6.8 Bereken de afgeleide van de functie $h(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

i Schrijf h als de samenstelling $g \circ f$ van de functies $f(x) = x + \sqrt{x}$ en $g(x) = \sqrt{x}$.

ii $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

iii Bereken $g'(f(x))$ door f in te vullen voor x in $g'(x)$:

$$g'(f(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

iv $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

v $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ «

VOORBEELD 6.9 De afgeleide van de functie

$$h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

kunnen we uitrekenen met de quotiëntregel. Het kan ook met de kettingregel.

i Schrijf h als de samenstelling $g \circ f$ van de functies $f(x) = x^2 + 1$ en $g(x) = \frac{1}{x}$.

ii $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

iii $g'(f(x)) = -\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

iv $f'(x) = 2x$

v $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = -\dfrac{1}{(x^2+1)^2} \cdot 2x = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ «

OPGAVE 6.16
In opgave 6.11 hebt u gezien dat de afgeleide van $f(x) = x^3$ gelijk is aan $f'(x) = 3x^2$.
Bereken de afgeleide van
a $f(x) = (\sqrt{x} - x)^3$
b $f(x) = (3x^3 + 2x)^3$
c $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

OPGAVE 6.17
a Gebruik de kettingregel en de afgeleide van de functie $\frac{1}{x}$ om de afgeleide van $\frac{1}{g(x)}$ te bepalen.
b Gebruik de productregel en onderdeel a om de quotiëntregel af te leiden.

5 Standaardafgeleiden

5.1 MACHTSFUNCTIES

In opgave 6.11 zagen we voor een aantal waarden van n dat de functies $x \to x^n$ differentieerbaar zijn met afgeleide $x \to n\,x^{n-1}$. Het is te bewijzen dat dit voor elke n geldt. Het resultaat gaan we gebruiken, het bewijs laten we achterwege.

VOORBEELD 6.10 De afgeleide van de functie $f(x) = x^{100}$ is $f'(x) = 100x^{99}$. «

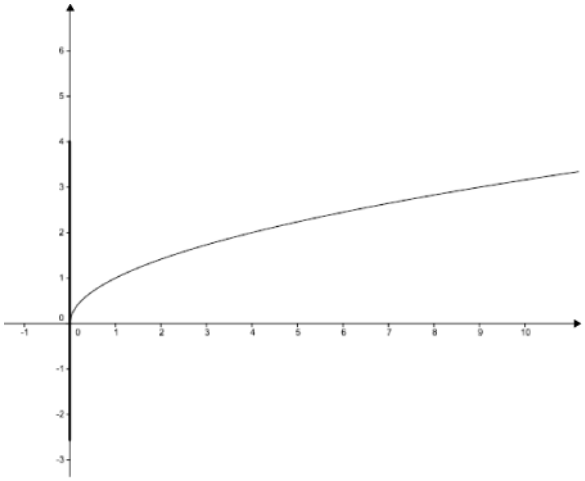
OPGAVE 6.18
Bereken de afgeleide van
a $f(x) = (x^{20} + x^{10})^3$
b $f(x) = (1 - x)^7$

OPGAVE 6.19
Toon met behulp van de quotiëntregel of de kettingregel aan dat voor negatieve gehele waarden k geldt dat $x \to x^k$ differentieerbaar is met afgeleide $x \to kx^{k-1}$.

OPGAVE 6.20
De functie $x \to x^{\frac{1}{n}}$ is differentieerbaar voor $x > 0$. Gebruik de kettingregel en de afgeleide van de functie $x \to x^n$ om de afgeleide van de functie $x \to x^{\frac{1}{n}}$ te bepalen.

Opmerking: in opgave 6.20 hebt u laten zien dat de functies $x \to x^{\frac{1}{n}}$ differentieerbaar zijn voor $x > 0$. Hoewel deze functies zelf wel gedefinieerd zijn in $x = 0$, zijn ze er niet differentieerbaar. U kunt dit goed zien aan de grafiek van de functie $x \to x^{\frac{1}{2}}$ oftewel de functie $f(x) = \sqrt{x}$.

Deze functie is gedefinieerd in $x = 0$, maar heeft daar een verticale raaklijn. Bedenk dat de afgeleide van een differentieerbare functie in een punt x gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn door $(x, f(x))$. Een verticale raaklijn heeft geen (eindige) richtingscoëfficiënt en daarom bestaat de afgeleide ook niet in $x = 0$.



FIGUUR 6.5 De grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$ met een verticale raaklijn in $x = 0$

Voor verschillende waarden van p hebt u gezien dat de afgeleide van $x \to x^p$ gelijk is aan de functie $x \to p\,x^{p-1}$. Dit geldt algemeen:

Afgeleide van een machtsfunctie

De functie $x \to x^p$ is differentieerbaar met afgeleide $x \to p\,x^{p-1}$ voor alle $p \in \mathbb{R}$.

OPGAVE 6.21
Bereken de afgeleide van

a $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$

b $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

c $f(x) = x^{-3\frac{1}{2}}$

OPGAVE 6.22
Bereken de afgeleide van

a $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$

b $f(x) = \dfrac{x^5}{1+x^3}$

c $f(x) = (3x^5 - x)\sqrt{x}$

d $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{4x^4 + 4}}$

OPGAVE 6.23
Bereken de afgeleide in $x = 1$ voor

a $f(x) = 9x^8 + 3$

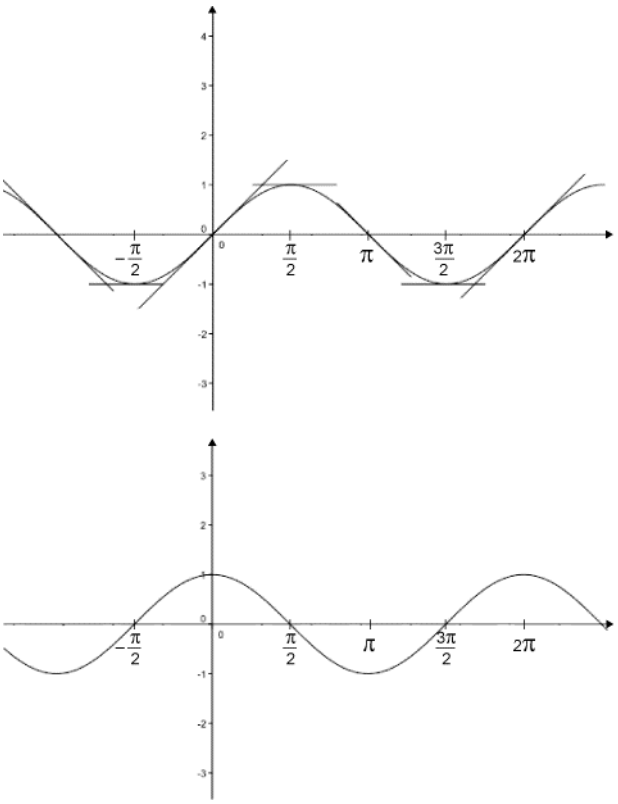
b $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

c $f(x) = x^3 \cdot \sqrt{x} - 2x^4$

OPGAVE 6.24
Voor welke x bestaat de afgeleide van $\sqrt{4 - x^2}$?

5.2 GONIOMETRISCHE FUNCTIES

Omdat sinus en cosinus periodieke functies zijn met periode 2π, ligt het voor de hand te verwachten dat ook de afgeleide functies van deze functies periodiek zijn met periode 2π. Dat is inderdaad het geval. U ziet in figuur 6.6 dat de sinus een horizontale raaklijn heeft in $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); in de punten $x = 2k\pi$ lijkt de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan 1, in de punten $x = \pi + 2k\pi$ aan –1. De waarden van de afgeleide van de sinus komen in deze punten dus overeen met de waarden van de cosinus. Inderdaad is de afgeleide van de sinus gelijk aan de cosinus.



FIGUUR 6.6 De grafieken van de sinus (boven) en cosinus (onder). De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de sinus in een punt x is gelijk aan $\cos(x)$

Omgekeerd zijn richtingscoëfficiënten van raaklijnen aan de grafiek van de cosinus steeds gelijk aan het tegengestelde van de sinus. Zonder verder bewijs vermelden we:

Afgeleide van sin en cos

De afgeleide van de functie $f(x) = \sin x$ is de functie $f'(x) = \cos x$.
De afgeleide van de functie $f(x) = \cos x$ is de functie $f'(x) = -\sin x$.

Met behulp van de quotiëntregel kunnen we nu ook de afgeleide van de tangens bepalen.

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \qquad \text{quotiëntregel}$$

$$\frac{\cos x \cdot (\sin x)' - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \qquad \text{vul de afgeleiden van sin en cos in}$$

$$\frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}$$

Afgeleide van tan

De afgeleide van de functie $f(x) = \tan x$ is de functie $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

VOORBEELD 6.11

De afgeleide van de $f(x) = \sin(2x + 3)$ berekenen we met behulp van de kettingregel:

$$f'(x) = \cos(2x + 3) \cdot (2x + 3)' = 2\cos(2x + 3)$$ «

OPGAVE 6.25

Bereken de afgeleide van

a $f(x) = \sin x \cos x$

b $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

c $f(x) = \tan(4x^3 - 3x)$

d $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$

5.3 EXPONENTIËLE FUNCTIES

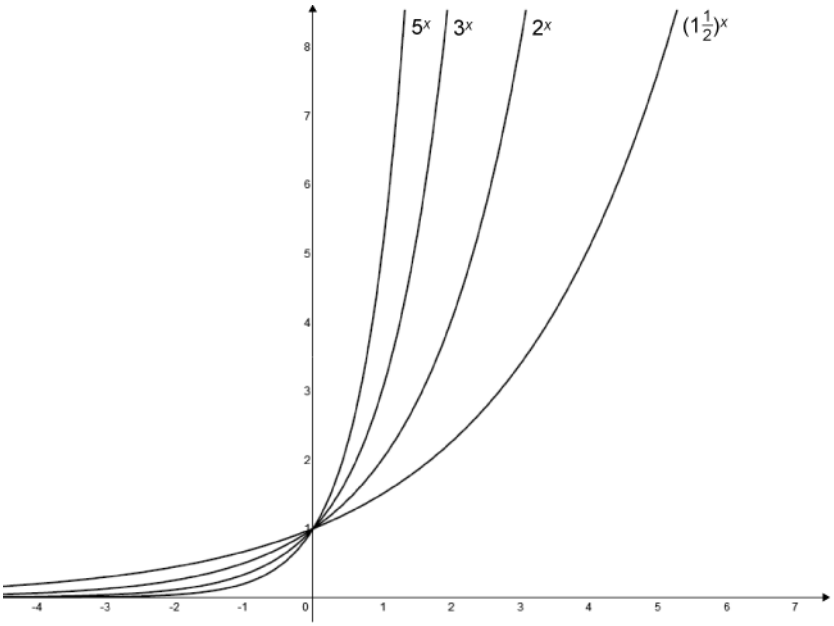
Om een indruk te krijgen van de afgeleide van de functie $f(x) = 2^x$ in een punt $x = a$ bekijken we het differentiequotiënt:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{2^b - 2^a}{b - a} = \frac{2^{b-a} - 2^0}{b - a} \cdot 2^a$$

In de laatste stap hebben we in de teller een factor 2^a buiten haken gehaald. Daardoor zien we in het laatste product rechts 2^a weer terug, met daarvoor het differentiequotiënt voor de functie $f(x) = 2^x$ in $x = 0$ (immers als b naar a nadert, dan gaat $b - a$ naar 0). De afgeleide van $f(x) = 2^x$ lijkt dus gelijk te zijn aan $f'(x) = f'(0) \cdot 2^x$.

Dit blijkt inderdaad het geval en geldt bovendien voor *elke* exponentiële functie: de afgeleide is gelijk aan de oorspronkelijke functie maal de afgeleide in $x = 0$.

In figuur 6.7 ziet u voor een aantal waarden van a de functie $x \to a^x$



FIGUUR 6.7 Grafieken van de functies $x \to a^x$ voor $a = 1\frac{1}{2}$, 2, 3, 5

Voor waarden van a in de buurt van 1 loopt de raaklijn in het punt $x = 0$ vrij vlak, voor grotere waarden gaat deze steeds steiler lopen. Het ligt voor de hand te verwachten dat er een waarde van a is, waar deze raaklijn precies richtingscoëfficiënt 1 heeft, en waar de de afgeleide dus ook gelijk is aan 1. Dit getal is er inderdaad. Het is een irrationaal getal wat e wordt genoemd. Het getal e kan niet uitgedrukt worden in andere al bekende (irrationale) getallen. We kunnen alleen een benadering geven. Er geldt $e \approx 2{,}7182818$.

Het getal e

Afgeleide van e^x

Voor de functie $f(x) = e^x$ geldt dat de functie gelijk is aan zijn afgeleide: $f'(x) = e^x$.

Om van andere exponentiële functies de afgeleide te bepalen, schrijven we deze eerst met grondtal e. Daarvoor hebben we de inverse nodig van de exponentiële functie met grondtal e, dus de functie $x \to {}^e\log x$.

Natuurlijke logaritme

DEFINITIE 6.2 De natuurlijke logaritme is gelijk aan ${}^e\log x$ en wordt genoteerd als $\ln x$.

We herschrijven hiermee a^x, om deze functie vervolgens te kunnen differentiëren. Omdat $\ln x$ de inverse is van e^x geldt $a = e^{\ln a}$. Uit de rekenregels voor machten volgt nu dat $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x\ln a}$. De afgeleide hiervan berekenen we met de kettingregel.

$(a^x)' = (e^{x\ln a})' =$	kettingregel
$e^{x\ln a} \cdot (x\ln a)' =$	$(x\ln a)' = \ln a$ want $\ln a$ is een constante
$e^{x\ln a} \cdot \ln a =$	$e^{x\ln a} = a^x$
$\ln a \cdot a^x$	

Afgeleide van a^x

De afgeleide van de functie $f(x) = a^x$ is $f'(x) = \ln a \cdot a^x$.

De afgeleide van de functie $f(x) = 10^x$ is de functie $f'(x) = \ln 10 \cdot 10^x$. «

VOORBEELD 6.12

OPGAVE 6.26

Bereken de afgeleide van

a $f(x) = 2^{-x}$

b $f(x) = \sin(e^x)$

c $f(x) = 3xe^{x^2}$

d $f(x) = \dfrac{x}{4^x}$

5.4 LOGARITMISCHE FUNCTIES

De functie $f(x) = \ln x$ is differentieerbaar op zijn domein. We kunnen de afgeleide van deze functie bepalen met behulp van de kettingregel: laat $g(x) = e^x$, dan geldt $g(f(x)) = x$. We berekenen de afgeleide van $g \circ f$ op twee manieren.
Omdat $g(f(x)) = x$, is de afgeleide van $g \circ f$ gelijk aan $(g \circ f)'(x) = 1$.
De tweede manier om deze afgeleide te berekenen is met behulp van de kettingregel: $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{\ln x} \cdot f'(x) = x \cdot f'(x)$.
Beide methoden moeten dezelfde afgeleide leveren, dus $x \cdot f'(x) = 1$.
Hieruit volgt dat $f'(x) = \frac{1}{x}$.

De afgeleide van de functie $f(x) = {}^a\log x$ volgt nu direct uit:

$$ {}^a\log x = \frac{\ln x}{\ln a}, \text{ dus } f'(x) = \frac{1}{x\ln a} $$

Afgeleide van logaritmische functie

De afgeleide van de functie $f(x) = \ln x$ is de functie $f'(x) = \frac{1}{x}$.

De afgeleide van de functie $f(x) = {}^a\log x$ is de functie $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln a}$

VOORBEELD 6.12

De afgeleide van $f(x) = \ln(1 + \sqrt{x})$ berekenen we met de kettingregel:

$$ f'(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} $$

$$ = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}} = \frac{1}{2(\sqrt{x}+x)} $$ «

OPGAVE 6.27
Bereken de afgeleide van

a $f(x) = x \ln x$

b $f(x) = 4 \cdot {}^{2}\log x + 2$

c $f(x) = \ln(10x)$

d $f(x) = \dfrac{e^x}{\ln x}$

5.5 OEFENEN MET DIFFERENTIËREN

We sluiten deze leereenheid af met een reeks opgaven waarin u kunt oefenen met differentiëren. Een tabel met afgeleiden van standaardfuncties en rekenregels vindt u in de samenvatting.

OPGAVE 6.28
Bepaal de afgeleide van elk van de volgende functies.

a $3x^5 + 7x^2 - 17$ b $(3x + 1)(2x + 4)$ c $x^2 - x^{-2}$

d $\sqrt{x^2 - 1}$ e $\dfrac{3x + x^2}{2x - 7}$ f $\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

g $\sin x \cos x$ h $\dfrac{\cos x}{\sin x}$ 4sin3x

j $\sin(\cos x)$ k $x^2\cos 2x$ l $\dfrac{\sin x}{x}$

m e^{x^2} n e^{3x-7} o $e^{\sqrt{x}}$

p $e^x \sin x$ q 3^{-x} r $\cos(e^x)$

OPGAVE 6.29
Bereken afgeleide van f in $x = 1$ voor:

a $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$ b $f(x) = (x^2 + 3)^7$ c $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x + 7}}$

d $f(x) = 2\cos(2x - 1)$ e $f(x) = \cos(x^2 - 1)$ f $f(x) = \cos^2(x - 1)$

g $f(x) = e^x + e^{-x}$ h $f(x) = xe^x$ i $f(x) = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$

OPGAVE 6.30
Gegeven is de functie $f(x) = xe^{-x^2+1}$.
Voor welke waarde(n) van x geldt $f'(x) = 0$?

OPGAVE 6.31

Een auto vertrekt op tijdstip $t = 0$. De afstand s (in meters) die de auto na t seconden heeft afgelegd wordt gegeven door de volgende functie:

$$s(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 & \text{als } 0 \le t \le 30 \\ 15t - 225 & \text{als } 30 < t \le 120 \\ -\frac{1}{4}t^2 + 75t - 3825 & \text{als } 120 < t \le 150 \end{cases}$$

a Bepaal een formule voor de snelheid $v(t)$ van de auto.

b Houd de auto zich aan de maximumsnelheid van 50 km/u?

SAMENVATTING

Het *differentiequotiënt* van een functie f over het interval $[a, b]$ is gelijk aan

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Als de differentiequotiënten over het interval $[a, b]$ naar een waarde c naderen als b naar a gaat, noemen we f *differentieerbaar* in $x = a$ met afgeleide $f'(a) = c$.
De afgeleide functie f' voegt aan elke x de afgeleide van f in x toe.
Als de functie f een afgelegde *afstand* representeert, is de afgeleide gelijk aan de bijbehorende *snelheid*.
De afgeleide $f'(a)$ is gelijk aan de *richtingscoëfficiënt* van de *raaklijn* aan f door $(a, f(a))$.

Het bepalen van de afgeleide kan met behulp van standaardafgeleiden en rekenregels:

TABEL 6.3 Afgeleiden van standaardfuncties

$f(x)$	$f'(x)$	*voorwaarde*
x^a	ax^{a-1}	voor elke $a \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
e^x	e^x	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
a^x	$a^x \ln a$	voor elke $a > 0$
${}^a\log x$	$\frac{1}{x \ln a}$	voor elke $a > 0$, $a \neq 1$

TABEL 6.4 Rekenregels voor het differentiëren

	Als f en g differentieerbaar zijn met afgeleiden f' en g' dan geldt
Somregel	$f+g$ is differentieerbaar met afgeleide $f'+g'$
Verschilregel	$f-g$ is differentieerbaar met afgeleide $f'-g'$
Maal een constante	cf is differentieerbaar met afgeleide cf' voor een constante c.
Productregel	$f\cdot g$ is differentieerbaar met afgeleide $f'\cdot g+f\cdot g'$
Quotiëntregel	f/g is differentieerbaar voor $g(x)\neq 0$ met afgeleide $(g\cdot f'-f\cdot g')/g^2$
Kettingregel	$h=g\circ f$ is differentieerbaar met afgeleide $h'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$

ZELFTOETS

1 Bereken de afgeleide van de volgende functies

a $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sin x$

b $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x-3x^3}$

c $f(x)=\dfrac{3}{x\sqrt[7]{x^6}}$

d $f(x)=\tan(3x^2)$

e $f(x)=e^{\cos x}$

f $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

2 Volgens de wet van Moore verdubbelt het aantal transistoren op een chip ongeveer elke 2 jaar. Het aantal transistoren op een chip in 1965 was gelijk aan 240. Bepaal de *snelheid* waarmee het aantal transistoren op een chip toenam in 1970 en 2000.

3 Gegeven de functie $f(x)=3x^2-2x+4$. Voor welke waarde van a is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan f in het punt $(a, f(a))$ gelijk aan 2?

Integreren

Introductie *153*

Leerkern *154*

1 Integraal als oppervlakte *154*
2 De functie als afgeleide van zijn oppervlaktefunctie *158*
3 Primitieven *160*
4 Bepaalde en onbepaalde integraal *163*
5 Oneigenlijke integralen *166*

Samenvatting *170*

Zelftoets *171*

Leereenheid 7

Integreren

INTRODUCTIE

In de vorige leereenheid hebben we bekeken hoe we de snelheid kunnen bepalen, als we de afgelegde afstand in het verloop van de tijd kennen. Maar hoe moet dat, als de vraagstelling andersom is: hoe bepalen we de afgelegde afstand, als we alleen de snelheid kennen. Ook hier is dat niet moeilijk als de snelheid constant is. Maar als de snelheid varieert, is het ingewikkelder.
Een dergelijke situatie komt voor als van grote hoogte een voorwerp naar beneden valt. Dat zou bijvoorbeeld een parachutespringer kunnen zijn. Door de aantrekkingskracht van de aarde neemt de snelheid kwadratisch toe. De vraag kan dan bijvoorbeeld zijn hoeveel tijd er verstrijkt tussen het begin van de sprong op een hoogte van 3.000 meter en het tijdstip waarop het aardoppervlakte wordt bereikt. We kennen hier dus de snelheid, maar willen daar de afgelegde afstand in de loop van de tijd bij bepalen.

FIGUUR 7.1

De techniek die we hiervoor gaan ontwikkelen heet integreren. Deze hangt nauw samen met differentiëren, het is immers de omgekeerde bewerking, maar is op een aantal onderdelen toch net wat anders.
De theorie waarop een en ander is gebaseerd wordt integraalrekening genoemd.

LEERDOELEN

Na het bestuderen van deze leereenheid wordt verwacht dat u

- uit kunt leggen wat de primitieve of onbepaalde integraal van een functie is
- het verband kent tussen een integraal van een functie en de oppervlakte onder de grafiek van die functie
- de primitieven kent van de standaardfunctie
- de rekenregels kent en kunt toepassen voor het bepalen van primitieven van functies
- primitieven en bepaalde integralen kunt bepalen van gegeven functies
- weet wat oneigenlijke integralen zijn en deze kunt bepalen.

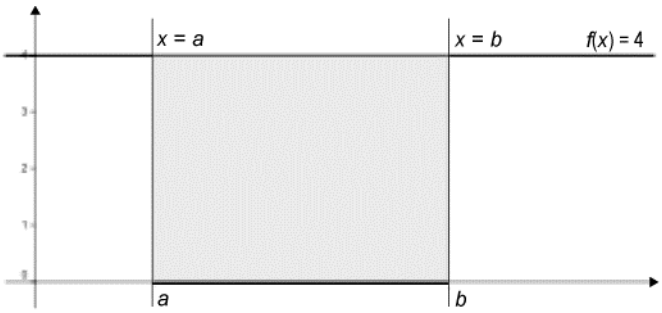
LEERKERN

1 Integraal als oppervlakte

In deze paragraaf bekijken we hoe we bij een aantal functies de oppervlakte onder de grafiek van die functie kunnen uitrekenen. Voor constante en lineaire functies kunnen we daarbij gebruik maken van de meetkunde uit leereenheid 3.

VOORBEELD 7.1

Als de functie f constant is of lineair dan is de oppervlakte onder de grafiek van f met behulp van de formules voor de oppervlakte van een rechthoek en een driehoek te bepalen.
Als eerste bekijken we de oppervlakte ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = 4$, de lijnen $x = a$ en $x = b$ en de x-as. De grafiek is getekend in figuur 7.2. U ziet dat de breedte van de rechthoek gelijk is aan $b - a$ en de hoogte gelijk aan 4, dus de oppervlakte onder de grafiek van f tussen $x = a$ en $x = b$ is gelijk aan $4(b - a)$. «



FIGUUR 7.2 De oppervlakte onder een constante functie

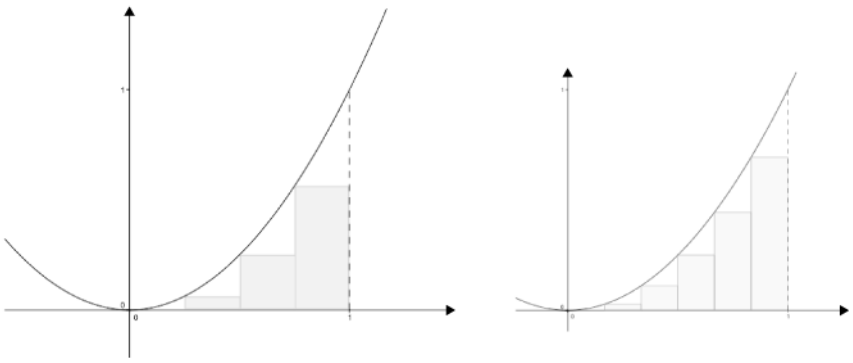
OPGAVE 7.1

Bepaal de oppervlakte ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = 2 + x$, de x-as en de lijnen $x = a$ en $x = b$ waarbij $b > a > 0$.

Als de grafiek van de functie f geen rechte lijn is, kunnen we de oppervlakte niet meer direct berekenen met behulp van de oppervlakte van eenvoudige meetkundige figuren. Wat we wel kunnen doen is de oppervlakte benaderen met behulp van rechthoeken.

VOORBEELD 7.2

We willen de oppervlakte bepalen onder de grafiek van $f(x) = x^2$ tussen $x = 0$ en $x = 1$. In figuur 7.3 ziet u hoe we oppervlakte kunnen benaderen met behulp van rechthoeken.



FIGUUR 7.3 Een benadering van de oppervlakte onder de grafiek van $f(x) = x^2$ tussen $x = 0$ en $x = 1$ met 3 (links) en 5 (rechts) rechthoeken

In de linkerfiguur hebben we het interval [0, 1] verdeeld in 4 gelijke delen, en op elk van deze delen een rechthoek getekend die precies onder de grafiek blijft. De breedte van de rechthoeken is dus gelijk aan 1/4 en de hoogte gelijk aan respectievelijk $f(0)$, $f(1/4)$, $f(1/2)$ en $f(3/4)$. Omdat $f(0) = 0$ krijgen we op deze manier slechts drie rechthoeken, maar om de methode algemeen te houden nemen we de linker 'rechthoek' met hoogte 0 wel in de berekening op. De totale oppervlakte van deze rechthoeken is

$$O_4 = \tfrac{1}{4}(f(0) + f(\tfrac{1}{4}) + f(\tfrac{1}{2}) + f(\tfrac{3}{4})) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{7}{8} = \tfrac{7}{32} \approx 0{,}22$$

We hebben hiermee een ondergrens voor de oppervlakte onder de grafiek van f gevonden. Op dezelfde manier berekenen we de benadering bij een verdeling van [0, 1] in 6 intervallen:

$$O_6 = \tfrac{1}{6}(f(0) + f(\tfrac{1}{6}) + f(\tfrac{1}{3}) + f(\tfrac{1}{2}) + f(\tfrac{2}{3}) + f(\tfrac{5}{6})) = \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{55}{36} = \tfrac{55}{216} \approx 0{,}25$$

Door [0, 1] in steeds meer intervallen te verdelen, krijgen we steeds betere schattingen. Voor de n-de schatting geldt:

$$O_n = \tfrac{1}{n}(f(0) + f(\tfrac{1}{n}) + f(\tfrac{2}{n}) + \ldots + f(\tfrac{n-2}{n}) + f(\tfrac{n-1}{n})) =$$
$$\tfrac{1}{n}(0^2 + (\tfrac{1}{n})^2 + (\tfrac{2}{n})^2 + \ldots + (\tfrac{n-2}{n})^2 + (\tfrac{n-1}{n})^2) =$$
$$\tfrac{1}{n} \cdot \tfrac{1}{n^2} \cdot (0 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2) =$$
$$\tfrac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

Het ligt voor de hand dat de limietwaarde van deze som nadert naar de oppervlakte onder de grafiek van f tussen 0 en 1. Maar we kunnen deze limiet pas uitrekenen als we een formule voor de som van kwadraten hebben. We geven hier deze formule; met volledige inductie valt te bewijzen dat de formule klopt. Er geldt

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \tfrac{1}{6} n(n-1)(2n-1)$$

Invullen van deze formule in de berekening van O_n geeft:

$$O_n = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} = \frac{2n^3 - 3n^2 + 4}{6n^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Voor grote waarden van n naderen de breuken $\frac{1}{2n}$ en $\frac{1}{6n^2}$ naar O, dus voor grote waarde van n geldt:

$$O_n \approx \tfrac{1}{3}$$

De oppervlakte onder de grafiek van f is dus groter dan of gelijk aan $\frac{1}{3}$ en het is te verwachten dat de oppervlakte inderdaad gelijk is aan $\frac{1}{3}$. Om hier zekerheid over te verkrijgen kunnen we de oppervlakte ook benaderen met rechthoeken die steeds boven de grafiek liggen. In opgave 7.2 vragen we u dit te doen. «

OPGAVE 7.2
Benader de oppervlakte onder de grafiek van $f(x) = x^2$ tussen $x = 0$ en $x = 1$ met behulp van rechthoeken met basis $[k/n, (k + 1)/n]$ en hoogte $f((k + 1)/n)$. Bepaal de som voor grote waarden van n.

OPGAVE 7.3
Bepaal de oppervlakte onder de grafiek van $f(x) = x^2$ tussen $x = 0$ en $x = 2$.

Bij het berekenen van oppervlaktes onder de grafiek van de functie $f(x) = x^2$ hebt u gezien dat het bepalen van de waarde van de som voor deze relatief eenvoudige functie al behoorlijk ingewikkeld is. In de praktijk is de oppervlakte onder de grafiek van een functie op deze manier meestal niet uit te rekenen. Maar de methode wordt wel gebruikt voor een nette wiskundige definitie. Voor de meeste nette functies kan op deze manier gedefinieerd worden wat de oppervlakte onder de grafiek is. We zullen deze definitie in deze cursus achterwege laten.

Voor functies f die positief zijn op $[a, b]$ noteren we de oppervlakte onder f tussen a en b met behulp van het integraalsymbool:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

In deze notatie vindt u nog de benadering van de oppervlakte via rechthoekjes terug. Het teken $\int$ (het integraalsymbool) is een gestileerde letter S en staat oorspronkelijk voor een som. De term dx geeft (net zo als Δx)

de lengte van een klein interval op de x-as weer. Ooit gaf de notatie dus de som van rechthoekjes met breedte dx en hoogte $f(x)$ weer. Dit is precies het soort benadering dat we in het begin van deze paragraaf gebruikten. We spreken

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Integraal

uit als de *integraal* van f tussen $[a, b]$.

Net zo als bij de somnotatie is ook hier de variabele x een dummyvariabele. In het antwoord (hier de oppervlakte) vinden we x niet terug, en we kunnen dus de x door een andere variabele vervangen zonder dat de waarde wijzigt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(y)\mathrm{d}y$$

Als de functie f positief is op $[a, b]$, dan is de integraal van f over $[a, b]$ gelijk aan de oppervlakte onder de grafiek van f. Ook als f niet (overal) positief is, heeft de integraal van f over $[a, b]$ een betekenis.
Als f negatief is op $[a, b]$ dan definiëren we dat

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

gelijk is aan het tegengestelde van de oppervlakte tussen de x-as en de grafiek van f tussen $x = a$ en $x = b$.

VOORBEELD 7.3

Uit de symmetrie volgt dat de oppervlakte tussen de x-as en de grafiek van de functie $g(x) = -x^2$ tussen 0 en 2 is gelijk aan de oppervlakte onder de grafiek van de functie $f(x) = x^2$ tussen 0 en 2. Dus geldt

$$\int_0^2 -x^2\mathrm{d}x = -\int_0^2 x^2\mathrm{d}x = -\frac{8}{3}$$ «

OPGAVE 7.4

a Bepaal

$$\int_0^a 2x\,\mathrm{d}x$$

door de bijbehorende oppervlakte te berekenen.

b Bepaal

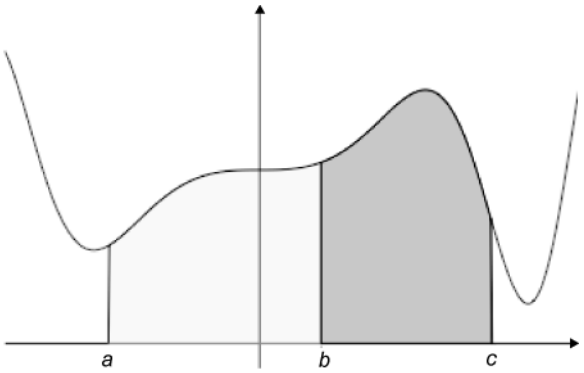
$$\int_0^a -2x\,\mathrm{d}x$$

Omdat als $a < b < c$ de oppervlakte onder f tussen a en c gelijk is aan die tussen a en b plus die tussen b en c geldt de volgende *intervalregel*:

Intervalregel

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

In figuur 7.4 ziet u een illustratie van deze regel: de oppervlakte onder de grafiek tussen a en c is gelijk aan de som van de oppervlakte tussen a en b (het lichtgrijze deel), en de oppervlakte tussen b en c (het donkergrijze deel).



FIGUUR 7.4 De intervalregel

VOORBEELD 7.4 Eerder in deze paragraaf berekenden we de integraal van de functie $f(x) = x^2$ over [0, 1] en [0, 2]. Met behulp van de intervalregel kunnen we nu ook de integraal van f over [1, 2] bepalen:

$$\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$$

dus

$$\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{8}{3} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{7}{3}$$ «

OPGAVE 7.5
Bereken

$$\int_c^d 2x\,\mathrm{d}x \text{ voor } d > c > 0.$$

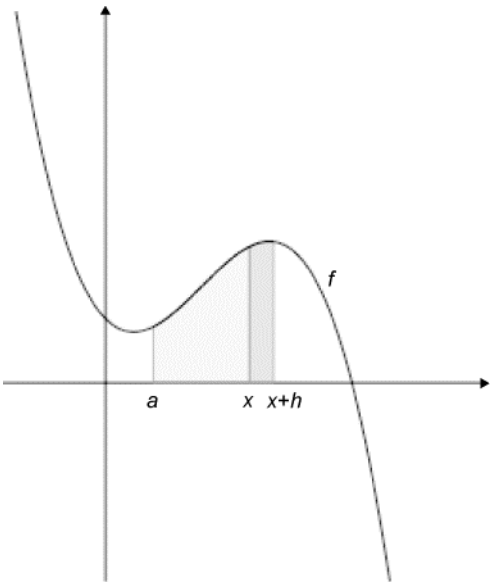
Aanwijzing: gebruik opgave 7.4a

2 De functie als afgeleide van zijn oppervlaktefunctie

In deze paragraaf zullen we een belangrijk verband tussen een functie en de bijbehorende oppervlaktefunctie laten zien.

In figuur 7.6 is de grafiek van een functie f getekend. We definiëren de functie F door:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$



FIGUUR 7.5 Het differentiequotiënt van F in x

We bepalen nu het differentiequotiënt van F in x:

Uit de intervalregel volgt dat

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^x f(x)\mathrm{d}x = \int_x^{x+h} f(x)\mathrm{d}x$$

Het differentiequotiënt is dus gelijk aan

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(x)\mathrm{d}x}{h}$$

Voor kleine waarden van h is de integraal tussen x en $x + h$ ongeveer gelijk aan $h \cdot f(x)$ en dus is het differentiequotiënt ongeveer gelijk aan $f(x)$. Dat betekent dus dat de afgeleide van $F(x)$ gelijk is aan $f(x)$. Inderdaad kan bewezen worden dat de afgeleide $F'(x)$ gelijk is aan $f(x)$. Dat bewijs laten hier achterwege. Het resultaat staat bekend als de hoofdstelling van de integraalrekening, en geldt voor elke voldoende nette functie. Net als in vorige leereenheden zullen we niet specificeren wat we onder voldoende netjes verstaan.

STELLING 7.1

Laat f voldoende netjes zijn op $[a, b]$ en definieer de functie F op $[a, b]$ door

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Dan is F differentieerbaar op $[a, b]$ en $F' = f$.

Om bij een functie f een oppervlaktefunctie te vinden zullen we dus op zoek moeten gaan naar een functie F waarvan de afgeleide gelijk is aan f. Zo'n functie noemen we een primitieve.

3 Primitieven

Primitieve
Onbepaalde integraal

DEFINITIE 7.1

Als $F' = f$ dan noemen we F een *primitieve* van f. In plaats van de term 'primitieve' gebruiken we ook '*onbepaalde integraal*'.

VOORBEELD 7.5

De functie $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ is een primitieve van $f(x) = x^2$, want $F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$. Dit is niet de enige primitieve, een andere primitieve is bijvoorbeeld de functie $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5$, want $G'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 0 = x^2$. «

In het algemeen geldt dat als F een primitieve is van f, dat dan voor elke constante C ook $F + C$ een primitieve is; immers de afgeleide van een constante is gelijk aan 0. Omgekeerd geldt dat alle primitieven van een functie f op een interval I op een constante na aan elkaar gelijk zijn. Als dus F een primitieve is van f op I, dan zijn alle primitieven van f van de vorm $F + C$ met C een constante. De verzameling van alle primitieven van f noteren we als volgt:

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

VOORBEELD 7.6

$$\int x^2\ \mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3 + C$$ «

Primitiveren komt dus neer op het omgekeerde van differentiëren: zoek een functie waarvan de afgeleide gelijk is aan de functie waarvan de primitieve gezocht wordt.

OPGAVE 7.6

Bepaal alle primitieven van de volgende functies:
x^3, x^6, x^{-3} (voor $x > 0$), x^n ($n \neq -1$, $x > 0$), $1/x$ (voor $x > 0$) , $\cos x$, $\sin x$, e^x

OPGAVE 7.7

Laat F een primitieve zijn van de functie f en G een primitieve van g.

a Toon aan dat $F + G$ een primitieve is van $f + g$.
b Toon aan dat $F - G$ een primitieve is van $f - g$.
c Toon aan dat cF een primitieve is van cf voor elke constante c.

OPGAVE 7.8

Laat F een primitieve zijn van de functie f en G een primitieve van g.
Is nu FG een primitieve van fg? Zo ja, toon dit aan; geef anders een tegenvoorbeeld.

In opgave 7.7 hebt u een aantal rekenregels afgeleid voor het primitiveren. Omdat we deze rekenregels in het vervolg regelmatig zullen gebruiken, zetten we ze hier nog eens bij elkaar.

Laat F een primitieve zijn van de functie f en G een primitieve van g. Dan geldt:

Somregel $F + G$ is een primitieve van $f + g$.
Verschilregel $F - G$ is een primitieve van $f - g$.
Constante-regel cF is een primitieve van cf.

VOORBEELD 7.8 Een primitieve van de functie $f(x) = 2x^3 - \sin x$ is $F(x) = 2 \cdot \frac{1}{4} x^4 - (-\cos x) = \frac{1}{2} x^4 + \cos x$. Dus $\int 2x^3 - \sin x \, dx = \frac{1}{2} x^4 + \cos x + C$ «

Bij het bepalen van een primitieve zullen we in het algemeen eerst kijken of de functie de afgeleide is van een standaardfunctie. In de volgende tabel vindt u een overzicht van standaardprimitieven.

TABEL 7.1 Standaardprimitieven

$f(x)$	*primitieve* $F(x)$	*voorwaarde*
x^a	$\frac{1}{a+1} x^{a+1}$	voor $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	
e^x	e^x	
a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x$	voor $a > 0$, $a \neq 1$

Opmerking: als u deze tabel vergelijkt met de tabel van de standaard-afgeleiden (tabel 6.3 in leereenheid 6) dan vallen u misschien de absoluutstrepen in de primitieve van $1/x$ op. Bedenk dat voor negatieve waarde van x geldt dat $\ln|x| = \ln(-x)$. De afgeleide van $\ln(-x)$ is gelijk aan $1/x$ (denk aan de kettingregel). Dus is inderdaad $\ln(-x)$ een primitieve van $1/x$ op $\langle -\infty, 0 \rangle$.

OPGAVE 7.9
Bepaal van de volgende functies alle primitieven.

a $5x\sqrt[3]{x}$ b $\frac{1}{6x^2}$ c 2^x

d $\frac{x+1}{x}$ e $\frac{1}{4\cos^2 x}$

cc BY NC ND

OPGAVE 7.10
Bepaal van de volgende functies alle primitieven.

a $x^4 - 3x^2 + 2$ b $\sin x - \cos x$ c $\dfrac{1}{5x}$

d $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ e $\dfrac{3}{x^3} - \dfrac{4}{5x^4}$ f $(x^4 - 3x)^2$

Het vinden van een primitieve is lastiger dan het bepalen van de afgeleide. Differentiëren bestaat uit het uitvoeren van een reeks rekenregels. Zo'n procedure is er niet voor het primitiveren. Er is wel een reeks methodes waarmee in bepaalde gevallen een primitieve gevonden kan worden. De meeste van de methodes zullen we hier niet behandelen. We besteden alleen aandacht aan de trial-and-errormethode, die we aan de hand van het volgende voorbeeld toelichten.

VOORBEELD 7.8 Welke functie is een primitieve van $\sin 2x$? Dergelijke primitieven zijn te bepalen door eerst een functie te proberen, te controleren of deze inderdaad voldoet, en zo nodig het antwoord aan te passen. In dit geval proberen we als primitieve $-\cos 2x$. Als we deze functie differentiëren krijgen we $2\sin 2x$, een factor 2 te veel. Een primitieve van $\sin 2x$ is dus $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$. «

Trial and error methode

In het algemeen proberen we $F(ax + b)$ als primitieve van $f(ax + b)$ als F een bekende primitieve is van f. Vervolgens zullen we dan nog voor een factor a moeten corrigeren.

OPGAVE 7.11
Bepaal primitieven van de volgende functies

a $(1 - x)^4$

b $1/(3 + 2x)$

c $e^{x/3}$

d $\cos(5x + 8)$

e $4\cos(3x) - 3\cos(4x)$

f $\sqrt{}(1 - 3x) + 2\sqrt{}(4x + 2)$

g $3^{3x} - \frac{1}{3}\sin(3x)$

h $\dfrac{6}{\cos^2(1+x)} + \dfrac{4}{(x+1)^3}$

i $(1 + 2x^2)^3$

We merkten al op dat voor het primitiveren van functies niet zo'n eenvoudig recept te geven is als voor het differentiëren van functies. Sterker nog, er zijn functies waarvan wel een primitieve bestaat, maar die niet uitgedrukt kan worden in bekende elementaire functies.

Bij het zoeken van primitieven kan in sommige gevallen een computeralgebrapakket helpen. We zullen u hier alleen vragen om van eenvoudige functies de primitieve te bepalen.

4 Bepaalde en onbepaalde integraal

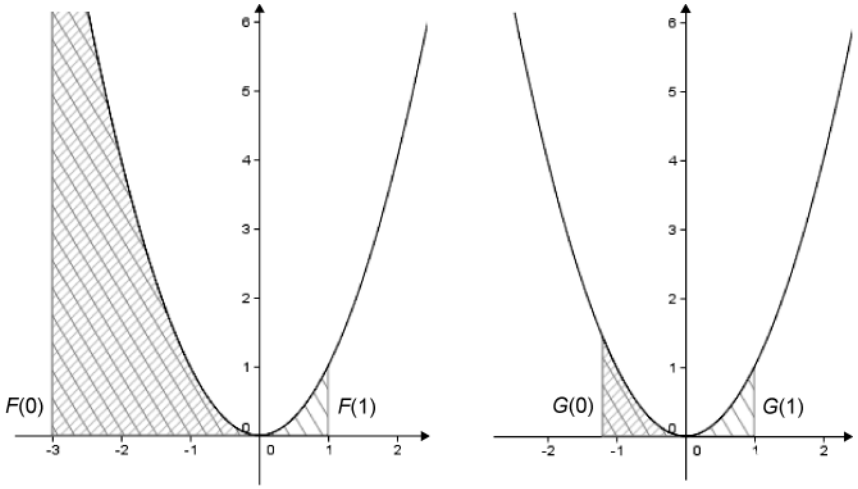
Onbepaalde integraal
Bepaalde integraal

Een primitieve noemen we ook wel een *onbepaalde integraal*, en de integralen met boven- en ondergrenzen *bepaalde integralen*. In paragraaf 1 leerde u voor positieve functies f dat de bepaalde integraal van f over $[a, b]$ gelijk is aan de oppervlakte ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = a$ en $x = b$. Als f negatief is, is de bepaalde integraal gelijk aan het tegengestelde van deze oppervlakte, en als f gedeeltelijk positief en gedeeltelijk negatief is, dan telt het deel van de oppervlakte boven de x-as positief mee, en het deel onder de x-as negatief.

Het berekenen van een bepaalde integraal door de oppervlaktes uit te rekenen is in het algemeen niet te doen. In deze paragraaf leert u hoe u met behulp van een onbepaalde integraal een bepaalde integraal uit kunt rekenen. We beginnen met een voorbeeld.

VOORBEELD 7.9

De functie F is als volgt gedefinieerd: $F(t)$ is gelijk aan de oppervlakte onder de functie $f(x) = x^2$ tussen $x = -3$ en $x = t$. Met behulp van deze functie kunnen we nu de oppervlakte onder de grafiek van f tussen $x = 0$ en $x = 1$ uitrekenen. Deze oppervlakte is gelijk aan $F(1) - F(0)$ (zie figuur 7.6). De functie F is één van de mogelijke primitieven van f. Ook voor andere primitieven G van f geldt dat de oppervlakte onder f tussen $x = 0$ en $x = 1$ gelijk is aan $G(1) - G(0)$. In figuur 7.6 ziet u hier een voorbeeld van: de oppervlakte is ook gelijk aan $G(1) - G(0)$.



FIGUUR 7.6 Links de functie F, de oppervlakte onder f vanaf $x = -3$, $F(0)$ en $F(1)$ zijn gearceerd, rechts idem de functie G. «

Om een bepaalde integraal te bepalen is het dus voldoende om over één primitieve te beschikken: als F een primitieve is van f dan geldt dat

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Bij het berekenen van een bepaalde integraal maken we vaak gebruik van de volgende notatie:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

waarbij

$F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$ betekent dat we in $F(x)$ voor x de waarden b en a invullen en het tweede resultaat van het eerste aftrekken.

VOORBEELD 7.10 We berekenen

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$$

Een primitieve van $f(x) = x^2$ is de functie $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. De integraal is dus gelijk aan $F(1) - F(0)$:

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1}$$

Vullen we achtereenvolgens de waarde $x = 1$ en $x = 0$ in, dan vinden we zo:

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1} = \tfrac{1}{3}\cdot 1^3 - \tfrac{1}{3}\cdot 0^3 = \tfrac{1}{3}$$ «

VOORBEELD 7.11 We berekenen

$$\int_0^{\pi/4} \sin x - \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Een primitieve van $\sin x - 1/\cos^2 x$ is $-\cos x - \tan x$. De integraal is dus gelijk aan:

$$\int_0^{\pi/4} \sin x - \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = (-\cos x - \tan x)\Big|_{x=0}^{x=\pi/4}$$

Vullen we achtereenvolgens de waarde $x = \pi/4$ en $x = 0$ in, waarbij we goed op het plaatsen van de haakjes en het correct verwerken van de negaties moeten letten, dan vinden we zo:

$$\int_0^{\pi/4} \sin x - \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = (-\cos x - \tan x)\Big|_{x=0}^{x=\pi/4} =$$
$$-\cos(\pi/4) - \tan(\pi/4) - (-\cos 0 - \tan 0) =$$
$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - 1 - (-1 - 0) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$ «

OPGAVE 7.12
Bereken de volgende bepaalde integralen:

a $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

b $\int_1^2 (1-2x)^5\,dx$

c $\int_{-1}^1 e^{2x-1}\,dx$

d $\int_0^{\pi/4} \cos x + 2\sin 2x\,dx$

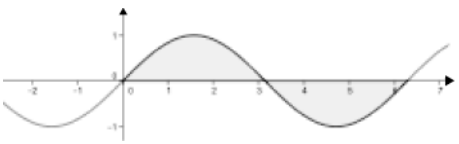
e $\int_0^7 \sqrt{3x+4}\,dx$

Bij het bepalen van oppervlaktes met behulp van integraalrekening moeten we erop bedacht zijn dat bij negatieve waarden van f het tegengestelde van de oppervlakte berekend wordt.

VOORBEELD 7.12 In figuur 7.7 is de grafiek van de functie $\sin x$ getekend. Stel dat we de gearceerde oppervlakte willen berekenen, dan moeten we het interval eerst splitsen in een deel waar de functie positief is en een deel waar de functie negatief is. Van het negatieve deel hebben we het tegengestelde van de integraal nodig. De oppervlakte is dus gelijk aan

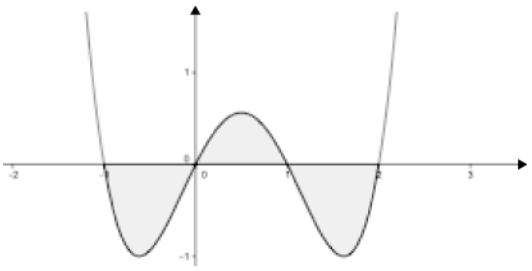
$$O = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + (-\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx) = \int_0^{\pi} \sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx =$$
$$-\cos x\big|_{x=0}^{x=\pi} - \left(-\cos x\big|_{x=\pi}^{x=2\pi}\right) = -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi = 4$$

Het oppervlak van het gearceerde deel is dus gelijk aan 4.



FIGUUR 7.7 De functie $\sin x$ met een te bepalen oppervlak «

OPGAVE 7.13
In figuur 7.8 is de grafiek getekend van de functie $f(x) = x(x^2 - 1)(x - 2)$.
Bereken de grootte van het gearceerde oppervlak.



FIGUUR 7.8 Grafiek van f met het te bepalen oppervlak

OPGAVE 7.14

a Teken in een figuur de grafiek van de functie $f(x) = 2 - \sin x$ en $g(x) = \sin x$ tussen $x = 0$ en $x = \pi$.

b Beredeneer dat de oppervlakte tussen deze functies gelijk is aan

$$\int_0^{\pi} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$$

en bepaal deze oppervlakte.

c Bepaal de oppervlakte ingesloten door de functies $f(x) = 2k - k\sin kx$ en $g(x) = k\sin kx$ tussen $x = 0$ en $x = \pi/k$

5 Oneigenlijke integralen

Oneigenlijke integraal

Soms zult u integralen tegenkomen die gaan over een domein dat oneindig doorloopt, bijvoorbeeld de integraal van de functie $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ over het interval $[0, \infty\rangle$. We noemen een integraal waarvan de ondergrens gelijk is aan $-\infty$ of de bovengrens gelijk aan ∞ een *oneigenlijke integraal*. Het is ook mogelijk dat een oneigenlijke integraal over de hele reële as loopt, dus van $-\infty$ tot ∞. We noteren in zo'n geval de symbolen $-\infty$ of ∞ als ondergrens of bovengrens, dus bijvoorbeeld:

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \text{ of } \int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Hoe bepalen we nu zo'n integraal? We kunnen niet zonder meer de symbolen $-\infty$ of ∞ in een primitieve invullen. Maar we kunnen wel gebruikmaken van het limietbegrip. Bij limieten bekijken we wat er gebeurt als de variabele oneindig groot (positief of negatief) wordt. Op die manier kunnen we een oneigenlijke integraal zien als de limiet van gewone, bepaalde integralen. We definiëren daarom:

DEFINITIE 7.2

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{p\to\infty}\int_a^{p} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ en } \int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to-\infty}\int_q^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

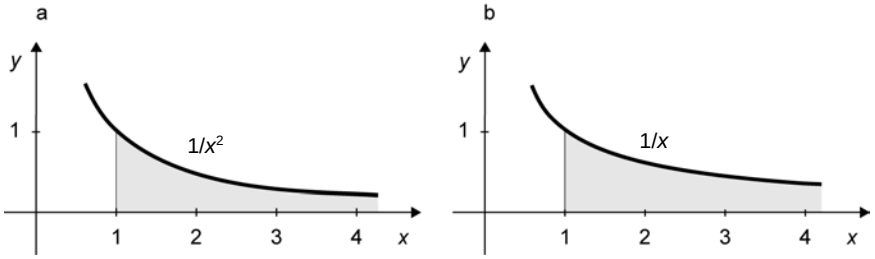
VOORBEELD 7.13 Voor iedere $p > 1$ geldt dat

$$\int_1^{p} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\Big|_1^{p} = -\frac{1}{p} + 1$$

In de limiet $p \to \infty$ gaat het rechterlid naar 1. De oneigenlijke integraal van $1/x^2$ over $[0, \infty\rangle$. is dus gelijk aan:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{p\to\infty} \int_1^{p} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{p\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\Big|_1^{p}\right) = \lim_{p\to\infty} \left(-\frac{1}{p}+1\right) = 1$$

In termen van oppervlakte betekent dit antwoord dat het gearceerde gebied in figuur 7.9a oppervlakte 1 heeft.



FIGUUR 7.9 De oppervlakte onder de grafieken van $1/x^2$ en $1/x$ op $[1, \infty\rangle$ is 1 (a) respectievelijk ∞ (b)

Figuur 7.9b, waarin de oppervlakte onder de grafiek van $1/x$ op $[1, \infty\rangle$ is gerasterd, lijkt sterk op figuur 7.9a, wat suggereert dat ook deze oppervlakte eindig is. Echter

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{p\to\infty} \int_1^{p} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{p\to\infty} \left(\ln|x|\,\Big|_1^{p}\right) = \lim_{p\to\infty} \ln p = \infty$$

Divergent
Convergent

In dit geval is de oppervlakte oneindig. We noemen in zo'n geval de oneigenlijke integraal *divergent*. Een oneigenlijke integraal die bij berekening een eindige waarde oplevert noemen we *convergent*. «

OPGAVE 7.15
Ga van de volgende oneigenlijke integralen na of ze convergent dan wel divergent zijn en bereken ze in geval van convergentie.

a $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$

b $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

c $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

We moeten voorzichtig zijn met oneigenlijke integralen waarin de ondergrens gelijk is aan $-\infty$ en de bovengrens aan ∞. Als voorbeeld bekijken we

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}x$$

Allereerst merken we op dat

$$\int_0^{\infty} x\mathrm{d}x = \lim_{p\to\infty}\left(\tfrac{1}{2}x^2\,\Big|_0^p\right) = \lim_{p\to\infty}\tfrac{1}{2}p^2 = \infty$$

dus $\int_0^{\infty} x\mathrm{d}x$ is divergent, en net zo dat

$$\int_{-\infty}^{0} x\mathrm{d}x = \lim_{p\to-\infty}\left(\tfrac{1}{2}x^2\,\Big|_p^0\right) = \lim_{p\to-\infty}(-\tfrac{1}{2}p^2) = -\infty$$

Het gevaar dreigt nu dat we ∞ en –∞ als volgt tot 0 optellen:

Dit is dus onjuist!

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}x = \lim_{p\to\infty}\tfrac{1}{2}x^2\Big|_{-p}^{p} = \lim_{p\to\infty}\left(\tfrac{1}{2}p^2 - \tfrac{1}{2}p^2\right) = \lim_{p\to\infty} 0 = 0$$

Hoewel er enige 'waarheid' schuilt in dit antwoord, zullen we dit niet toestaan. We berekenen hier namelijk $\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}x$ op een heel speciale manier en als we het anders doen, dan is er *elk* antwoord uit te krijgen dat we maar willen.

Om dit probleem op te lossen, spreken we af dat dit soort oneigenlijke integralen waarin twee of meer limieten voorkomen, berekend moeten worden via een *opsplitsing* in oneigenlijke integralen waarin nog maar *één limiet* voorkomt. We noemen de oorspronkelijke oneigenlijke integraal pas convergent als *elk* van de oneigenlijke integralen in de opsplitsing convergent is. Dit betekent dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{q\to-\infty}\int_q^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{p\to\infty}\int_c^p f(x)\mathrm{d}x$$

en dat $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ pas convergent is als zowel $\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x$ als $\int_{c}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ convergent zijn. Hierbij kan c willekeurig gekozen worden, hoewel we meestal $c = 0$ kiezen. Voor het rekenen met limieten gelden natuurlijk alle regels en verboden die we gewend zijn, dus bijvoorbeeld nooit ∞ – ∞ = 0. Volgens deze afspraak is $\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}x$ dus divergent, immers, $\int_0^{\infty} x\mathrm{d}x$ is divergent.

VOORBEELD 7.14

De functie $F(x) = -\mathrm{e}^{-x^2}$ is een primitieve van de functie $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$.
U kunt dit controleren door de functie F te differentiëren.
Om de oneigenlijke integraal van f over $\langle -\infty, \infty\rangle$ te berekenen, splitsen we in 0:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{q\to-\infty}\int_q^0 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{p\to\infty}\int_0^p 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{q\to-\infty} -\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_q^0 + \lim_{p\to\infty} -\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^p = \lim_{q\to-\infty}(-1+\mathrm{e}^{-q^2}) + \lim_{p\to\infty}(-\mathrm{e}^{-p^2}+1) = 0\end{aligned}$$

Deze oneigenlijke integraal is dus convergent. «

OPGAVE 7.16
Bereken de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2}\,dx$$

door te splitsen in $c = 1$, en controleer dat dit hetzelfde antwoord oplevert.

OPGAVE 7.17
a Controleer dat

$$F(x) = \frac{1}{1+e^x}$$

een primitieve is van de functie $f(x) = \dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2}$

b Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$$

OPGAVE 7.18
a Controleer dat

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

een primitieve is van de functie $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

b Onderzoek de convergentie van

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

OPGAVE 7.19
Ga van de volgende oneigenlijke integralen na of ze convergent dan wel divergent zijn en bereken ze in geval van convergentie.

a $\int_{-\infty}^{0} e^{3x}\,dx$ b $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ c $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx$

SAMENVATTING

Als f de afgeleide is van de functie F, dan heet F een primitieve van f. Als F een primitieve is van f, dan is ook $F + c$ een primitieve voor elke constante c.

Als F een primitieve is van f, dan is de bepaalde integraal van f over $[a, b]$ gelijk aan

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Als f positief is op $[a, b]$, dan is de bepaalde integraal van f over $[a, b]$ gelijk aan de oppervlakte ingesloten door de grafiek van f, de x-as, en de lijnen $x = a$ en $x = b$.

Voor het integreren gelden de volgende rekenregels:

Somregel $F + G$ is een primitieve van $f + g$.
Verschilregel $F - G$ is een primitieve van $f - g$.
Constante-regel cF is een primitieve van cf.

Intervalregel $$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

Een som kunnen we benaderen door een integraal:

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \text{ is ongeveer gelijk aan } \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

Oneigenlijke integralen berekenen we als limiet van bepaalde integralen:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{p\to\infty} \int_a^p f(x)\,\mathrm{d}x \text{ en } \int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to-\infty} \int_q^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Oneigenlijke integralen over de hele reële rechte moeten we eerst splitsen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{q\to-\infty} \int_q^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{p\to\infty} \int_c^p f(x)\mathrm{d}x$$

ZELFTOETS

1 Bepaal de primitieven van

a $10x^4 + x\sqrt[5]{x} - 4e^{2x-3}$

b $\dfrac{3}{2x-5}$

c $2\sin 2x + \dfrac{1}{3\cos^2 x}$

d $\dfrac{2^x}{5^x}$

2 Bepaal de volgende bepaalde integralen:

a $\int_1^4 \dfrac{1}{(x+2)^2}\,dx$

b $\int_0^{\pi} \sin x - 3x^2 - 2\,dx$

3 Bereken $\int_0^2 f(t)dt$ als f gegeven wordt door

$$f(t) = \begin{cases} 1+t^2 & \text{voor } 0 \le t < 1 \\ \cos(\pi t + \frac{\pi}{2}) & \text{voor } 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

Geef een interpretatie van het antwoord in termen van oppervlakte.

4 Beschouw de functies $f(x) = 4/\cos^2 x$ en $g(x) = 3\sin 2x$.
a Noem $h(x) = f(x) - g(x)$. Bepaal alle primitieven van h.
b Laat zien dat $f(x) \ge g(x)$ op $[0, \pi/4]$ en bereken de oppervlakte tussen de grafieken van f en g op $[0, \pi/4]$.
c Kies een primitieve H van h en bereken $H(5\pi/4) - H(\pi/6)$. Is dit getal te interpreteren als een oppervlakte tussen de grafieken van f en g? Motiveer uw antwoord.

cc BY NC ND

Terugkoppelingen

1 Uitwerking van de opgaven

1.1 **a** Met twee dobbelstenen kunnen we 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 of 12 ogen gooien. De elementen van W zijn dus 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.
b We tellen de elementen van W, het zijn er 11, dus $|W| = 11$.

1.2 **a** De elementen van O zijn 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.
b $|O| = 8$.

1.3 **a** Er geldt $W = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ en $O = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$. Nu volgt direct dat $W \cup O = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15\}$.
b $W \cap O = \{3, 5, 7, 9, 11\}$.
c $W \setminus O = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.
d $O \setminus W = \{1, 13, 15\}$.

1.4 **a** $P = \{p \mid p$ is een provincie in Nederland$\}$ = {Groningen, Friesland, Drenthe, Overijssel, Flevoland, Gelderland, Utrecht, Noord-Holland, Zuid-Holland, Zeeland, Noord-Brabant, Limburg}
b Omdat $3 = 3^1$ en $9 = 3^2$ en $27 = 3^3$, enzovoort, volgt $\{3, 9, 27, 81, \ldots\}$ $= \{x \mid x$ is een eerste of hogere macht van 3$\}$.
c Omdat 5, 10, 15, 20, …veelvouden zijn van 5, volgt $\{5, 10, 15, 20, \ldots\}$ $= \{x \mid x$ is een veelvoud van 5$\}$.

1.5 **a** $\lfloor 21/4 \rfloor = \lfloor 5\frac{1}{4} \rfloor = 5$
b $\lceil -21/4 \rceil = \lceil -5\frac{1}{4} \rceil = -5$
c $\lceil 1/5 \rceil = 1$
d $\lfloor 1/-5 \rfloor = \lfloor -1/5 \rfloor = -1$
e $\lfloor 15/-5 \rfloor = \lfloor -3 \rfloor = -3$
f $\lceil 10/5 \rceil = \lceil 2 \rceil = 2$

1.6 **a** $15 = 3 \cdot 5$; $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$; $17 = 1 \cdot 17$; $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$
b $D(15) = \{1, 3, 5, 15\}$
$D(16) = \{1, 2, 4, 8, 16\}$
$D(17) = \{1, 17\}$
$D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

1.7 **a** De ggd(15, 18) = 3.
b De veelvouden van 15 zijn: 15, 30, 45, 60, 75, 90, … De veelvouden van 18 zijn: 18, 36, 54, 72, 90, … Het kgv(15, 18) = 90.

1.8 De delers van 60 zijn: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. De delers van 70 zijn: 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70. De ggd(60, 70) = 10.
De veelvouden van 60 zijn: 60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, ...
De veelvouden van 70 zijn: 70, 140, 210, 280, 350, 420, ...
Het kgv(60, 70) = 420.

1.9 Er geldt: $675 = 3^3 \cdot 5^2$ en $2940 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^2$. Nu volgt ggd(675, 2940) $= 3^1 \cdot 5^1 = 15$ en kgv(675, 2940) $= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 132.300$

cc BY NC ND

1.10 Als de priemontbinding van een getal bekend is, dan is bekend welke priemfactoren voorkomen, en tot welke macht. Een getal g kan dan geschreven worden als:

$$g = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$$

In een deler van g kan een priemfactor p_i nu 0, 1,…, n_i keer voorkomen. Dat geeft het volgende aantal mogelijke delers:
$(n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (n_k + 1)$.
Voor 72 geldt: $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Er geldt dus dat $n_1 = 3$ en $n_2 = 2$. Het aantal delers is dan: $(n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) = 4 \cdot 3 = 12$.
De delers van 72 zijn: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 en 72. Dit zijn inderdaad 12 delers.

1.11 De delers van 28 zijn 1, 2, 4, 7, 14 en 28. Er geldt: 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28, dus 28 is een perfect getal. (Het volgende perfecte getal is 496.)

1.12 **a** $\frac{5}{9} + \frac{11}{15} = \frac{25}{45} + \frac{33}{45} = \frac{58}{45} = 1\frac{13}{45}$

b $\frac{8}{25} - \frac{13}{15} = \frac{24}{75} - \frac{65}{75} = -\frac{41}{75}$

c $\frac{8}{9} \cdot \frac{15}{28} = \frac{8 \cdot 15}{9 \cdot 28} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$

d $\frac{13}{10} / \frac{7}{15} = \frac{13}{10} \cdot \frac{15}{7} = \frac{13 \cdot 15}{10 \cdot 7} = \frac{13 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{13 \cdot 3}{2 \cdot 7} = \frac{39}{14} = 2\frac{11}{14}$

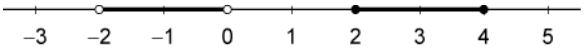
e $\frac{21}{31} / \frac{7}{2} = \frac{21}{31} \cdot \frac{2}{7} = \frac{21 \cdot 2}{31 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 2}{31 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 2}{31} = \frac{6}{31}$

f $-\frac{1}{3} \cdot -\frac{3}{7} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 7} = \frac{1}{7}$

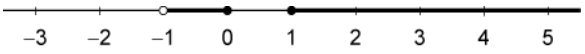
g $\frac{48}{85} - \frac{25}{51} = \frac{144}{255} - \frac{125}{255} = \frac{19}{255}$

1.13 Met een staartdeling, of een rekenmachine volgt:
17/7 = 2,428571428571… Als dit verder wordt uitgewerkt, komt er steeds een herhaling van de cijfers 428571.

1.14 **a** De verzameling $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0 \text{ of } 2 \leq x \leq 4\}$ wordt op de getallenlijn als volgt weergegeven.



b De verzameling $\langle -1, 0] \cup [1, \infty\rangle$ wordt op de getallenlijn als volgt weergegeven.



1.15 **a** Een impliciete definitie is $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 4\}$. Het interval is $\langle -1, 4]$.
b Een impliciete definitie is $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ of } x = 2\}$.
Het interval is $\langle \leftarrow, 0\rangle \cup \{2\}$.

1.16 **a** $(-5)^{11} : 5^9 = -(5^{11} : 5^9) = -(5^{11-9}) = -5^2 = -25$

b $7^{-3} \cdot (-7)^2 = 7^{-3} \cdot 7^2 = 7^{-3+2} = 7^{-1} = \frac{1}{7}$

c $((81)^2)^3 \cdot 81^{-5} = 81^6 \cdot 81^{-5} = 81^{6-5} = 81$

d $(\frac{4}{3})^4 \cdot (-\frac{3}{4})^5 = -((\frac{4}{3})^4 \cdot (\frac{3}{4})^5) = -((\frac{4^4}{3^4}) \cdot (\frac{3^5}{4^5})) = -\frac{4^4 \cdot 3^5}{3^4 \cdot 4^5} = -\frac{3}{4}$

e $2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

f $4^0 = 1$

g $0^5 = 0$

h $0^0 = 1$

1.17 **a** $3^{\frac{7}{5}} = 3^{1+\frac{2}{5}} = 3^1 \cdot 3^{\frac{2}{5}} = 3\sqrt[5]{3^2} = 3\sqrt[5]{9}$

b $7^{-\frac{3}{5}} = \dfrac{1}{7^{\frac{3}{5}}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{7^3}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{343}}$

c $\dfrac{3^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{1}{4}}} = 3^{\frac{2}{5}-\frac{1}{4}} = 3^{\frac{8}{20}-\frac{5}{20}} = 3^{\frac{3}{20}} = \sqrt[20]{3^3} = \sqrt[20]{27}$

d $\dfrac{7^{-2}}{3^{-\frac{5}{3}}} = 7^{-2} \cdot 7^{\frac{5}{3}} = 7^{-2+\frac{5}{3}} = 7^{-\frac{6}{3}+\frac{5}{3}} = 7^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{7^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{7}}$

1.18 Er geldt $3^2 < 11 < 4^2$, dus $\sqrt{11}$ ligt tussen 3 en 4.
Er geldt $9^2 < 85 < 10^2$, dus $\sqrt{85}$ ligt tussen 9 en 10.
Er geldt $12^2 < 150 < 13^2$, dus $\sqrt{150}$ ligt tussen 12 en 13.

1.19 **a** $\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$

b $\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$

c $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = x^{-\frac{4}{3}}$

1.20 **a** $^{14}\log 4 + {}^{14}\log 49 = {}^{14}\log(4 \cdot 49) = {}^{14}\log(2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7)$
$= {}^{14}\log(14 \cdot 14) = {}^{14}\log 14^2 = 2$

b $^5\log \dfrac{1}{125} = {}^5\log(5)^{-3} = -3$

c $\dfrac{^7\log 100}{^7\log 10} = {}^{10}\log 100 = {}^{10}\log 10^2 = 2$

d $^2\log 24 - {}^2\log 6 = {}^2\log(\frac{24}{6}) = {}^2\log 4 = {}^2\log 2^2 = 2$

cc BY NC ND

1.21 **a** $^{10}\log 4 = 0{,}602060$

b $^{10}\log 25{,}3 = 1{,}403121$

c $^{4}\log 7 = \dfrac{^{10}\log 7}{^{10}\log 4} = \dfrac{0{,}845098}{0{,}602060} = 1{,}403677$

d $^{6}\log 31 = \dfrac{^{10}\log 31}{^{10}\log 6} = \dfrac{1{,}491362}{0{,}778151} = 1{,}916545$

1.22 **a** Voor ieder positief getal g geldt $a^{\,^a\log(g)} = g$. Dat gebruiken we op de volgende wijze:

$$a^{\,^a\log(x/y)} = \frac{x}{y} = \frac{a^{\,^a\log x}}{a^{\,^a\log y}} = a^{\,^a\log x - {}^a\log y}$$

Omdat de exponenten van de eerste en laatste formule gelijk moeten zijn, volgt nu dat:

$$^a\log(\tfrac{x}{y}) = {}^a\log x - {}^a\log y$$

b Op soortgelijke wijze

$$a^{\,^a\log(x^y)} = x^y = (a^{\,^a\log x})^y = a^{y\cdot {}^a\log x}$$

Omdat de exponenten van de eerste en laatste formule gelijk moeten zijn, volgt nu dat: $^a\log x^y = y \cdot {}^a\log x$

1.23 Met de formule $a_i = i^2$ kunnen we direct bepalen: $a_6 = 6^2 = 36$ en $a_{10} = 10^2 = 100$.

1.24 Door de formule $b_i = i + 4$ toe te passen voor $i = 0, 1, 2, 6$ en 10 vinden we:
$b_0 = 0 + 4 = 4$
$b_1 = 1 + 4 = 5$
$b_2 = 2 + 4 = 6$
$b_6 = 6 + 4 = 10$
$b_{10} = 10 + 4 = 14$

1.25 **a** Er geldt: $b_1 = b_0 + 3 = -5 + 3 = -2$. En vervolgens: $b_2 = b_1 + 3 = -2 + 3 = 1$, $b_3 = b_2 + 3 = 1 + 3 = 4$ en $b_4 = b_3 + 3 = 4 + 3 = 7$.
b Voor b_i moet er i keer 3 bij -5 opgeteld worden. Dus $b_i = -5 + i \cdot 3$.
c Met de formule uit onderdeel *b* volgt: $b_8 = -5 + 8 \cdot 3 = 19$.

1.26 **a** Er geldt $b_1 = \frac{1}{2} \cdot b_0 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ en vervolgens $b_2 = \frac{1}{2} \cdot b_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, $b_3 = \frac{1}{2} \cdot b_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$ en $b_4 = \frac{1}{2} \cdot b_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot = \frac{1}{4}$.
b Voor b_i moet b_0 i keer met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd worden. Dus $b_i = 4 \cdot (\frac{1}{2})^i$.
c Met de formule uit onderdeel *b* volgt: $b_8 = 4 \cdot (\frac{1}{2})^8 = \frac{4}{256} = \frac{1}{64}$.

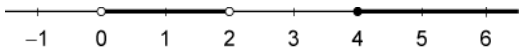
1.27 In opgave 1.26 is berekend dat geldt: $b_0 = 4$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$, $b_3 = \frac{1}{2}$ en $b_4 = \frac{1}{4}$.

a $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} b_i = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = 4 + 2 + 1 + \tfrac{1}{2} = 7\tfrac{1}{2}$

b $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} b_i = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 2 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 3\tfrac{3}{4}$

2 Antwoorden op de zelftoets

1 **a** Het getal 8 is een natuurlijk getal, en behoort tot: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.
Het getal –6 is negatief, dus geen natuurlijk getal, maar wel een geheel getal. Het behoort tot: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.
Het getal 0 is een natuurlijk getal, en behoort tot: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.
Het getal $\frac{1}{3}$ is niet geheel. Het behoort tot: $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.
Het getal $\sqrt[3]{7}$ is niet een rationaal getal, en behoort tot $\mathbb{R}$.
Het getal $2\frac{1}{3}$ is de derdemachtswortel uit 2 en behoort tot $\mathbb{R}$.
Het getal ${}^{10}\log 5$ behoort tot $\mathbb{R}$.
b De weergave van $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2 \text{ of } x \geq 4\}$ op de getallenlijn ziet er als volgt uit:



2 **a** We schrijven 24 en 30 als product van priemfactoren:

$24 = 2^3 \cdot 3$
$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

Door de laagste en hoogste waarden van de exponenten van de overeenkomstige priemfactoren te nemen vinden we:

ggd(24, 30) $= 2^1 \cdot 3^1 = 6$
kgv(24, 30) $= 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 120$

b Er geldt $24 \cdot 30 = 720$ en ook geldt: $6 \cdot 120 = 720$. Omdat bij de ggd steeds de laagste machten van de overeenkomstige priemfactoren worden genomen, en bij het kgv de hoogste machten, komen alle machten in het product voor. Daarom is het product van ggd en kgv gelijk aan het product van de getallen.

3 **a** $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{5}{4}} \cdot x^{-\frac{3}{4}}} = x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{-\frac{5}{4}} \cdot x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{3}{2}-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}} = x^{\frac{6}{4}-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}} = x^{\frac{4}{4}} = x^1 = x$

b $\sqrt{2x^2 - \sqrt[3]{x^6}} = \sqrt{2x^2 - \sqrt[3]{(x^2)^3}} = \sqrt{2x^2 - x^2} = \sqrt{x^2} = x$

c ${}^x\log\left(x^2 \cdot (2x-x)^{-1}\right) = {}^x\log\left(\dfrac{x^2}{2x-x}\right) = {}^x\log\left(\dfrac{x^2}{x}\right) = {}^x\log(x) = 1$

4 **a** $\sqrt[3]{2345} = 13,2856$

b ${}^{10}\log 2345 = 3,370143$

c ${}^3\log 2345 = \dfrac{{}^{10}\log 2345}{{}^{10}\log 3} = \dfrac{3,370143}{0,477121} = 7,063493$

5 In ${}^a\log x = x$ vervangen we x door $p \cdot q$. Dan volgt:

${}^a\log(p \cdot q) = p \cdot q = {}^a\log p \cdot {}^a\log q = {}^a\log p + {}^a\log q$

De exponenten in de eerste en laatste formule zijn gelijk, dus volgt:

${}^a\log(p \cdot q) = {}^a\log p + {}^a\log q$

cc BY NC ND

1 Uitwerking van de opgaven

2.1
a $6 \cdot x - 3 \cdot y - 3 \cdot x + 12 \cdot y = 6x - 3x - 3y + 12y = 3x + 9y$
b $7 \cdot (2x - y) - 3 \cdot (x + y) = 14x - 7y - 3x - 3y = 11x - 10y$
c $3x - y - 4 \cdot (x + y) = 3x - y - 4x - 4y = - x - 5y$
d $(x - 2y) \cdot (x + y) = x^2 + xy - 2xy - 2y^2 = x^2 - xy - 2y^2$
e $(x + 2y) \cdot (4x + 2y) = 4x^2 + 2xy + 8xy + 4y^2 = 4x^2 + 10xy + 4y^2$
f $2 \cdot (x + 2y + 3z) = 2x + 4y + 6z$
g $2 \cdot (3x - y) \cdot (x + 2y) = 2 \cdot (3x^2 + 6xy - xy - 2y^2) = 2 \cdot (3x^2 + 5xy - 2y^2)$
$= 6x^2 + 10xy - 4y^2$
h $x^6 \cdot x^2 + 4(x^4)^2 = x^8 + 4x^8 = 5x^8$
i $7a^3 \cdot a^6 + 4a^4 \cdot a^5 = 7a^9 + 4a^9 = 11a^9$
j $x^2(x^4 + 4y^4) = x^6 + 4x^2y^4$
k $-(x - 5) - 2(-3x + 2) = -x + 5 + 6x - 4 = 5x + 1$

2.2
a $2xy + y^2 = y \cdot (2x + y)$
b $3x^3 + 4xy^2 + 6x = x \cdot (3x^2 + 4y^2 + 6)$
c $x^2 + 5x + 4 = (x + 1) \cdot (x + 4)$
d $x^2 - 2x - 8 = (x + 2) \cdot (x - 4)$
e $y^2 - 6y + 9 = (y - 3) \cdot (y - 3)$
f $x^2 - x - 20 = (x + 4) \cdot (x - 5)$
g $2x^2 + x - 1 = (2x - 1) \cdot (x + 1)$
h $2y^2 + 7y - 15 = (2y - 3) \cdot (y + 5)$
i $x^4 + 2x^2 - 3 = (x^2 + 3) \cdot (x^2 - 1) = (x^2 + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$
j $y^{20} - y^{10} - 6 = (y^{10} - 3) \cdot (y^{10} + 2)$

2.3
a $2x^3 - 2x^2 - 12x = 2x \cdot (x^2 - x - 6) = 2x \cdot (x - 3) \cdot (x + 2)$
b $7x^2 - 21x - 28 = 7 \cdot (x^2 - 3x - 4) = 7 \cdot (x - 4) \cdot (x + 1)$
c $y^6 + y^5 - 2y^4 = y^4 \cdot (y^2 + y - 2) = y^4 \cdot (y + 2) \cdot (y - 1)$
d $y^5 - 4y^3 + 3y = y \cdot (y^4 - 4y^2 + 3) = y \cdot (y^2 - 3) \cdot (y^2 - 1)$
$= y \cdot (y^2 - 3) \cdot (y - 1) \cdot (y + 1)$
e $a^2x^2 + ax - 2 = (ax - 1) \cdot (ax + 2)$
f $ay^2 + ay - 30a = a \cdot (y^2 + y - 30) = a \cdot (y + 6) \cdot (y - 5)$
g $x^4 - 23x^2 - 50 = (x^2 - 25) \cdot (x^2 + 2) = (x - 5) \cdot (x + 5) \cdot (x^2 + 2)$
h $-x^{10} + 7x^9 + 8x^8 = -x^8 \cdot (x^2 - 7x - 8) = -x^8 \cdot (x + 1) \cdot (x - 8)$
i $-6a^2 + 4a + 2 = -2 \cdot (3a^2 - 2a - 1) = -2 \cdot (3a + 1) \cdot (a - 1)$
j $x^4 + 7x^3 + 10x^2 = x^2 \cdot (x^2 + 7x + 10) = x^2 \cdot (x + 2) \cdot (x + 5)$

2.4
a $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$
b $y^2 - 4y + 4 = (y - 2)^2$
c $3x^2 - 30x + 75 = 3 \cdot (x^2 - 10x + 25) = 3 \cdot (x - 5)^2$
d $x^2 - 4 = (x - 2) \cdot (x + 2)$
e $y^2 - 64 = (y - 8) \cdot (y + 8)$
f $a^2x^2 - b^2y^2 = (ax - by) \cdot (ax + by)$
g $100x^2 - 1 = (10x - 1) \cdot (10x + 1)$
h $x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2 - 4) \cdot (x^2 - 4) = (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$
$= (x - 2)^2 \cdot (x + 2)^2$
i $5y^2 - 5 = 5 \cdot (y^2 - 1) = 5 \cdot (y - 1) \cdot (y + 1)$
j $z^{16} - 1 = (z^8 - 1) \cdot (z^8 + 1) = (z^4 - 1) \cdot (z^4 + 1) \cdot (z^8 + 1)$
$= (z^2 - 1) \cdot (z^2 + 1) \cdot (z^4 + 1) \cdot (z^8 + 1)$
$= (z - 1) \cdot (z + 1) \cdot (z^2 + 1) \cdot (z^4 + 1) \cdot (z^8 + 1)$

cc BY NC ND

2.5 **a** 9.991 (= 100 · 100 – 3 · 3)
b 2.496 (= 50 · 50 – 2 · 2)
c 249.984 (= 500 · 500 – 4 · 4)
d 99.999.999 (= 10.000 · 10.000 – 1 · 1)

2.6 **a** $\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)}-\frac{x^2}{x(x-1)}=\frac{x^2-1-x^2}{x(x-1)}=\frac{-1}{x(x-1)}$

b $\frac{x-1}{x^3-4x}+\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{x-1}{x(x^2-4)}+\frac{1}{(x+2)(x-1)}$
$=\frac{x-1}{x(x+2)(x-2)}+\frac{1}{(x+2)(x-1)}$
$=\frac{(x-1)^2}{x(x+2)(x-2)(x-1)}+\frac{x(x-2)}{x(x-2)(x+2)(x-1)}$
$=\frac{(x-1)^2+x(x-2)}{x(x+2)(x-2)(x-1)}=\frac{x^2-2x+1+x^2-2x}{x(x-1)(x+2)(x-2)}=\frac{2x^2-4x+1}{x(x-1)(x+2)(x-2)}$

c $\frac{x}{x^2+x}+\frac{1}{x^2-x}=\frac{x}{x(x+1)}+\frac{1}{x(x-1)}=\frac{x(x-1)}{x(x+1)(x-1)}+\frac{(x+1)}{x(x+1)(x-1)}$
$=\frac{x^2-x+x+1}{x(x+1)(x-1)}=\frac{x^2+1}{x(x+1)(x-1)}$

d $\frac{2y-1}{y^2-1}-\frac{y}{y^2+2y+1}=\frac{2y-1}{(y-1)(y+1)}-\frac{y}{(y+1)^2}$
$=\frac{(2y-1)(y+1)}{(y-1)(y+1)^2}-\frac{y(y-1)}{(y-1)(y+1)^2}$
$=\frac{2y^2+y-1-y^2+y}{(y-1)(y+1)^2}=\frac{y^2+2y-1}{(y-1)(y+1)^2}$

e $\frac{x^3-x^2}{2x+1}+\frac{4x^2+2x}{x-1}=\frac{x^2(x-1)}{2x+1}+\frac{2x(2x+1)}{x-1}$
$=\frac{x^2(x-1)^2}{(2x+1)(x-1)}+\frac{2x(2x+1)^2}{(x-1)(2x+1)}$
$=\frac{x^2(x-1)^2+2x(2x+1)^2}{(2x+1)(x-1)}=\frac{x^2(x^2-2x+1)+2x(4x^2+4x+1)}{(2x+1)(x-1)}$
$=\frac{x^4-2x^3+x^2+8x^3+8x^2+2x}{(2x+1)(x-1)}=\frac{x^4+6x^3+9x^2+2x}{2x^2-x-1}$

f $\frac{1}{x^2-4}+\frac{x}{x^2+4x+4}=\frac{1}{(x-2)(x+2)}+\frac{x}{(x+2)(x+2)}$
$=\frac{(x+2)}{(x-2)(x+2)(x+2)}+\frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)(x+2)}=\frac{(x+2)+x(x-2)}{(x-2)(x+2)(x+2)}$
$=\frac{x+2+x^2-2x}{(x-2)(x+2)(x+2)}=\frac{x^2-x+2}{(x-2)(x+2)(x+2)}$

g $\dfrac{3y^2-1}{y}-\dfrac{1}{y^2+2y}=\dfrac{3y^2-1}{y}-\dfrac{1}{y(y+2)}=\dfrac{(3y^2-1)(y+2)}{y(y+2)}-\dfrac{1}{y(y+2)}$
$=\dfrac{3y^3+6y^2-y-2-1}{y(y+2)}=\dfrac{3y^3+6y^2-y-3}{y(y+2)}$

h $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n+1}{n\cdot(n+1)}-\dfrac{n}{n\cdot(n+1)}=\dfrac{n+1-n}{n\cdot(n+1)}=\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$

2.7 We voeren de vereenvoudiging uit:

$$\frac{2}{x-1}-\frac{6}{(x-1)(x+2)}=\frac{2(x+2)}{(x-1)(x+2)}-\frac{6}{(x-1)(x+2)}=\frac{2(x+2)-6}{(x-1)(x+2)}$$
$$=\frac{2x+4-6}{(x-1)(x+2)}=\frac{2x-2}{(x-1)(x+2)}=\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{2}{(x+2)}$$

Als $x = 1$, dan is de eerste uitdrukking niet gedefinieerd, maar de laatste wel. In dat geval is de vereenvoudiging dus niet geldig. Voor $x = -2$ zijn alle breuken niet gedefinieerd en kunnen we de bewerkingen dus ook niet uitvoeren.

2.8 **a** $(x+1)^3\cdot x^2\cdot(x+1)^4\cdot x^3=(x+1)^7\cdot x^5$

b $\dfrac{(y^2-1)^4\cdot(y^2-1)^6}{(y^2-1)^3}=(y^2-1)^{4+6-3}=(y^2-1)^7$

c $(x-1)^3(x+1)^3=((x-1)(x+1))^3=(x^2-1)^3$

d $2^{2x+3}\cdot 2^{2x-3}=2^{2x+3+2x-3}=2^{4x}=(2^4)^x=16^x$

e $(3^{3x+y}\cdot 3^{-x-y})^2=(3^{3x+y-x-y})^2=(3^{2x})^2=3^{4x}=(3^4)^x=81^x$

f $\dfrac{a^{x^2}}{a^{x+1}}=a^{x^2-x-1}$

g $2^{x+3}\cdot 4^{x-1}=2^{x+3}\cdot(2^2)^{x-1}=2^{x+3}\cdot 2^{2x-2}=2^{3x+1}$

2.9 **a** $\sqrt{x^2+4x+4}=\sqrt{(x+2)^2}=x+2$ voor $x\geq -2$
en $\sqrt{(x+2)^2}=-x-2$ voor $x<-2$

b $\sqrt{y^2-4}\cdot\sqrt{y-2}=\sqrt{(y+2)(y-2)}\cdot\sqrt{y-2}=\sqrt{(y+2)(y-2)^2}$
$=(y-2)\sqrt{(y+2)}$ voor $y\geq 2$

c $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{(x+1)^3}=\sqrt{(x+1)^4}=(x+1)^2$ voor $x\geq -1$

d $\sqrt[4]{x+1}\cdot\sqrt[4]{(x+1)^3}=(x+1)^{\frac{1}{4}}\cdot(x+1)^{\frac{3}{4}}=(x+1)^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}$
$=(x+1)^1=x+1$ voor $x\geq -1$

cc BY NC ND

2.10 **a** $\sqrt{x^2-2x+1} = x-1 \quad$ voor $x \geq 1$

b $\sqrt{x^2-2x+1} = -x+1 \quad$ voor $x < 1$

2.11 **a** $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$

b $\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} = \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} \cdot \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} = \dfrac{\sqrt{(x+2)(x-2)}}{x+2} = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x+2}$

2.12 **a** ${}^a\log(x-1) + {}^a\log(x+1) = {}^a\log(x-1)(x+1) = {}^a\log(x^2-1) \quad$ voor $x > 1$ en $a > 0$ en $a \neq 1$.

b ${}^a\log(x^2-x) - {}^a\log(x-1) = {}^a\log\dfrac{x^2-x}{x-1} = {}^a\log\dfrac{x(x-1)}{x-1} = {}^a\log x \quad$ voor $x > 1$ en $a > 0$ en $a \neq 1$.

c ${}^a\log a^{(y-1)} = (y-1)\,{}^a\log a = y-1 \quad$ voor $a > 0$ en $a \neq 1$.

d ${}^a\log(\dfrac{1}{x}) - {}^a\log(\dfrac{1}{x^2+x}) = {}^a\log\left(\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x^2+x}\right)}\right) = {}^a\log\left(\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{x^2+x}{1}\right)\right)$

$= {}^a\log\left(\dfrac{x^2+x}{x}\right) = {}^a\log(x+1) \quad$ voor $x > 0$ en $a > 0$ en $a \neq 1$.

2.13 **a** ${}^a\log(x-1)$ is gedefinieerd voor $x > 1$.
b ${}^a\log(x^2-1)$ is gedefinieerd als $x^2 > 1$; dat is het geval als $x > 1$ of als $x < -1$.

2 Antwoorden op de zelftoets

1 **a** Bij de bewerking $2 \cdot x = x \cdot 2$ wordt de commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging toegepast.
b Bij de bewerking $a + (2a + 3a) = (a + 2a) + 3a$ wordt de associatieve eigenschap van de optelling toegepast.
c Bij de bewerking $2 \cdot (p - q) = 2p - 2q$ wordt de distributieve eigenschap van de vermenigvuldiging over de aftrekking toegepast.

2 **a** $2(x - y)(x + 2y) = 2(x^2 + 2xy - xy - 2y^2) = 2(x^2 + xy - 2y^2) = 2x^2 + 2xy - 4y^2)$
b $a^3(a^2 + 4b^2) = a^5 + 4\,a^3b^2$

3 **a** $2x^2 + 2x - 12 = 2(x^2 + x - 6) = 2(x+3)(x-2) =$
b $y^8 - 2y^4 - 8 = (y^4 - 4)(y^4 + 2) = (y^2 - 2)(y^2 + 2)(y^4 + 2)$

4 **a** $4x^2 - 121 = (2x - 11)(2x + 11)$
b $y^2 - 8y + 16 = (y - 4)^2$

5 **a** $\dfrac{x-2}{x+3}-\dfrac{x-3}{x+2}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+3)(x+2)}-\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x+2)(x+3)}=\dfrac{(x-2)(x+2)-(x-3)(x+3)}{(x+2)(x+3)}$

$=\dfrac{(x^2-4)-(x^2-9)}{(x+2)(x+3)}=\dfrac{x^2-4-x^2+9}{(x+2)(x+3)}=\dfrac{5}{(x+2)(x+3)}$

b $\dfrac{x^2-4}{x+3}\cdot\dfrac{x^2-9}{x+2}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x+3}\cdot\dfrac{(x-3)(x+3)}{x+2}=\dfrac{(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)}{(x+3)(x+2)}$

$=(x-2)(x-3)$

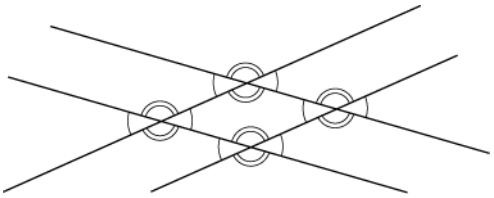
6 **a** Voor $x > 2$ is $(x - 2)$ groter 0, en dan is zowel de wortel als de breuk gedefinieerd.

b $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}\cdot\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-2}$

cc BY NC ND

1 Uitwerking van de opgaven

3.1 In onderstaande figuur hebben we de gelijke hoeken met gelijke boogjes aangegeven.

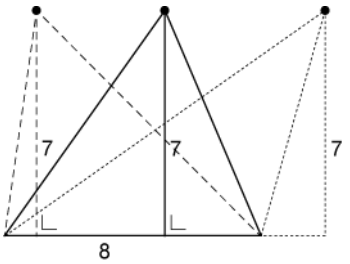


FIGUUR 3.29

3.2 De linkerfiguur is een regelmatige vijfhoek. Een lijn vanuit het middelpunt moet een vijfde van een hele cirkel ronddraaien, om met de volgende lijn samen te vallen. De aangegeven hoek is dus 360°/5 = 72°.
De rechterfiguur is een regelmatige zeshoek. Een lijn vanuit het middelpunt moet een zesde van een hele cirkel ronddraaien, om met de volgende lijn samen te vallen. De aangegeven hoek is dus 360°/6 = 60°.

3.3 **a** Door een lijn tussen twee tegenover elkaar liggende hoekpunten in een vierhoek te trekken, ontstaan twee driehoeken. In ieder van de driehoeken is de som van de hoeken 180°. In de twee driehoeken samen, en dus in de vierhoek is dat 180° + 180° = 360°.
b Een vijfhoek krijgen we door een driehoek tegen een vierhoek aan te plakken. Er komen dan nog 180° bij. De som van de hoeken in een vijfhoek is dus 540°. Voor een zeshoek plakken we er nog een keer een driehoek tegenaan, zodat het totaal 720° wordt.
c Iedere keer plakken we weer een driehoek erbij. De som van de hoeken in een driehoek was 180°; die van een vierhoek 2 keer, van een vijfhoek 3 keer, en van een n-hoek dus $n - 2$ keer. Dus de som van de hoeken in een n-hoek is
$(n - 2) \cdot 180°$.

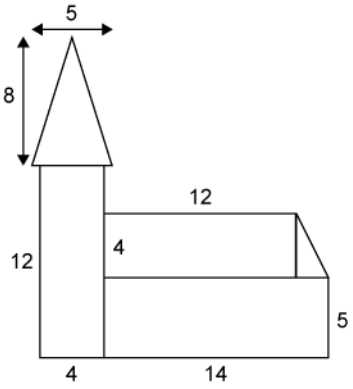
3.4 **a** De oppervlakte van een driehoek is basis maal halve hoogte, dus:
$O = b \cdot h/2 = 8 \cdot 7/2 = 28$.
b Als de basis vast wordt gekozen, dan kan de tophoek op hoogte 7, nog naar links of rechts geschoven worden, terwijl de hoogte gelijk blijft. Daar zijn oneindig veel mogelijkheden voor, zie ook onderstaande figuur met enkele mogelijkheden.



FIGUUR 3.30

3.5 Uit $O = b \cdot h/2$ volgt $h = 2 \cdot O/b$. Met $O = 10$, en b is respectievelijk 5, 5,2 en 4,3, volgt dan $h_1 = 4$, $h_2 = 3{,}85$ en $h_3 = 4{,}65$.

3.6 We tekenen één extra lijntje, zodat het figuurtje opgebouwd is uit uitsluitend rechthoeken en driehoeken.



FIGUUR 3.31

We berekenen dan de oppervlakten:
toren: $4 \cdot 12 = 48$
kerkgebouw: $14 \cdot 5 = 70$
dak kerkgebouw – rechthoekige deel: $4 \cdot 12 = 48$
torenspits: $8 \cdot 5/2 = 20$
dak kerkgebouw – driehoekige deel: $2 \cdot 4/2 = 4$
De totale oppervlakte is dan: $48 + 70 + 48 + 20 + 4 = 190$

3.7 **a** Als de lengten van de rechthoekszijden 5 en 12 zijn, dan is de lengte van de schuine zijde:

$$l = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

b Nu volgt:

$$l = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$$

c We berekenen:

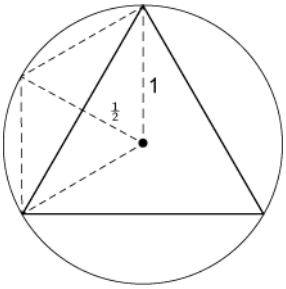
$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

Als de rechthoekszijden lengtes 3 en 4 hebben, dan heeft de schuine zijde dus lengte 5.

3.8 We passen de stelling van Pythagoras toe, en nemen l voor de lengte van een rechthoekszijde:

$$l^2 + l^2 = 4^2 = 16$$
$$2l^2 = 16$$
$$l^2 = 8$$
$$l = 2\sqrt{2}$$

3.9 **a** De hoeken tussen de gestippelde lijnstukken zijn 60 graden, dus de gestippelde driehoeken zijn niet alleen gelijkbenig, maar ook gelijkzijdig. De straal van de cirkel is 1, dus ook de lengten van de zijden van de gelijkzijdige driehoeken zijn 1. De lijn tussen de twee punten op de cirkel deelt de zijde van de gestippelde driehoeken doormidden en staat er loodrecht op. We hebben de lengten in onderstaande figuur aangegeven.



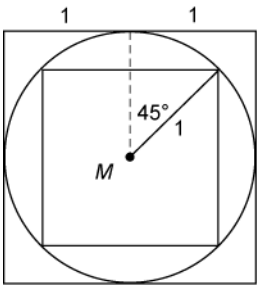
FIGUUR 3.32

We kunnen nu de lengte van de hoogtelijn in één van de gelijkzijdige driehoeken berekenen, want de kleine driehoek is een rechthoekige driehoek. We vinden:

$$l = \sqrt{1^2 - \tfrac{1}{2}^2} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}} = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

De lengte van een zijde van de 'grote' gelijkzijdige driehoek is dus $\sqrt{3}$.

3.10 In onderstaande figuur tekenen we een cirkel, met eromheen een vierkant, en erbinnen een vierkant.



FIGUUR 3.33

Als de straal van de cirkel 1 is, dan is de lengte van de zijde van het grote vierkant gelijk aan 2, en de oppervlakte 4.

Met behulp van de stelling van Pythagoras, en de constatering dat de rechthoekszijden in de kleine driehoek gelijk zijn, vinden we voor de lengte l van de rechthoekszijde:

$$l^2 + l^2 = 1^2 = 1$$
$$2l^2 = 1$$
$$l^2 = 1/2$$
$$l = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

De zijde van het kleine vierkant is dubbel zo lang, dus $\sqrt{2}$. En de oppervlakte van het kleine vierkant is dan 2.
We hebben nu gevonden dat π, kleiner is dan 4, en groter dan 2.

3.11 **a** Een hoek van 30° komt overeen met een hoek van $30 \cdot \pi/180 = \pi/6$ radialen. Een hoek van 155° komt overeen met een hoek van $155 \cdot \pi/180 = 0{,}86\pi$ radialen.
b Een hoek van $\pi/2$ radialen komt overeen met $180/2 = 90$ graden.
Een hoek van $5\pi/6$ radialen komt overeen met $5 \cdot 180/6 = 150$ graden.

3.12 We delen 360° door 7,14°, om het aantal keren te krijgen dat de hoek die Erathosthens mat, in een cirkel past. Dat vermenigvuldigen we met de afstand tussen de twee putten in stadiën, en dat weer met het aantal meter per stadie.

$$\frac{360^0}{7{,}14^0} \cdot 5000 \cdot 150 = 37.815.126$$

Eratosthenes berekende voor de omtrek van de aarde dus ongeveer 38.000 km. Dat komt aardig in de buurt van de 40.000 km die de omtrek van de aarde feitelijk is.

3.13 **a** We berekenen de lengte van de hypotenusa met de stelling van Pythagoras:

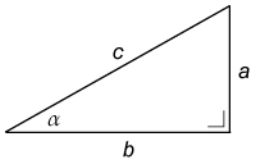
$$l = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

b $\sin\alpha = 5/13$; $\cos\alpha = 12/13$; $\tan\alpha = 5/12$

c $$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12} = \tan\alpha$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169} + \frac{144}{169} = \frac{169}{169} = 1$$

d Stel dat de lengtes van de rechthoekszijden a en b zijn, en de lengte van de hypotenusa is c, zoals weergegeven in onderstaande figuur.



FIGUUR 3.34

Nu volgt:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \tan\alpha$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

3.14 **a** We passen steeds de stelling van Pythagoras toe, en nemen de wortel van de som van de kwadraten van de verschillen in de coördinaten:

$$d(A,B) = \sqrt{(3-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

b $d(C,D) = \sqrt{(1-(-2))^2 + (5-2)^2} = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

c $d(E,F) = \sqrt{(4-(-1))^2 + (5-(-3))^2} = \sqrt{5^2+8^2} = \sqrt{25+64} = \sqrt{89}$

3.15 **a** Er geldt:

$$\tan\alpha = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{2-(-1)}{3-0} = \frac{3}{3} = 1$$

b Als $\tan\alpha = 1$, dan is α gelijk aan 45° of π/4 radialen.

3.16 We passen de formule voor de afstand in de driedimensionale ruimte toe, met $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 0$, $b_1 = 3$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$:

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2} \\ &= \sqrt{(3-1)^2 + (1-4)^2 + (2-0)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17} \end{aligned}$$

3.17 De afstand van punt (3, 6) tot de oorsprong is gelijk aan:

$$\sqrt{(3-0)^2+(6-0)^2} = \sqrt{3^2+6^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$

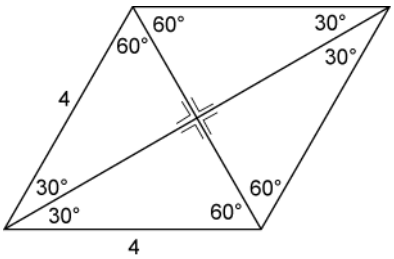
Dit is kleiner dan 7, want 7 is de wortel uit 49. Het punt valt dus binnen de cirkel.
De afstand van punt (–6, –4) tot de oorsprong is gelijk aan:

$$\sqrt{((-6)-0)^2+((-4)-0)^2} = \sqrt{(-6)^2+(-4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$$

Dit is groter dan 7 en het punt valt dus buiten de cirkel.

2 Antwoorden op de zelftoets

1 **a** In een parallellogram zijn de zijden twee aan twee evenwijdig, zodat we in de figuur diverse *Z*-hoeken kunnen herkennen. De hoek van de twee diagonalen is 90°, want in de linker driehoek zijn twee hoeken gegeven die samen 90° zijn, zodat er voor de hoek van de diagonalen ook nog 90° resteert.
En omdat de diagonalen loodrecht op elkaar staan, zijn de driehoeken twee aan twee gespiegeld ten opzichte van elkaar. Daarmee zijn alle hoeken te bepalen, zie onderstaande figuur.



FIGUUR 3.35

b De linkerhelft van het parallellogram is een gelijkzijdige driehoek (want alle hoeken zijn 60°). Met de stelling van Pythagoras berekenen we dat de hoogte van de driehoek gelijk is aan $2\sqrt{3}$, zodat de oppervlakte van de parallellogram gelijk is aan $4 \cdot 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

2 **a** Met de stelling van Pythagoras berekenen we de lengte van de hypotenusa:

$$l = \sqrt{3^2+6^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

b
$$\sin\alpha = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$\cos\alpha = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$\tan\alpha = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

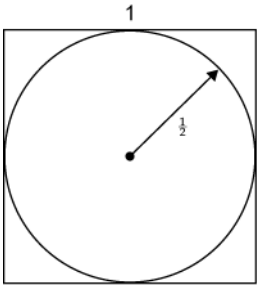
3 **a** $\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

b $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$

4 Er geldt:
$\sin(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\cos(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\tan(\pi/4) = 1$

5 In onderstaande figuur is het vierkant getekend met de lengtes van de zijden gelijk aan 1. In het vierkant is een zo groot mogelijke cirkel getekend. De straal van de cirkel is $\frac{1}{2}$.



FIGUUR 3.36

Nu volgt voor de oppervlakte:

$O = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\pi$

6 De straal van de bol is gelijk aan de afstand van een punt op de bol tot de oorsprong. Voor die afstand geldt:

$d(A,B) = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2 + (12-0)^2} = \sqrt{16+9+144} = \sqrt{169} = 13$

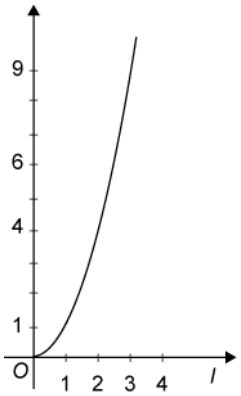
1 Uitwerking van de opgaven

4.1 **a** We berekenen de oppervlakte o voor enkele waarden van de lengte van de zijden l.

TABEL 4.10

l	1	2	3	4	5
$o = l^2$	1	4	9	16	25

b In onderstaande figuur is de grafiek van de functie geschetst.



FIGUUR 4.29 De grafiek van $o = l^2$

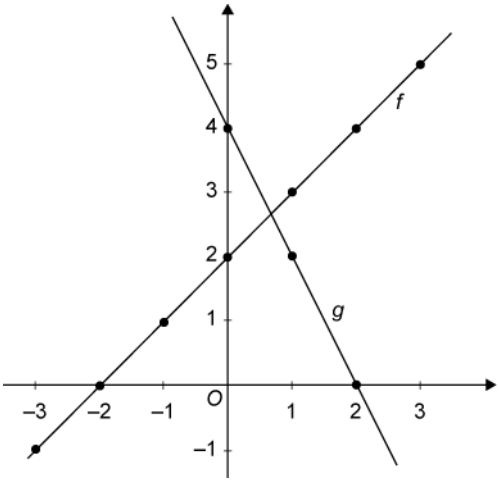
4.2 **a** Het functievoorschrift is: $O(l) = l^2$. De vergelijking is: $o = l^2$.
b In het domein komen alle waarden voor die de lengte van de zijde kunnen zijn, dus alle reële getallen groter dan nul. Als we die getallen kwadrateren, dan krijgen we ook alle reële getallen groter dan nul en dat is het bereik.

4.3 **a** We berekenen enkele punten van de grafieken f: $x \to x + 2$ en g: $x \to -2x + 4$.

TABEL 4.11

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	–1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	10	8	6	4	2	0	–2

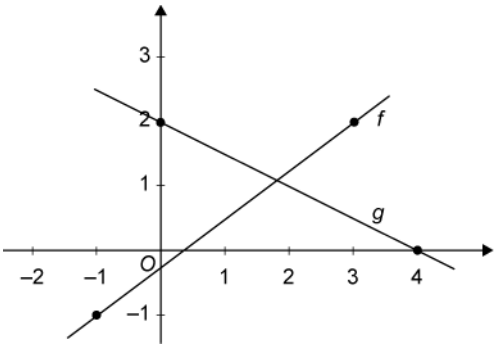
De grafieken zijn getekend in onderstaande figuur.



FIGUUR 4.30 De grafieken van de functies f en g

b Er geldt $f(-1) = -1 + 2 = 1$, dus $(-1, 1)$ ligt op de grafiek van f. Er geldt $g(1) = -2 \cdot 1 + 4 = 2$, dus $(1, 2)$ ligt op de grafiek van g.

4.4 **a** De grafieken van de lineaire functies door de punten (-1, –1) en (3, 2), respectievelijk (0, 2) en (4, 0) zijn getekend in onderstaande figuur.



FIGUUR 4.31 De grafieken van de functies f en g

b We delen het verschil van de y-waarden door het verschil van de x-waarden. Voor de functie f volgt dan:

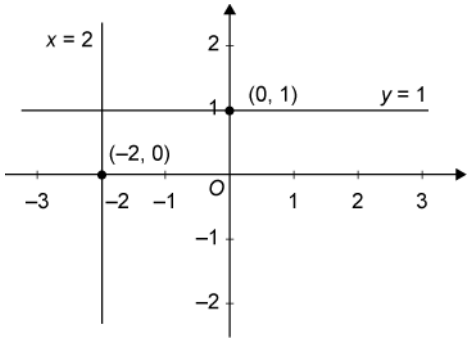
$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-(-1)}{3-(-1)} = \frac{3}{4}$$

En voor de functie g volgt dan:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-(2)}{4-(0)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

c De richtingscoëfficiënt van f is positief, en de grafiek is stijgend; de richtingscoëfficiënt van g is negatief en de grafiek is dalend.
d De grafiek van f snijdt de y-as in $(0, -\frac{1}{4})$, en de grafiek van g snijdt de y-as in $(0, 2)$.
e De functievoorschriften zijn: $f: x \to \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ en $g: x \to -\frac{1}{2}x + 2$

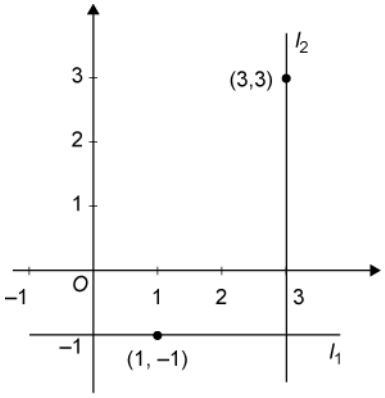
4.5 **a** In onderstaande figuur staat de grafiek van $f: x \to 1$. Dat is een horizontale lijn, want voor iedere ingangswaarde x is de uitgangswaarde gelijk aan 1. Het snijpunt met de y-as heeft coördinaten $(0, 1)$.



FIGUUR 4.32 De grafieken van $y = 1$ en $x = -2$

b In bovenstaande figuur staat de grafiek met de vergelijking $x = -2$. Dat is een verticale lijn, want de waarde van de x-coördinaat is altijd –2 en alle waarden voor de y-coördinaat zijn toegestaan. Het snijpunt met de x-as heeft coördinaten $(-2, 0)$.

4.6 **a** In onderstaande figuur is een horizontale lijn l_1 getekend door (1, -1) en een verticale lijn l_2 door (3, 3).



FIGUUR 4.33 Lijnen door (1, -1) en (3, 3)

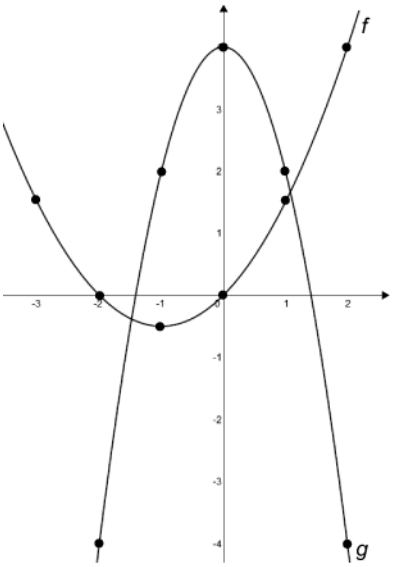
b De vergelijking van de horizontale lijn l_1 is: $y = -1$. De vergelijking van de verticale lijn l_2 is: $x = 3$.
c De y-coördinaat van alle punten op de x-as is gelijk aan 0; de waarde van de x-coördinaat van die punten kan alles zijn. De vergelijking van de punten op de x-as is dus $y = 0$. De x-coördinaat van alle punten op de y-as is gelijk aan 0; de waarde van de y-coördinaat van die punten kan alles zijn. De vergelijking van de punten op de y-as is dus $x = 0$.

4.7 **a** We berekenen enkele punten van de grafieken van de functies $f\colon x \to \frac{1}{2}x^2 + x$ en $g\colon x \to -2x^2 + 4$.

TABEL 4.12

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	$1\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$1\frac{1}{2}$	4	$7\frac{1}{2}$
$g(x)$	–14	–4	2	4	2	–4	–14

De grafieken zijn getekend in onderstaande figuur.



FIGUUR 4.34 De grafieken van de functies f en g

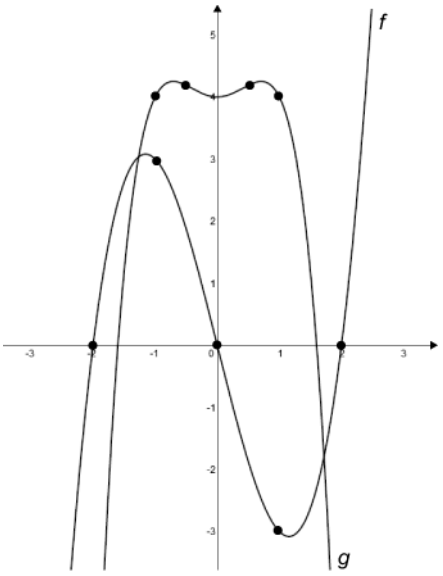
b De top van f heeft coördinaten $(-1, -\frac{1}{2})$. De top van g heeft coördinaten $(0, 4)$.
c De grafiek van f is een dalparabool, die van g is een bergparabool.
d Voor alle waarden van x kunnen we functiewaarden berekenen voor f en g, dus voor beide is het domein $\mathbb{R}$. De functiewaarden van f zijn allemaal $-\frac{1}{2}$ of groter; het bereik is dus $[-\frac{1}{2}, \rightarrow\rangle$. De functiewaarden van g zijn allemaal 4 of kleiner; het bereik is dus $\langle\leftarrow, 4]$.

4.8 **a** We berekenen enkele punten van de grafieken van de functies $f\colon x \to x^3 - 4x$ en $g\colon x \to -x^4 + x^2 + 4$.

TABEL 4.13

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	-15	0	3		0		-3	0	15
$g(x)$	-68	-8	4	$4\frac{3}{16}$	4	$4\frac{3}{16}$	4	-8	-68

De grafieken zijn getekend in onderstaande figuur.



FIGUUR 4.35 De grafieken van de functies f en g

b Voor alle waarden van x kunnen we functiewaarden berekenen voor f en g, dus voor beide is het domein $\mathbb{R}$. De functiewaarden van f worden naar links toe steeds kleiner en naar rechts steeds groter; het bereik is dus $\mathbb{R}$.

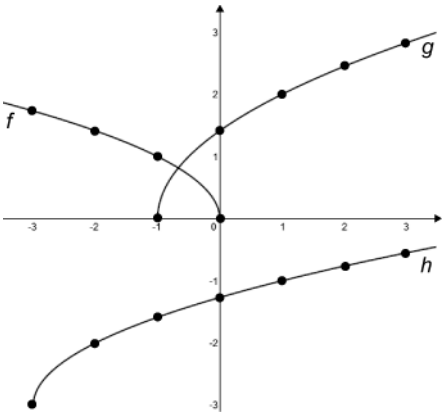
4.9 **a** We berekenen enkele punten van de grafieken van de functies:

$$f(x) = \sqrt{-x}$$
$$g(x) = \sqrt{2x+2}$$
$$h(x) = \sqrt{x+3} - 3$$

TABEL 4.14

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0			
$g(x)$			0	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}$
$h(x)$	–3	–2	$\sqrt{2}-3$	$\sqrt{3}-3$	–1	$\sqrt{5}-3$	$\sqrt{6}-3$

De grafieken zijn getekend in onderstaande figuur.



FIGUUR 4.36 De grafieken van de functies *f*, *g* en *h*

b Het domein van *f* is $\langle \leftarrow, 0]$ en het bereik is $[0, \rightarrow\rangle$; het domein van *g* is $[-1, \rightarrow\rangle$ en het bereik is $[0, \rightarrow\rangle$; en het domein van *h* is $[-3, \rightarrow\rangle$ en het bereik is $[-3, \rightarrow\rangle$.

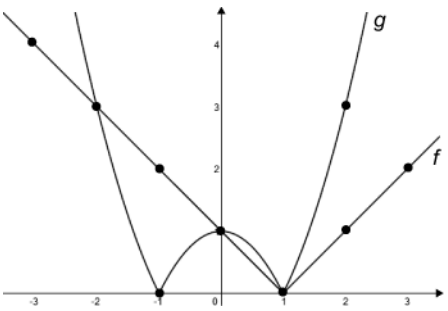
4.10 **a** We berekenen enkele punten van de grafieken van de functies:

$$f(x) = |1 - x|$$
$$g(x) = |1 - x^2|$$

TABEL 4.15

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	4	3	2	1	0	1	2
$g(x)$	8	3	0	1	0	3	8

De grafieken zijn getekend in onderstaande figuur.



FIGUUR 4.37 De grafieken van de functies f en g

b De functiebeschrijvingen worden:

$$f(x) = |1 - x| = \begin{cases} 1 - x & \text{voor} \quad x \le 1 \\ -1 + x & \text{voor} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$g(x) = |1 - x^2| = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{voor} \quad -1 \le x \le 1 \\ -1 + x^2 & \text{voor} \quad x < -1 \quad \text{en} \quad x > 1 \end{cases}$$

c We kunnen voor beide functies de functiewaarden berekenen voor alle waarden, dus het domein is $\mathbb{R}$. De functiewaarden van beide functies zijn altijd groter of gelijk aan 0, dus het bereik is $[0, \rightarrow\rangle$.

4.11 **a** We berekenen enkele punten van de grafiek van de functie $f(x) = 1 / (x - 2)$.

TABEL 4.16

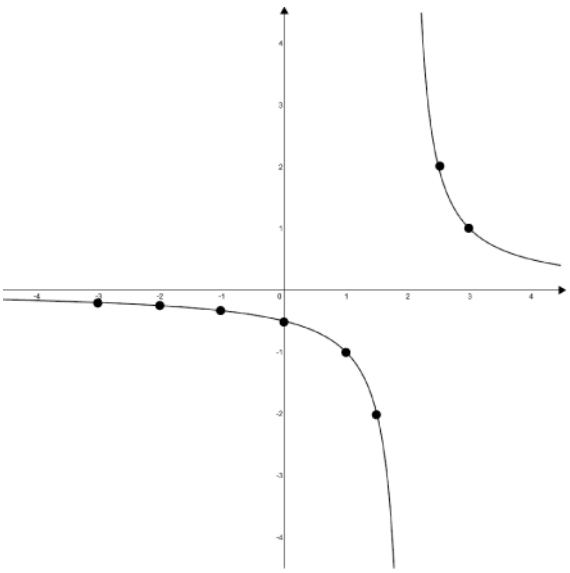
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	–1		1

b We berekenen enkele extra waarden in onderstaande tabel.

TABEL 4.17

x	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$
$f(x)$	–2	–4	4	2

c De grafiek van $f(x) = 1 / (x - 2)$ is getekend in onderstaande figuur.



FIGUUR 4.38 De grafiek van de functie $f(x) = 1 / (x - 2)$

We kunnen geen functiewaarde berekenen voor $x = 2$, dus $x = 2$ hoort niet tot het domein.

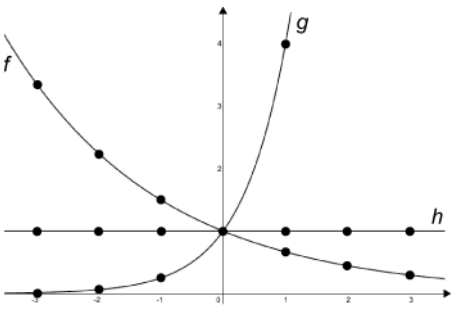
4.12 **a** We berekenen enkele punten van de grafieken van de functies:

$f(x) = (2/3)^x$
$g(x) = 4^x$
$h(x) = 1^x$

TABEL 4.18

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{27}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$
$g(x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16	64
$h(x)$	1	1	1	1	1	1	1

De grafieken zijn getekend in onderstaande figuur.



FIGUUR 4.39 De grafieken van de functies f, g en h

b Voor alle waarden van x zijn de functies gedefinieerd, dus het domein van iedere functie is $\mathbb{R}$. De functies f en g nemen waarden groter dan 0 aan, dus de bereiken van f en g zijn $\langle 0, \rightarrow \rangle$. De functie h is voor iedere x gelijk aan 1, dus het bereik is [1].
c Voor alle functies geldt dat de functiewaarde gelijk is aan 1, als $x = 0$. Dat klopt, want voor alle $a > 0$ geldt dat $a^x = 1$, als $x = 0$.

4.13 Voor de functies f, g en h geldt dat ze alleen zijn gedefinieerd als hun argument groter is dan 0. Hun domeinen zijn dus $\langle 0, \rightarrow \rangle$. De waarden die de functies aannemen lopen van min oneindig tot plus oneindig, dus de bereiken zijn $\mathbb{R}$.

4.14 **a** De functies $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$ zijn gedefinieerd voor iedere waarde voor α, dus de domeinen zijn $\mathbb{R}$. De waarden zijn op zijn minst –1, en maximaal +1, dus het bereik van zowel $\sin\alpha$ als $\cos\alpha$ is [–1, 1].
b De functiewaarden van $\sin\alpha$ zijn gelijk aan 0, als α gelijk is aan 0, π, 2π, …, maar ook voor $-\pi$, -2π, …
c De functiewaarden van $\cos\alpha$ zijn gelijk aan 1, als α gelijk is aan 0, 2π, 4π, …, maar ook voor -2π, -4π, … De functiewaarden van $\cos\alpha$ zijn gelijk aan –1, als α gelijk is aan π, 3π, …, maar ook voor $-\pi$, -3π, …

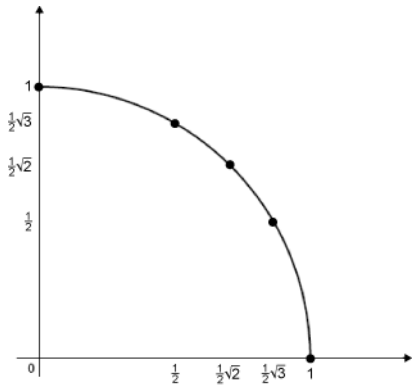
4.15 **a** Voor $\alpha = 0$ is de waarde van $\sin\alpha$ gelijk aan 0.
Voor $\alpha = \pi/2$ is de waarde van $\sin\alpha$ gelijk aan 1.
Voor $\alpha = 0$ is de waarde van $\cos\alpha$ gelijk aan 1.
Voor $\alpha = \pi/2$ is de waarde van $\cos\alpha$ gelijk aan 0.

b We maken eerst een tabelletje met de punten met coördinaten $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ voor $\alpha = 0$, $\pi/6$, $\alpha = \pi/4$, $\alpha = \pi/3$ en $\alpha = \pi/2$.

TABEL 4.19

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$(\cos\alpha, \sin\alpha)$
0	1	0	(1, 0)
$\pi/6$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$
$\pi/4$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$
$\pi/3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$
$\pi/2$	0	1	(0, 1)

Vervolgens tekenen we de punten in een assenstelsel, zie onderstaande figuur.



FIGUUR 4.40 Punten op een cirkelboog

c Als we voor alle waarden van α tussen 0 en $\pi/2$, de punten berekenen en tekenen in de grafiek, dan krijgen we de cirkelboog, zoals aangegeven in figuur 4.40.

4.16 **a** Er geldt: $\cos(5\pi/6) = \cos(\pi - \pi/6) = -\cos(\pi/6) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.
b Er geldt: $\cos(3\pi/4) = \cos(\pi - \pi/4) = -\cos(\pi/4) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
c Er geldt: $\cos(7\pi/4) = \cos(2\pi - \pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

4.17 **a** De functie $\tan\alpha$ is niet gedefinieerd voor $\alpha = \pi/2$, $\alpha = 3\pi/2$, $\alpha = 5\pi/2$, ..., $\alpha = -\pi/2$, $\alpha = -3\pi/2$, … Voor alle andere waarden is de tangens gedefinieerd. Het domein is dus de gehele verzameling $\mathbb{R}$, minus $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$, ..., $-\pi/2$, $-3\pi/2$, … Het bereik is $\mathbb{R}$.
b De functie $\tan\alpha$ is gelijk aan 0 voor $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$, $\alpha = 2\pi$, ..., $\alpha = -\pi$, $\alpha = -2\pi$, …
c De functie $\tan\alpha$ is gelijk aan 1 voor $\alpha = \pi/4$.

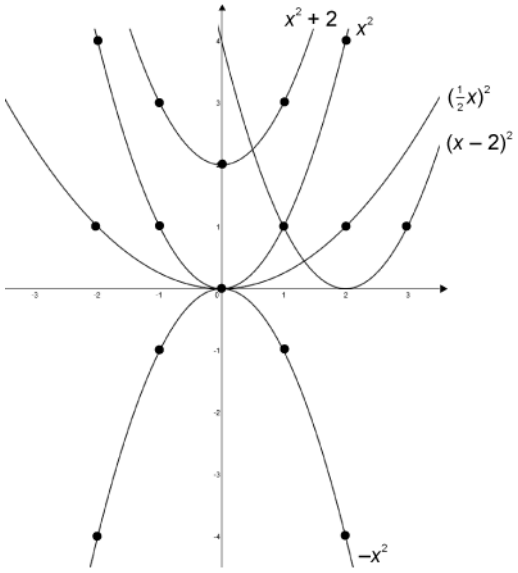
4.18 **a** Er geldt: $\tan(-\pi/4) = -\tan(\pi/4) = -1$.
b Er geldt: $\tan(4\pi/3) = \tan(\pi/3) = \sqrt{3}$.

4.19 **a** We berekenen enkele punten van de grafiek x^2.

TABEL 4.20

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9

De grafiek is getekend in onderstaande figuur (hierin zijn ook al de grafieken van onderdeel c getekend).



FIGUUR 4.41 De grafiek van de functies x^2

b Het domein van x^2 is $\mathbb{R}$. Het bereik is $[0, \rightarrow\rangle$.

c In figuur 4.41 tekenen we ook de grafieken van:
$x^2 + 2$, door de grafiek van x^2 overal 2 te omhoog te schuiven
$(\frac{1}{2}x)^2$, door de grafiek van x^2 in horizontale richting met een factor twee uit te rekken $-x^2$, door de grafiek van x^2 in de x-as te spiegelen
$(x-2)^2$, door de grafiek van x^2 precies 2 naar rechts op te schuiven.

d Het domein van alle functies is $\mathbb{R}$. Het bereik is $[2, \rightarrow\rangle$ voor de functie $x^2 + 2$, het bereik is $[0, \rightarrow\rangle$ voor de functies $(\frac{1}{2}x)^2$ en $(x-2)^2$. Het bereik is $\langle\leftarrow, 0]$ voor de functie , $-x^2$.

4.20 **a** De grafiek van $2\sin(2x + 1) + 1$ kan verkregen worden uit $\sin x$, door deze in verticale richting met een factor 2 uit te rekken, vervolgens in horizontale richting met een factor 2 in te krimpen, dan 1 naar links te schuiven, en dan nog 1 naar boven.

4.21 **a** De grafiek is met een factor 10 in horizontale richting ingekrompen, dus in [0, 2π] worden 10 perioden doorlopen.
b De grafiek moet met minimaal de waarde van de amplitude omhoog of omlaag geschoven worden, willen er geen snijpunten met de x-as zijn. Er moet dus gelden dat $|d| > |a|$. Let op, we nemen hier ook de negatieve waarden van a mee; voor die waarden wordt de grafiek horizontaal gespiegeld.

4.22 **a** De grafiek van $\tan x$ is oneven, want $\tan x = -\tan(-x)$.
b De grafiek van x^2 is even, want $x^2 = (-x)^2$.
c De grafiek van x^3 is oneven, want $x^3 = -(-x)^3$.
d De grafiek van x is oneven, want $x = -(-x)$.

4.23 **a** We berekenen: $f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1$.
En: $g(f(x)) = g((2x + 1)) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$.
b Nu volgt:

$$h(g(f(x))) = h(g(2x+1)) = h((2x+1)^2) = \frac{1}{(2x+1)^2+1} = \frac{1}{4x^2+4x+2}$$

4.24 **a** $f(3) = 4$. $g(4) = 3$.
b $f(g(x)) = f(\frac{1}{2}x + 1) = 2 \cdot (\frac{1}{2}x + 1) - 1 = x$
$g(f(x)) = g(2x - 2) = \frac{1}{2} \cdot (2x - 2) + 1 = x$
De twee functies na elkaar toegepast leveren de identiteit op, en zijn dus elkaars inversen.

4.25 **a** $f(3) = 1/3$. $g(1/3) = 1 / (1/3) = 3$
b $g(f(x)) = g(1/x) = 1 / (1/x) = x$
De functie $1/x$ twee keer toegepast levert de identiteit op. De functie is dus zijn eigen inverse.

2 Antwoorden op de zelftoets

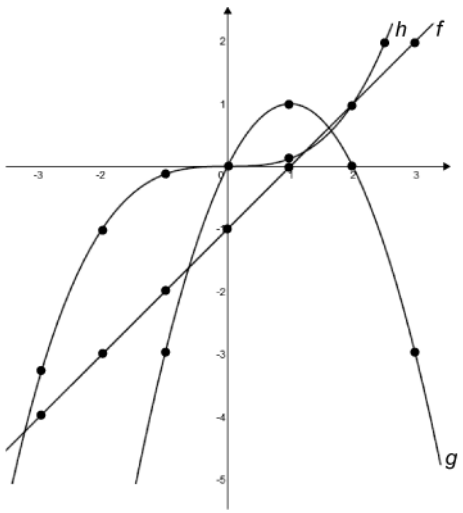
1 **a** We berekenen enkele punten van de grafieken van de functies:

$$f(x) = x - 1$$
$$g(x) = -x^2 + 2x$$
$$h(x) = \tfrac{1}{8}x^3$$

TABEL 4.21

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	–4	–3	–2	–1	0	1	2
$g(x)$	–15	–8	–3	0	1	0	–3
$h(x)$	$-\frac{27}{8}$	–1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$

De grafieken zijn getekend in onderstaande figuur.



FIGUUR 4.42 De grafieken van de functies f, g en h

b De drie functies zijn gedefinieerd voor alle waarden van x, dus de domeinen zijn $\mathbb{R}$. De functies f en h nemen alle waarden aan, dus de bereiken van f en h zijn eveneens $\mathbb{R}$. De functiewaarden van g zijn 1 of kleiner, dus het bereik van g is $\langle\leftarrow, 1]$.

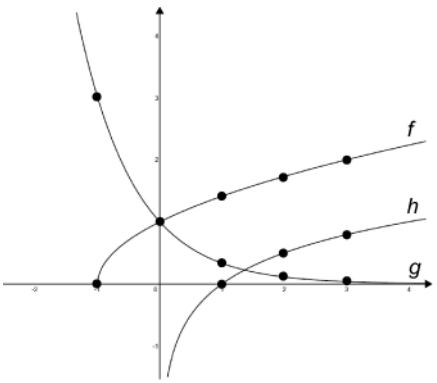
2 **a** We berekenen enkele punten van de grafieken van de functies:

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$
$$g(x) = (\tfrac{1}{3})^x$$
$$h(x) = {}^4\log x$$

TABEL 4.22

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$			0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
$g(x)$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$
$h(x)$					0	0,5	0,79

De grafieken zijn getekend in onderstaande figuur.



FIGUUR 4.43 De grafieken van de functies f, g en h

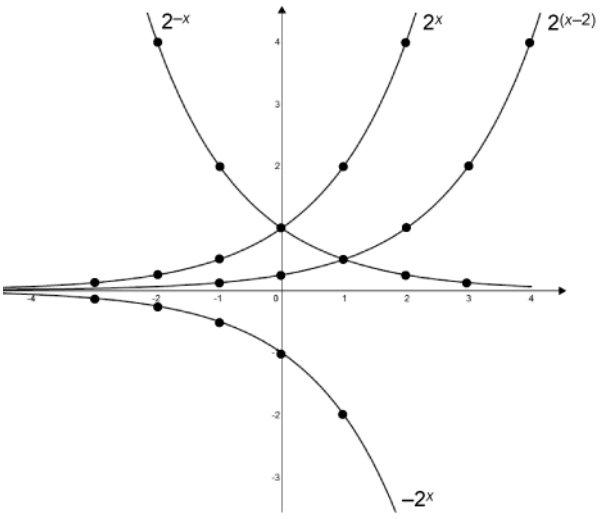
b De functie g is gedefinieerd voor alle waarden van x, dus het domein van g is $\mathbb{R}$. De functie f is gedefinieerd voor $x \geq -1$, dus het domein van f is $[-1, \rightarrow\rangle$. De functie h is gedefinieerd voor $x > 0$, dus het domein van h is $\langle 0, \rightarrow\rangle$. Het bereik van f is $[0, \rightarrow\rangle$. Het bereik van g is $\langle 0, \rightarrow\rangle$. Het bereik van h is $\mathbb{R}$.

3 **a** We berekenen enkele punten van de grafiek van de functie 2^x.

TABEL 4.23

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

De grafiek is getekend in onderstaande figuur (hierin staan ook de grafieken uit onderdeel b).



FIGUUR 4.44 De grafieken van de functies f, g en h

b Vanuit de grafiek van $f(x) = 2^x$ krijgen we de grafiek van
-2^x door te spiegelen in de x-as
2^{-x} door te spiegelen in de y-as
$2^{(x-2)}$ door de grafiek van 2^x over een afstand 2 naar rechts te schuiven.

4 $g(f(x)) = g(2^x) = 1/2^x$
$f(g(x)) = f(1/x) = 2^{1/x}$

5 We berekenen $g(f(x))$ en $f(g(x))$.

$$g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{\frac{1}{x-1}+1}{\frac{1}{x-1}} = \frac{\frac{1}{x-1}+\frac{x-1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{\frac{1+x-1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{x}{1} = x$$

$$f(g(x)) = f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{x+1}{x}-1} = \frac{1}{\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x}} = \frac{1}{\frac{x+1-x}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

In beide gevallen volgt de identiteit, dus f en g zijn elkaars inversen.

cc BY NC ND

1 Uitwerking van de opgaven

5.1 Invullen van $-\frac{9}{16}$ voor x in de vergelijking $\frac{3}{2}x+1=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}$ geeft:

$$\frac{3}{2}\cdot-\frac{9}{16}+1=-\frac{1}{2}\cdot-\frac{9}{16}-\frac{1}{8}$$
$$-\frac{27}{32}+\frac{32}{32}=\frac{9}{32}-\frac{4}{32}$$
$$\frac{5}{32}=\frac{5}{32}$$

Linker- en rechterlid zijn gelijk, dus $x = -\frac{9}{16}$ is een oplossing van deze vergelijking.

5.2 $\frac{3}{2}x+1=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}$
$12x + 8 = -4x - 1$
$12x + 4x = -1 - 8$
$16x = -9$
$x = -\frac{9}{16}$

5.3 **a** $2x = 12$; delen door 2 geeft direct: $x = 6$

b $4x + 6 = -1$
$4x = -1 - 6 = -7$
$x = -\frac{7}{4}$

c $3x - 6 = 2x - 8$
$3x - 2x = 6 - 8$
$x = -2$

d $x + 6 = -x - 1$
$x + x = -6 - 1$
$2x = -7$
$x = -\frac{7}{2}$

e $10x = 8 + 2x$
$8x = 8$
$x = 1$

f $-7x - 1 = 2x + 8$
$-9x = 9$
$x = -1$

g $x - 1 = 2x - 8$
$x - 2x = -8 + 1$
$-x = -7$
$x = 7$

h $4x + 4 = 0$
$4x = -4$
$x = -1$

5.4 **a** $2x - 6 = x - 3$
$2x - x = 6 - 3$
$x = 3$
Met $x = 3$ volgt $y = 0$.
Het snijpunt is dus (3, 0).

b $-2x + 9 = x$
$-3x = -9$
$x = \frac{-9}{-3} = 3$
Met $x = 3$ volgt $y = 3$.
Het snijpunt is dus (3, 3).

c $x + 1 = -x + 2$
$2x = 1$
$x = \frac{1}{2}$
Met $x = \frac{1}{2}$ volgt $y = (\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$.
Het snijpunt is dus $(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$.

5.5 **a** We berekenen $\Delta y/\Delta x$ met de punten (1, –1) en (3, 3):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-(-1)}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

De richtingscoëfficiënt is dus 2, en de vergelijking van de lijn is $y = 2x + b$. Omdat (1, –1) een punt op de lijn is, volgt met $x = 1$ en $y = -1$: $-1 = 2 \cdot 1 + b$. Hieruit volgt dat $b = -1 - 2 = -3$. Het functievoorschrift is dus $x \to 2x - 3$.

b We berekenen $\Delta y/\Delta x$ met de punten (0, 4) en (4, 2):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-4}{4-0} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

De richtingscoëfficiënt is dus $-\frac{1}{2}$, en de vergelijking van de lijn is $y = -\frac{1}{2}x + b$. Omdat (0, 4) een punt op de lijn is, volgt met $x = 0$ en $y = 4$: $4 = -\frac{1}{2} \cdot 0 + b$. Hieruit volgt dat $b = 4$. Het functievoorschrift is dus $x \to -\frac{1}{2}x + 4$.

c We berekenen $\Delta y/\Delta x$ met de punten (–1, –1) en (5, 2):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-(-1)}{5-(-1)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

De richtingscoëfficiënt is dus $\frac{1}{2}$, en de vergelijking van de lijn is $y = \frac{1}{2}x + b$. Omdat (–1, –1) een punt op de lijn is, volgt met $x = -1$ en $y = -1$: $-1 = \frac{1}{2} \cdot -1 + b$. Hieruit volgt dat $b = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. Het functievoorschrift is dus $x \to \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

d We berekenen $\Delta y/\Delta x$ met de punten (–2, –1) en (3, –1):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-(-1)}{3-(-2)} = \frac{0}{5} = 0$$

De richtingscoëfficiënt is dus 0, en de vergelijking van de lijn is $y = 0 \cdot x + b$ ofwel $y = b$. Omdat (–2, –1) een punt op de lijn is, volgt $b = -1$. Het functievoorschrift is dus $x \to -1$. We hebben hier te maken met een horizontale lijn.

5.6 **a** De lijn door de punten (1, 3) en (3, 3) is een horizontale lijn want beide y-coördinaten zijn 3. De vergelijking is $y = 3$.
b De lijn door de punten (1, 4) en (1, 2) is een verticale lijn want beide x-coördinaten zijn 1. De vergelijking is $x = 1$.
c De lijn door de punten (–1, –2) en (5, –2) is een horizontale lijn want beide y-coördinaten zijn –2. De vergelijking is $y = -2$.
d De lijn door de punten (–2, –1) en (–2, 6) is een verticale lijn want beide x-coördinaten zijn –2. De vergelijking is $x = -2$.

5.7 **a** De richtingscoëfficiënten zijn gelijk, beide 2, maar de vergelijking $2x + 1 = 2x + 4$ heeft geen oplossingen, dus er is geen snijpunt.
b De vergelijkingen van de lijnen zijn gelijk, dus vallen de lijnen samen en hebben ze oneindig veel punten gemeen.
c De richtingscoëfficiënten zijn verschillend en de richting van de lijnen zal dus ook verschillend zijn, en bijgevolg moet er één snijpunt zijn. De coördinaten daarvan zijn $(\frac{6}{5}, 5\frac{4}{5})$.

5.8 **a** $x^2 - 4 = 0$
$x^2 = 4$
$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

b $x^2 = 36$
$x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$

c $x^2 - 25 = 0$
$x^2 = 25$
$x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

d $x^2 = 0$
De enige oplossing is hier $x = 0$.

e $x^2 - 1 = 0$
$x^2 = 1$
$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

f $x^2 + 1 = 0$
$x^2 = -1$
Deze vergelijking heeft geen oplossing want er is geen waarde voor x zodat het kwadraat gelijk is aan –1.

5.9 **a** $x^2 - 4x = 0$
$x \cdot (x - 4) = 0$
$x = 0$ of $x = 4$

b $x^2 = 2x$
$x^2 - 2x = 0$
$x \cdot (x - 2) = 0$
$x = 0$ of $x = 2$

c $x^2 - 25x = 0$
$x \cdot (x - 25) = 0$
$x = 0$ of $x = 25$

d $3x = -x^2$
$x^2 + 3x = 0$
$x \cdot (x + 3) = 0$
$x = 0$ of $x = -3$

5.10 **a** $x^2 - 3x - 4 = 0$
$(x + 1)(x - 4) = 0$
$x = -1$ of $x = 4$

b $x^2 + 6x + 5 = 0$
$(x + 1)(x + 5) = 0$
$x = -1$ of $x = -5$

c $x^2 + 5x + 6 = 0$
$(x + 2)(x + 3) = 0$
$x = -2$ of $x = -3$

d $x^2 + 3x - 4 = 0$
$(x + 4)(x - 1) = 0$
$x = -4$ of $x = 1$

e $x^2 = 2x + 8$
$x^2 - 2x - 8 = 0$
$(x + 2)(x - 4) = 0$
$x = -2$ of $x = 4$

f $x^2 - x = 20$
$x^2 - x - 20 = 0$
$(x + 4)(x - 5) = 0$
$x = -4$ of $x = 5$

5.11 **a** $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}$

$x_1 = \frac{-5 - 3}{4} = \frac{-8}{4} = -2$

$x_2 = \frac{-5 + 3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

b $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 1}{4}$

$x_1 = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{-3-1}{4} = -1$

c $x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

d $x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$

$x_1 = \frac{3+\sqrt{33}}{2}$

$x_2 = \frac{3-\sqrt{33}}{2}$

5.12 **a** We moeten nu oplossen: $x^2 - 2x = 2x - 4$. We herschrijven dit tot: $x^2 - 4x + 4 = 0$. Ontbinden geeft $(x - 2)^2 = 0$, dus de oplossing is $x = 2$. Er is één snijpunt met $x = 2$ en $y = 0$. Het snijpunt is dus (2, 0).
b We moeten nu oplossen: $x^2 + 3x + 2 = -2x - 4$. We herschrijven dit tot: $x^2 + 5x + 6 = 0$. Ontbinden geeft $(x + 2)(x + 3) = 0$, dus de oplossing is $x = -2$ of $x = -3$. Er zijn twee snijpunten met $x = -2$, $y = 0$ en $x = -3$, $y = 2$. De snijpunten zijn dus (–2, 0) en (–3, 2).

5.13 **a** We berekenen de discriminant: $b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 - 16 = -7$. De discriminant is negatief, dus zijn er geen oplossingen en geen snijpunten met de x-as.
b We berekenen de discriminant: $b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 16 + 4 = 20$. De discriminant is positief, dus zijn er twee oplossingen en twee snijpunten met de x-as.
c We berekenen weer: $b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$. De discriminant is 0, dus er is één oplossing en één snijpunt met de x-as.

5.14 **a** $x^4 + x^3 - 6x^2 = 0$
$x^2(x^2 + x - 6) = 0$
$x^2(x + 3)(x - 2) = 0$
$x = 0$ of $x = -3$ of $x = 2$

b $2x^3 - 8x^2 - 10x = 0$
$2x(x^2 - 4x - 5) = 0$
$2x(x + 1)(x - 5) = 0$
$x = 0$ of $x = -1$ of $x = 5$

cc BY NC ND

c $x^8 - 1 = 0$
$(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0$
$(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$
$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$
$x = 1$ of $x = -1$
NB De factoren met x^2 en x^4 leveren geen oplossingen.

d $16x^4 - 625 = 0$
$(2x)^4 - 5^4 = 0$
$((2x)^2 - 5^2)((2x)^2 + 5^2) = 0$
$(2x - 5)(2x + 5)(4x^2 + 25) = 0$
$x = \frac{5}{2}$ of $x = -\frac{5}{2}$

5.15 **a** $\frac{x-1}{x} = \frac{x+2}{x+1}$
$(x-1)(x+1) = x(x+2)$
$x^2 - 1 = x^2 + 2x$
$-1 = 2x$
$x = -\frac{1}{2}$

b $\frac{x^2+15}{x-1} = 2x$
$x^2 + 15 = 2x(x-1)$
$x^2 + 15 = 2x^2 - 2x$
$-x^2 + 2x + 15 = 0$
$x^2 - 2x - 15 = 0$
$(x-5)(x+3) = 0$
$x = 5 \quad \text{of} \quad x = -3$

c $\frac{x+3}{x^2+2} = \frac{1}{x}$
$(x+3)x = x^2 + 2$
$x^2 + 3x = x^2 + 2$
$3x = 2$
$x = \frac{2}{3}$

d $\frac{x+1}{x+2} = \frac{x-3}{2x}$
$(x+1) \cdot 2x = (x+2)(x-3)$
$2x^2 + 2x = x^2 - x - 6$
$x^2 + 3x + 6 = 0$

De discriminant is nu $3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -15$. Deze is kleiner dan 0, dus er is geen oplossing van deze vergelijking.

5.16 **a** $\sqrt{x} = \sqrt{x^2 - 4x}$

$x = x^2 - 4x$

$x^2 - 5x = 0$

$x(x-5) = 0$

$x = 0 \quad \text{of} \quad x = 5$

b $\sqrt{x^2 - 4x} = \sqrt{5}$

$x^2 - 4x = 5$

$x^2 - 4x - 5 = 0$

$(x-5)(x+1) = 0$

$x = 5 \quad \text{of} \quad x = -1$

c $\sqrt{8x - 4} = 2x$

$8x - 4 = 4x^2$

$4x^2 - 8x + 4 = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-1)^2 = 0$

$x = 1$

d $\sqrt{2x - 7} = \sqrt{1 - x^2}$

$2x - 7 = 1 - x^2$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x+4)(x-2) = 0$

$x = -4 \quad \text{of} \quad x = 2$

Deze oplossingen voldoen echter niet, want dan zouden onder de wortels negatieve waarden komen te staan.

e $\sqrt{x} = 2 - \sqrt{x-1}$

$x = 4 - 4\sqrt{x-1} + (x-1)$

$x = 4 - 4\sqrt{x-1} + x - 1$

$0 = 3 - 4\sqrt{x-1}$

$3 = 4\sqrt{x-1}$

$9 = 16(x-1)$

$9 = 16x - 16$

$25 = 16x$

$x = \frac{25}{16}$

f $x+1=\sqrt{-3x-3}$

$(x+1)^2=-3x-3$

$x^2+2x+1=-3x-3$

$x^2+5x+4=0$

$(x+1)(x+4)=0$

$x=-1 \quad \text{of} \quad x=-4$

Door invullen in de oorspronkelijke vergelijking blijkt $x = -4$ niet te voldoen. Deze oplossing vervalt dus.

5.17 **a** $3^{4x}=9^{x^2+1}$

$3^{4x}=3^{2x^2+2}$

$4x=2x^2+2$

$2x=x^2+1$

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$

b $7^{2x-5}=\frac{1}{49}$

$7^{2x-5}=7^{-2}$

$2x-5=-2$

$2x=3$

$x=\frac{3}{2}$

c $25^x=5^{x-1}$

$5^{2x}=5^{x-1}$

$2x=x-1$

$x=-1$

d ${}^{10}\log(x-1)=2$

$x-1=10^2$

$x=100+1=101$

e ${}^{2}\log(x^2+2x)={}^{2}\log 3$

$x^2+2x=3$

$x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$x=-3 \quad \text{of} \quad x=1$

f ${}^{5}\log(x-1)={}^{5}\log(2x+1)$

$x-1=2x+1$

$-x=2$

$x=-2$

Deze oplossing voldoet niet, want de logaritme is niet gedefinieerd voor negatieve waarden.

5.18 **a** $\sin(2x) = 1$
$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$
$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

c $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ of $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

d $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ of $2x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$x = \frac{3\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ of $x = \frac{5\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

e $2 + \sin(3x) = 1$
$\sin(3x) = -1$
$3x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$x = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

5.19 **a** $2x < 6$
$x < 3$

b $x^2 + 3x \geq 0$
De bijbehorende vergelijking is $x^2 + 3x = 0$. Het linkerlid is 0 voor $x = 0$, of $x = -3$. Uit een schets van de grafiek blijkt dat aan de ongelijkheid is voldaan voor $x \geq 0$ of $x \leq -3$.

c $x^2 - x \leq x + 3$
De bijbehorende vergelijking is $x^2 - x = x + 3$, ofwel $x^2 - 2x - 3 = 0$. Het linkerlid is 0 voor $x = 3$, of $x = -1$. Uit een schets van de grafieken blijkt dat aan de ongelijkheid is voldaan voor $-1 \leq x \leq 3$.

d $x^2 + 5x > x + 5$
De bijbehorende vergelijking is $x^2 + 5x = x + 5$, ofwel $x^2 + 4x - 5 = 0$. Het linkerlid is 0 voor $x = 1$, of $x = -5$. Uit een schets van de grafieken blijkt dat aan de ongelijkheid is voldaan voor $x > 1$ of $x < -5$.

e $\sin(2x) > 0$
$\sin x > 0$ voor $0 + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, dus:
$\sin(2x) > 0$ voor $0 + 2k\pi < 2x < \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, ofwel:
$\sin(2x) > 0$ voor $k\pi < x < \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

5.20 We moeten nu oplossen:

$$\frac{1-2^{-x}}{1+2^{-x}} = 0{,}9$$
$$1-2^{-x} = 0{,}9(1+2^{-x})$$
$$(-1-0{,}9)\cdot 2^{-x} = -0{,}1$$
$$2^{-x} = \tfrac{-0{,}1}{-1{,}9} = \tfrac{1}{19}$$
$${}^{2}\log(\cdot 2^{-x}) = {}^{2}\log(\tfrac{1}{19})$$
$$-x = -{}^{2}\log 19$$
$$x = {}^{2}\log 19 = 4{,}25$$

5.21 We moeten nu oplossen:

$$l(n) = 500$$
$$256\cdot(\sqrt[5]{2})^{n-2014} = 500$$
$$(\sqrt[5]{2})^{n-2014} = \tfrac{500}{256}$$
$${}^{10}\log((\sqrt[5]{2})^{n-2014}) = {}^{10}\log(\tfrac{500}{256})$$
$$(n-2014)\cdot {}^{10}\log(\sqrt[5]{2}) = {}^{10}\log(\tfrac{500}{256})$$
$$n-2014 = \frac{{}^{10}\log(\frac{500}{256})}{{}^{10}\log(\sqrt[5]{2})}$$
$$n = 2014 + \frac{{}^{10}\log(\frac{500}{256})}{{}^{10}\log(\sqrt[5]{2})} \approx 2019$$

5.22 Er moet gelden:

$$18{,}5 < \text{BMI}$$
$$18{,}5 < \frac{g}{l^2}$$
$$18{,}5\cdot l^2 < g$$
$$18{,}5\cdot (1{,}70)^2 < g$$
$$53{,}5 < g$$

Iemand van 1,70 meter lengte moet dus minimaal 53,5 kg zijn, om niet te licht te zijn.

2 Uitwerking van de zelftoets

1 **a** We moeten een oplossing zoeken voor de vergelijking $x - 2 = -\frac{1}{2}x + 2$.
$1\frac{1}{2}x = 4$, ofwel $x = \frac{8}{3}$. Dan is $y = \frac{2}{3}$. Het snijpunt is $(\frac{8}{3}, \frac{2}{3})$.
b De grafiek van f snijdt de x-as als $x - 2 = 0$, ofwel $x = 2$. Het snijpunt van de grafiek van f met de x-as is dus $(2, 0)$. De grafiek van f snijdt de y-as als $x = 0$. Dan is de functiewaarde -2, dus het snijpunt met de y-as is $(0, -2)$.
c Er geldt $g(7) = -\frac{1}{2} \cdot 7 + 2 = -1\frac{1}{2}$. Dit is ongelijk aan -1, dus het punt $(7, -1)$ ligt niet op de grafiek van g.

2 We berekenen eerst de richtingscoëfficiënt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-3}{4-(-2)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

De richtingscoëfficiënt is dus $-\frac{1}{3}$, en de vergelijking van de lijn is $y = -\frac{1}{3} \cdot x + b$. Omdat $(-2, 3)$ een punt op de lijn is, volgt met $x = -2$ en $y = 3$ dat $3 = -\frac{1}{3} \cdot -2 + b$. Hieruit volgt dat $b = \frac{7}{3}$. Het functievoorschrift is dus $x \to -\frac{1}{3} \cdot x + \frac{7}{3}$.

3 De vergelijking van de horizontale lijn door het punt $(1, 2)$ is $y = 2$; de vergelijking van de verticale lijn door dat punt is $x = 1$.

4 **a** $x^2 - 100 = 0$
$(x - 10)(x + 10) = 0$
$x = 10$ of $x = -10$

b $x^2 - 3x + 2 = 0$
$(x - 1)(x - 2) = 0$
$x = 1$ of $x = 2$

c Om de vergelijking $x^2 - 5x + 1 = 0$ op te lossen passen we de *abc*-formule toe:

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$
$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$$
$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$$

cc BY NC ND

5 **a** $\dfrac{x+1}{x-3} = \dfrac{x}{x-1}$

$(x+1)(x-1) = x(x-3)$

$x^2 - 1 = x^2 - 3x$

$1 = 3x$

$x = \frac{1}{3}$

b $\sqrt{6+x} = \sqrt{x^2 - 4x}$

$6 + x = x^2 - 4x$

$x^2 - 5x - 6 = 0$

$(x-6)(x+1) = 0$

$x = 6 \quad \text{of} \quad x = -1$

c $27^x = 3^{x^2+2}$

$3^{3x} = 3^{x^2+2}$

$3x = x^2 + 2$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-1)(x-2) = 0$

$x = 1 \quad \text{of} \quad x = 2$

d ${}^7\log(x^2 - 15) = 2$

$x^2 - 15 = 7^2 = 49$

$x^2 = 64$

$x = 8 \quad \text{of} \quad x = -8$

e $\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ of $x = 5\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

6 **a** $x^2 + 3x \leq x$

De bijbehorende vergelijking is $x^2 + 3x = x$, ofwel $x^2 + 2x = 0$. Het linkerlid is 0 voor $x = 0$, of $x = -2$. Uit een schets van de grafieken blijkt dat aan de ongelijkheid is voldaan voor $-2 \leq x \leq 0$.

b $x^2 > 4x + 5$

De bijbehorende vergelijking is $x^2 = 4x + 5$, ofwel $x^2 - 4x - 5 = 0$, ofwel $(x - 5)(x + 1) = 0$. Het linkerlid is 0 voor $x = 5$, of $x = -1$. Uit een schets van de grafieken blijkt dat aan de ongelijkheid is voldaan voor $x < -1$ of $5 < x$.

c $\sin x \leq 0$

Er geldt dat $\sin x = 0$ voor $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ en $\sin x \leq 0$ voor $\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

1 Uitwerking van de opgaven

6.1 Dit differentiequotiënt is gelijk aan

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{b^2-a^2}{b-a}=\frac{(b-a)(b+a)}{b-a}=b+a \text{ (mits } b\neq a)$$

Dit quotiënt nadert naar $2a$ als b naar a nadert.

6.2 **a** Het differentiequotiënt over het interval $[3, b]$ is gelijk aan

$$\frac{f(b)-f(3)}{b-3}=\frac{-4-(-4)}{b-3}=0$$

Dit quotiënt hangt niet af van b, de afgeleide in $x = 3$ is dus $f'(3) = 0$.

b Het differentiequotiënt over het interval $[3, b]$ is gelijk aan

$$\frac{f(b)-f(3)}{b-3}=\frac{2b-(2\cdot 3)}{b-3}=\frac{2(b-3)}{b-3}=2 \text{ mits } b\neq 3$$

Dit quotiënt hangt niet af van b, de afgeleide in $x = 3$ is dus $f'(3) = 2$.

c Het differentiequotiënt over het interval $[3, b]$ is gelijk aan

$$\frac{f(b)-f(3)}{b-3}=\frac{(-4b+2)-(-4\cdot 3+2)}{b-3}=\frac{-4(b-3)}{b-3}=-4 \text{ mits } b\neq 3$$

Dit quotiënt hangt niet af van b, de afgeleide in $x = 3$ is dus $f'(3) = -4$.

6.3 **a** Het differentiequotiënt over het interval $[1, b]$ is gelijk aan

$$\frac{f(b)-f(1)}{b-1}=\frac{\frac{1}{b}-1}{b-1}=\frac{\frac{1-b}{b}}{b-1}=-\frac{1}{b} \text{ mits } b\neq 1$$

Dit quotiënt nadert naar -1 als b naar 1 gaat.

b Het differentiequotiënt over het interval $[a, b]$ is gelijk aan

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{b-a}=\frac{\frac{a-b}{ab}}{b-a}=-\frac{1}{ab} \text{ mits } b\neq a$$

Dit quotiënt nadert naar $-\frac{1}{a^2}$ als b naar a gaat.

cc BY NC ND

6.4 Het differentiequotiënt voor f over een interval $[a, b]$ is gelijk aan:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{c-c}{b-a}=\frac{0}{b-a}=0$$

Uit deze berekening volgt dat de constante functie $f(x) = c$ als afgeleide de functie $f'(x) = 0$ heeft.

6.5 De functie f is een lineaire functie waarvan de afgeleide gelijk is aan $f'(x) = 4$. De afgeleide is een constante functie dus $f'(2) = 4$, $f'(5) = 4$ $f'(–3) = 4$.

6.6 **a** $f'(x) = –2$
b $f'(x) = \sqrt{2}$
c $f'(x) = 1$
d $f'(x) = 0$
e $f'(x) = –1$

6.7 **a** $f'(x) = 3$ en $g'(x) = 2$, dus $(f' + g')(x) = 5$
$(f + g)(x) = 5x + 8$ dus $(f + g)'(x) = 5$
We zien dat $f' + g' = (f + g)'$

b $f'(x) = 3$ en $g'(x) = 2$, dus $(f' – g')(x) = 1$
$(f – g)(x) = x – 4$ dus $(f – g)'(x) = 1$
We zien dat $f' – g' = (f – g)'$

c Vermenigvuldig f met een constante c:
$(cf)(x) = 3cx + 2c$ dus $(cf)'(x) = 3c$.
We zien dat $(cf)' = cf'$

6.8 **a** Gebruik de verschilregel en bedenk dat $\frac{x}{2} = \frac{1}{2}x$:

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}$

b Gebruik de somregel en het vermenigvuldigen met een constante
$f'(x) = 3 \cdot 2x – 2 = 6x – 2$

c Schrijf het product eerst uit (in de volgende paragraaf leert u hoe u zonder uitschrijven de afgeleide van een product kunt berekenen):

$f(x) = (x – 3)(1 - \frac{1}{x}) = x – 1 – 3 + \frac{3}{x} = x – 4 + \frac{3}{x}$
$f'(x) = 1 - \frac{3}{x^2}$

6.9 **a** $f'(x) = –2x – 3$ dus $f'(3) = –2 \cdot 3 – 3 = –9$

b $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$ dus $f(3) = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$

6.10 **a** $f'(x) = (1 - x^2)'(3x + 6) + (1 - x^2)(3x + 6)' = -2x \cdot (3x + 6) + (1 - x^2) \cdot 3$
$= -9x^2 - 12x + 3$

b $f'(x) = (7x^2)' \cdot (\frac{1}{x} - 2x + 4) + 7x^2 \cdot (\frac{1}{x} - 2x + 4)'$
$= 14x \cdot (\frac{1}{x} - 2x + 4) + 7x^2 \cdot (-\frac{1}{x^2} - 2) = -42x^2 + 56x + 7$

c $f'(x) = (2x + 2x^2)'(-x + 5x^2) + (2x + 2x^2)(-x + 5x^2)'$
$= (2 + 4x)(-x + 5x^2) + (2x + 2x^2)(-1 + 10x) = 40x^3 + 24x^2 - 4x$

d $f'(x) = ((1 + x)(1 + 2x))'(1 + 3x) + (1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x)'$
$= ((1 + x)'(1 + 2x) + (1 + x)(1 + 2x)')\ (1 + 3x) + (1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x)'$
$= ((1 + 2x) + 2(1 + x))\ (1 + 3x) + 3(1 + x)(1 + 2x)$
$= (1 + 2x)(1 + 3x) + 2(1 + x)(1 + 3x) + 3(1 + x)(1 + 2x)$
$= 18x^2 + 22x + 6$

6.11 **a** $(x^3)' = (x \cdot x^2)' = 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = 3x^2$
$(x^4)' = (x \cdot x^3)' = 1 \cdot x^3 + x \cdot 3x^2 = 4x^3$
$(x^5)' = (x \cdot x^4)' = 1 \cdot x^4 + x \cdot 4x^4 = 5x^4$
Het lijkt dat de afgeleide van x^n gelijk is aan nx^{n-1}. In paragraaf 5.1 zult u zien dat dit inderdaad het geval is.

b Gebruik dat de afgeleide van x^{-1} gelijk is aan de afgeleide van $\frac{1}{x}$ dus aan $-\frac{1}{x^2}$ wat we schrijven als $-x^{-2}$.
$(x^{-2})' = (x^{-1} \cdot x^{-1})' = -x^{-2} \cdot x^{-1} + x^{-1} \cdot -x^{-2} = -2x^{-3}$
$(x^{-3})' = (x^{-1} \cdot x^{-2})' = -x^{-2} \cdot x^{-2} + x^{-1} \cdot -2x^{-3} = -3x^{-4}$
$(x^{-4})' = (x^{-1} \cdot x^{-3})' = -x^{-2} \cdot x^{-3} + x^{-1} \cdot -3x^{-4} = -4x^{-5}$
Het lijkt dat de afgeleide van x^{-n} gelijk is aan $-nx^{-n-1}$. In paragraaf 5.1 zult u zien dat dit inderdaad het geval is.

6.12 Enerzijds geldt $(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x})' = (x)' = 1$.
Anderzijds vinden we met de productregel dat $(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x})' = (\sqrt{x})' \cdot \sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' = 2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})'$
Dus $2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' = 1$. Deel nu links en rechts door $2\sqrt{x}$ dan vinden we dat $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

6.13 Enerzijds geldt $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

Anderzijds geldt $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{2}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'$.

Dus $\frac{2}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{x^2}$. Vermenigvuldig nu links en rechts met $\frac{\sqrt{x}}{2}$.

we vinden dan: $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{-\sqrt{x}}{2x^2}$

6.14 **a** $f'(x) = \left(\frac{2x+4}{x-5x^2}\right)' = \frac{(x-5x^2)\cdot 2-(2x+4)\cdot(1-10x)}{(x-5x^2)^2} = \frac{10x^2+40x-4}{(x-5x^2)^2}$

b $f'(x) = \left(\frac{x^2-\frac{1}{x}}{x+2}\right)' = \frac{(x+2)\cdot\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x^4+4x^3+2x+2}{x^2(x+2)^2}$

c $f'(x) = \left(\frac{x^2-x+2}{4x^2+3x+6}\right)' = \frac{(4x^2+3x+6)(2x-1)-(x^2-x+2)(8x+3)}{(4x^2+3x+6)^2} =$

$\frac{7x^2-4x-12}{(4x^2+3x+6)^2}$

6.15 **a** $f'(x) = \left(2x+\frac{x}{x-3}\right)' = 2+\left(\frac{x}{x-3}\right)' = 2+\frac{x-3-x}{(x-3)^2} = 2-\frac{3}{(x-3)^2}$

b $f'(x) = \left(\frac{(x^2-2)(1+x)}{1-2x}\right)' = \frac{(1-2x)\cdot((x^2-2)(1+x))'-((x^2-2)(1+x))\cdot(1-2x)'}{(1-2x)^2} =$

$\frac{(1-2x)\cdot((x^2-2)'(1+x)+(x^2-2)(1+x)')+2(x^2-2)(1+x)}{(1-2x)^2} =$

$\frac{(1-2x)\cdot(2x\cdot(1+x)+(x^2-2))+2(x^2-2)(1+x)}{(1-2x)^2} = \frac{-4x^3+x^2+2x-6}{(1-2x)^2}$

c $f'(x) = \left(\frac{1+x}{x^2}\cdot\frac{2-x}{1+x^2}\right)' = \left(\frac{1+x}{x^2}\right)'\cdot\frac{2-x}{1+x^2}+\frac{1+x}{x^2}\cdot\left(\frac{2-x}{1+x^2}\right)' =$

$\frac{x^2\cdot(1+x)'-(1+x)\cdot(x^2)'}{x^4}\cdot\frac{2-x}{1+x^2}+\frac{1+x}{x^2}\cdot\frac{(1+x^2)(2-x)'-(2-x)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} =$

$\frac{x^2-(1+x)\cdot 2x}{x^4}\cdot\frac{2-x}{1+x^2}+\frac{1+x}{x^2}\cdot\frac{-(1+x^2)-(2-x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^4-3x^3-8x^2-x-4}{x^3(1+x^2)^2}$

6.16 We berekenen de afgeleiden stapsgewijs:

a i $f = g\circ h$ met $g(x)=x^3$ en $h(x)=\sqrt{x}-x$

ii $g'(x)=3x^2$

iii $g'(h(x))=3(\sqrt{x}-x)^2$

iv $h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-1$

v $f'(x)=g'(h(x))\cdot h'(x)=3(\sqrt{x}-x)^2\cdot(\frac{1}{2\sqrt{x}}-1)$

b i $f = g\circ h$ met $g(x)=x^3$ en $h(x)=3x^3+2x$

ii $g'(x)=3x^2$

iii $g'(h(x))=3(3x^3+2x)^2$

iv $h'(x)=9x^2+2$

v $f'(x)=g'(h(x))\cdot h'(x)=3(3x^3+2x)^2\cdot(9x^2+2)=243x^8+378x^6+180x^4+24x^2$

c i $f = g \circ h$ met $g(x) = \sqrt{x}$ en $h(x) = 1 - x^2$

ii $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

iii $g'(h(x)) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

iv $h'(x) = -2x$

v $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot -2x = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

6.17 **a** i $h = f \circ g$ met $f(x) = \frac{1}{x}$

ii $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

iii $f'(g(x)) = -\dfrac{1}{(g(x))^2}$

v $h'(x) = (\dfrac{1}{g(x)})' = -\dfrac{1}{(g(x))^2} \cdot g'(x)$

b Schrijf eerst het quotiënt als product van f en $\frac{1}{g}$:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)' =$$
$$f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \frac{-1}{(g(x))^2} \cdot g'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} + \frac{-f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} =$$
$$\frac{g(x) \cdot f'(x)}{(g(x))^2} + \frac{-f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

6.18 **a** $f'(x) = 3(x^{20} + x^{10})^2 \cdot (x^{20} + x^{10})' = 3(x^{20} + x^{10})^2 \cdot (20x^{19} + 10x^9)$
b $f'(x) = 7(1 - x)^6 \cdot (1 - x)' = -7(1 - x)^6$

6.19 Laat $k = -m$, dan is $m > 0$, dus weten we dat $(x^m)' = mx^{m-1}$. Dit gebruiken we om de afgeleide van x^k te bepalen.
i Met de quotiëntregel:

$$(x^k)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{x^m \cdot (1)' - 1 \cdot (x^m)'}{(x^m)^2} = \frac{x^m \cdot 0 - 1 \cdot mx^{m-1}}{(x^m)^2} =$$
$$\frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = kx^{k-1}$$

ii Met de kettingregel, zie x^{-m} als de samenstelling van $\frac{1}{x}$ en x^m (zie ook opgave 6.17)

$$(x^k)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{1}{(x^m)^2} \cdot (x^m)' = -\frac{1}{(x^m)^2} \cdot mx^{m-1} = -mx^{-m-1} = kx^{k-1}$$

cc BY NC ND

6.20 Gebruik $(x^{\frac{1}{n}})^n = x$. Bereken nu op twee manieren de afgeleide van $(x^{\frac{1}{n}})^n$:
i $((x^{\frac{1}{n}})^n)' = (x)' = 1$
ii $((x^{\frac{1}{n}})^n)' = n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1} \cdot (x^{\frac{1}{n}})' = nx^{\frac{n-1}{n}} \cdot (x^{\frac{1}{n}})'$
Uit i en ii volgt: $nx^{\frac{n-1}{n}} \cdot (x^{\frac{1}{n}})' = 1$. Deel links en rechts door $nx^{\frac{n-1}{n}}$ dan vinden we

$$(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

6.21 **a** $f'(x) = (\sqrt[3]{x^4})' = (x^{\frac{4}{3}})' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

b $f'(x) = \left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)' = (x^{-\frac{3}{2}})' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

c $f'(x) = (x^{-3\frac{1}{2}})' = -3\frac{1}{2} \cdot x^{-4\frac{1}{2}}$

6.22 **a** $f'(x) = (\sqrt[3]{x^2 + 2x})' = ((x^2 + 2x)^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}(x^2 + 2x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + 2x)' =$
$\frac{1}{3}(x^2 + 2x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x + 2) = \frac{2x + 2}{3\sqrt[3]{(x^2 + 2x)^2}}$

b $f'(x) = \left(\frac{x^5}{1 + x^3}\right)' = \frac{(1 + x^3) \cdot (x^5)' - x^5 \cdot (1 + x^3)'}{(1 + x^3)^2} =$
$\frac{(1 + x^3) \cdot 5x^4 - x^5 \cdot 3x^2}{(1 + x^3)^2} = \frac{5x^4 + 2x^7}{(1 + x^3)^2}$

c $f'(x) = ((3x^5 - x)\sqrt{x})' = (3x^5 - x)' \cdot \sqrt{x} + (3x^5 - x) \cdot (\sqrt{x})' =$
$(15x^4 - 1) \cdot \sqrt{x} + \frac{3x^5 - x}{2\sqrt{x}} = \frac{33x^5 - 3x}{2\sqrt{x}}$

d $f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{4x^4 + 4}}\right)' = ((4x^4 + 4)^{-\frac{1}{4}})' = -\frac{1}{4}(4x^4 + 4)^{-\frac{5}{4}} \cdot (4x^4 + 4)' =$
$-\frac{1}{4}(4x^4 + 4)^{-\frac{5}{4}} \cdot 16x^3 = \frac{-4x^3}{\sqrt[4]{(4x^4 + 4)^5}}$

6.23 **a** $f'(x) = 72x^7$ dus $f'(1) = 72$

b $f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}\right)' = ((4 - x^2)^{-\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (4 - x^2)' =$
$-\frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}$

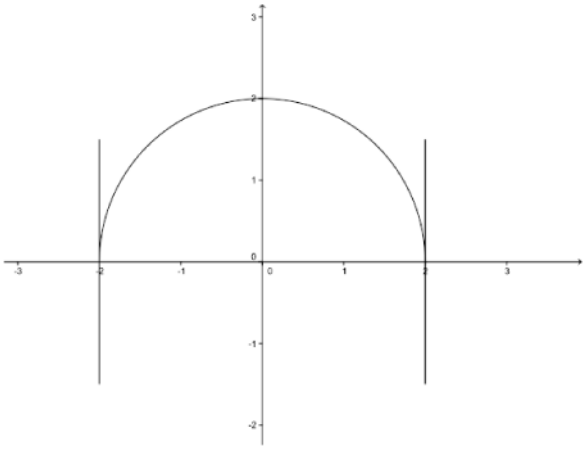
Dus $f'(1) = \frac{1}{\sqrt{27}}$.

c $f'(x) = (x^3 \cdot \sqrt{x} - 2x^4)' = (x^{\frac{7}{2}} - 2x^4)' = \frac{7}{2}\, x^{\frac{5}{2}} - 8x^3$, dus $f'(1) = -4\frac{1}{2}$.

6.24 Het domein van de functie $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ is $[-2, 2]$ want het gedeelte onder het wortelteken mag niet negatief zijn. De afgeleide van f is

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Deze afgeleide is niet gedefinieerd in $x = -2$ en $x = 2$. In figuur 6.8 ziet u dat de raaklijn in deze punten verticaal loopt. De afgeleide bestaat dus alleen in $\langle -2, 2 \rangle$.



FIGUUR 6.8 De grafiek van $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ met verticale raaklijnen in $x = -2$ en $x = 2$

6.25 **a** $f'(x) = (\sin x)' \cos x + \sin x\, (\cos x)' = \cos^2 x - \sin^2 x$

b $f'(x) = \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)' = (\sin^{-2} x)' = -2 \sin^{-3} x \cdot (\sin x)' = -2 \sin^{-3} x \cdot \cos x = \frac{-2 \cos x}{\sin^3 x}$

c $f'(x) = (\tan(4x^3 - 3x))' = \frac{1}{\cos^2(4x^3 - 3x)} \cdot (4x^3 - 3x)' = \frac{12x^2 - 3}{\cos^2(4x^3 - 3x)}$

d $f'(x) = \left(\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\sqrt{x}(\cos x)' - \cos x(\sqrt{x})'}{x} =$

$$\frac{-\sqrt{x} \cdot \sin x - \cos x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{-2x \cdot \sin x - \cos x}{2x\sqrt{x}}$$

6.26 **a** $f'(x) = (2^{-x})' = \ln 2 \cdot 2^{-x} \cdot (-x)' = -\ln 2 \cdot 2^{-x}$

b $f'(x) = (\sin(e^x))' = \cos(e^x) \cdot (e^x)' = e^x \cos(e^x)$

c $f'(x) = (3xe^{x^2})' = (3x)' \cdot e^{x^2} + 3x \cdot (e^{x^2})' = 3e^{x^2} + 3x \cdot (e^{x^2}) \cdot (x^2)' = 3e^{x^2} + 3x \cdot (e^{x^2}) \cdot 2x = 3e^{x^2} + 6x^2 e^{x^2}$

d $f'(x) = \left(\frac{x}{4^x}\right)' = \frac{4^x \cdot 1 - x \cdot \ln 4 \cdot 4^x}{(4^x)^2} = \frac{1 - \ln 4 \cdot x}{4^x}$

6.27 **a** $f'(x) = (x \ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

b $f'(x) = (4 \cdot {}^2\log x + 2)' = \frac{4}{\ln 2 \cdot x}$

c $f'(x) = (\ln(10x))' = \frac{1}{10x} \cdot 10 = \frac{1}{x}$

d $f'(x) = \left(\frac{e^x}{\ln x}\right)' = \frac{\ln x \cdot e^x - \frac{e^x}{x}}{\ln^2 x} = \frac{x \ln x \cdot e^x - e^x}{x \ln^2 x}$

6.28 **a** $(3x^5 + 7x^2 - 17)' = 15x^4 + 14x$

b $\big((3x+1)(2x+4)\big)' = 3 \cdot (2x+4) + (3x+1) \cdot 2 = 12x + 14$ of
$\big((3x+1)(2x+4)\big)' = \big(6x^2 + 14x + 4\big)' = 12x + 14$

c $2x + 2x^{-3}$

d $(\sqrt{(x^2-1)})' = ((x^2-1)^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2-1)'$
$= \frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$

e $\left(\frac{3x + x^2}{2x - 7}\right)' = \frac{(2x-7) \cdot (3+2x) - (3x+x^2) \cdot 2}{(2x-7)^2} = \frac{2x^2 - 14x - 21}{(2x-7)^2}$

f $\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-1(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} =$
$\frac{-1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$

g $\cos^2 x - \sin^2 x$

h $\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$

i $(4\sin 3x)' = 4\cos 3x \cdot (3x)' = 12\cos 3x$

j $(\sin(\cos x))' = \cos(\cos x) \cdot (\cos x)' = -\cos(\cos x) \cdot \sin x$

k $(x^2\cos 2x)' = 2x\cos 2x + x^2 \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)' = 2x\cos 2x - 2x^2\sin 2x$

l $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

m $(e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot (x^2)' = 2xe^{x^2}$

n $(e^{3x-7})' = e^{3x-7} \cdot (3x - 7)' = 3e^{3x-7}$

o $(e^{\sqrt{x}})' = e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

p $(e^x \sin x)' = e^x(\sin x + \cos x)$

q $(3^{-x})' = 3^{-x}(-\ln 3)$

r $(\cos(e^x))' = -e^x \sin(e^x)$

6.29 **a** $f'(x) = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f'(1) = 1\frac{1}{2}$

b $f'(x) = 14x(x^2 + 3)^6$
$f'(1) = 14 \cdot 4^6 = 57344$

c $f'(x) = ((2x + 7)^{-\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{2}(2x + 7)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 = \frac{-1}{(2x + 7)^{\frac{3}{2}}}$
$f'(1) = -\frac{1}{27}$

d $f'(x) = -2\sin(2x - 1) \cdot 2 = -4\sin(2x - 1)$
$f'(1) = -4\sin(1)$

e $f'(x) = -\sin(x^2 - 1) \cdot 2x = -2x\sin(x^2 - 1)$
$f'(1) = 0$

f $f'(x) = -2\cos(x - 1)\sin(x - 1)$
$f'(1) = 0$

g $f'(x) = e^x - e^{-x}$
$f'(1) = e - \frac{1}{e}$

h $f'(x) = e^x + xe^x$
$f'(1) = 2e$

BY NC ND

i $f'(x) = (\sqrt{x})'\,e^{\sqrt{x}} + \sqrt{x}(e^{\sqrt{x}})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} + \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x})' =$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} + \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})$

$f'(1) = e$

6.30 $f'(x) = e^{-x^2+1} + x\cdot e^{-x^2+1}\cdot -2x = e^{-x^2+1} - 2x^2\cdot e^{-x^2+1} = (1-2x^2)\cdot e^{-x^2+1}$
Omdat een e-macht altijd positief is, volgt nu $f'(x) = 0$ precies dan als $1 - 2x^2 = 0$, dus als $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ of $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$.

6.31 **a** De snelheid is de afgeleide van de afgelegde afstand, dus de snelheid (let op: in m/s) is gelijk aan

$$v(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{als } 0 \le t \le 30 \\ 15 & \text{als } 30 < t \le 120 \\ -\frac{1}{2}t + 75 & \text{als } 120 < t \le 150 \end{cases}$$

b De snelheid neemt eerst toe van 0 tot 15 m/s, daarna is deze constant om ten slotte weer af te nemen van 15 m/s naar 0. De maximale snelheid van de auto is dus 15m/s = 54 km/u. De auto houdt zich dus niet aan de maximumsnelheid.

2 Antwoorden op de zelftoets

1 **a** $f'(x) = (\sqrt{x}\cdot\sin x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x + \sqrt{x}\cdot\cos x$

b $f'(x) = \left(\frac{x^2+5}{x-3x^3}\right)' = \frac{(x-3x^3)\cdot 2x - (x^2+5)\cdot(1-9x^2)}{(x-3x^3)^2} = \frac{3x^4+46x^2-5}{(x-3x^3)^2}$

c $f'(x) = \left(\frac{3}{x\sqrt[7]{x^6}}\right)' = (3x^{\frac{-13}{7}})' = 3\cdot -\frac{13}{7}x^{\frac{-20}{7}} = -\frac{39}{7x^2\sqrt[7]{x^6}}$

d $f'(x) = (\tan(3x^2))' = \frac{1}{\cos^2(3x^2)}\cdot 6x = \frac{6x}{\cos^2(3x^2)}$

e $f'(x) = (e^{\cos x})' = e^{\cos x}\cdot -\sin x$

f $f'(x) = \left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{\ln x - x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

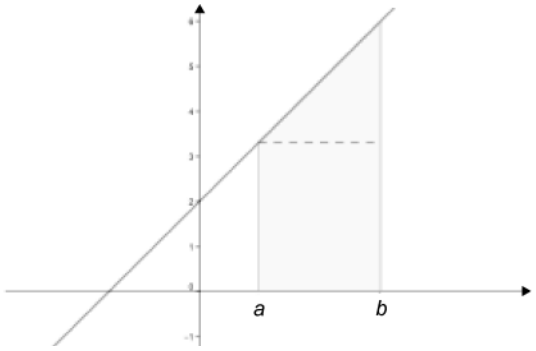
2 Een functievoorschrift van het aantal transistoren op een chip als functie van het jaar is $f(t) = 240 \cdot 2^{0{,}5(t-1965)}$. De afgeleide van deze functie is:

$f'(t) = 240 \cdot \ln 2 \cdot 2^{0{,}5(t-1965)} \cdot 0{,}5 = 120 \cdot \ln 2 \cdot 2^{0{,}5(t-1965)}$
De toename snelheid in 1970 was dus gelijk aan $f'(1970) = 120 \cdot \ln 2 \cdot 2^{2{,}5} \approx 471$ transistoren per jaar en in 2000 was deze snelheid $f'(2000) = 120 \cdot \ln 2 \cdot 2^{17{,}5} \approx 15\,418\,127$ transistoren per jaar.

3 Bepaal eerst de afgeleide: $f'(x) = 6x - 2$. De richtingscoëfficiënt in de raaklijn door $(a, f(a))$ is gelijk aan $f'(a)$. Deze is gelijk aan 2 als $6a - 2 = 2$, dus als $6a = 4$, $a = \frac{2}{3}$.

1 Uitwerking van de opgaven

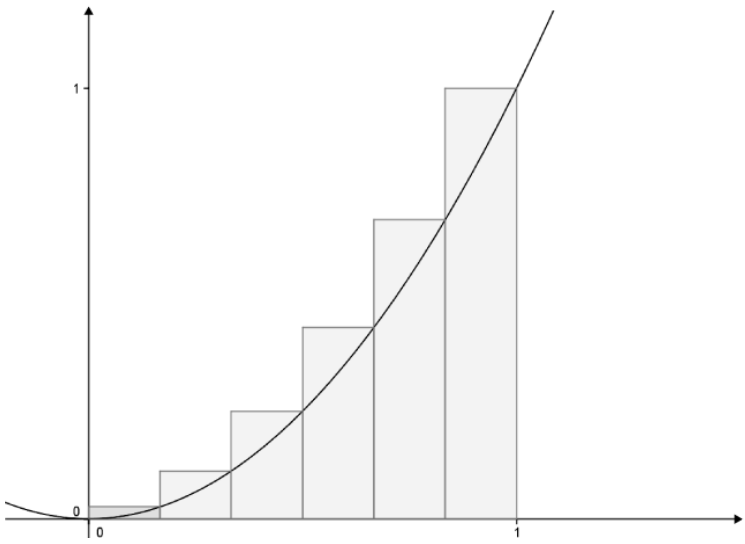
7.1 De oppervlakte ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = 2 + x$, de x-as en de lijnen $x = a$ en $x = b$ is gelijk aan de oppervlakte van een rechthoek met breedte $b - a$ en hoogte $2 + a$ en een driehoek met basis $b - a$ en hoogte $b - a$, zie figuur 7.10. De oppervlakte is dus gelijk aan $(b - a)(2 + a) + \frac{1}{2}(b - a)^2 = 2(b - a) + \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.



FIGUUR 7.10 De oppervlakte onder de grafiek van f

7.2 Benader de oppervlakte onder de grafiek met behulp van rechthoeken met als basis $[k/n, (k + 1)/n]$ en hoogte $f((k + 1)/n)$, zie figuur 7.11. Dan geldt bij een benadering met n deelintervallen voor de totale oppervlakte Op_n :

$$Op_n = \tfrac{1}{n}\left(f\left(\tfrac{1}{n}\right) + f\left(\tfrac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\tfrac{n-1}{n}\right) + f(1)\right) =$$
$$\tfrac{1}{n}\left(\left(\tfrac{1}{n}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\tfrac{n-1}{n}\right)^2 + 1\right) =$$
$$\tfrac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2$$



FIGUUR 7.11 Een benadering van de oppervlakte onder de grafiek van $f(x) = x^2$ tussen $x = 0$ en $x = 1$

Uit de somformule voor de som van kwadraten volgt dat

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 = (\sum_{k=0}^{n-1} k^2) + n^2 = \tfrac{1}{6} n(n-1)(2n-1) + n^2$$

Bij het eerste gelijkteken laten we de som bij $k = 0$ beginnen, dit mag omdat $0^2 = 0$, bij het tweede splitsen we in een som tot en met $n - 1$ en zetten de term met $k = n$ apart.

De totale oppervlakte van de rechthoeken is dus gelijk aan

$$Op_n = \frac{1}{n^3}(\tfrac{1}{6} n(n-1)(2n-1) + n^2) = \frac{n(n-1)(2n-1) + 6n^2}{6n^3} =$$
$$\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

en dan geldt voor grote waarden van n:

$$Op_n \approx \tfrac{1}{3}$$

Wanneer we de oppervlakte onder de grafiek van f van boven af benaderen vinden we een bovengrens 1/3. Omdat onder- en bovengrens aan elkaar gelijk zijn, moet de oppervlakte onder de grafiek van f tussen 0 en 1 wel gelijk zijn aan 1/3.

7.3 Benader eerst de oppervlakte onder de grafiek met behulp van n rechthoeken met als basis $[2k/n, (2k + 2)/n]$ en hoogte $f(2k/n)$.
Dan geldt voor deze benadering met n deelintervallen voor de totale oppervlakte O_n:

$$O_n = \tfrac{2}{n}(f(0) + f(\tfrac{2}{n}) + f(\tfrac{4}{n}) + \ldots + f(\tfrac{2n-2}{n})) =$$
$$\tfrac{2}{n}(0^2 + (\tfrac{2}{n})^2 + (\tfrac{4}{n})^2 + \ldots + (\tfrac{2n-2}{n})^2) =$$
$$\tfrac{2}{n} \cdot \tfrac{2^2}{n^2} \cdot (0 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2) =$$
$$\tfrac{2^3}{n^3} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{2^3 \cdot n(n-1)(2n-1)}{6n^3} = \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

Dus

$$O_n \approx \tfrac{8}{3}$$

Benader vervolgens de oppervlakte onder de grafiek van de bovenkant af met n rechthoeken met als basis $[2k/n, (2k + 2)/n]$ en hoogte $f((2k + 2)/n)$.

Dan geldt voor deze benadering met n deelintervallen voor de totale oppervlakte Op_n:

$$Op_n = \tfrac{2}{n}(f(\tfrac{2}{n}) + f(\tfrac{4}{n}) + \ldots + f(\tfrac{2n-2}{n}) + f(\tfrac{2n}{n}) =$$
$$\tfrac{2}{n}((\tfrac{2}{n})^2 + (\tfrac{4}{n})^2 + \ldots + (\tfrac{2n-2}{n})^2 + (\tfrac{2n}{n})^2) =$$
$$\tfrac{2}{n} \cdot \tfrac{2^2}{n^2} \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2) =$$
$$\tfrac{2^3}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2^3 \cdot n(n-1)(2n-1) + 48n^2}{6n^3} = \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

Dus

$$Op_n \approx \tfrac{8}{3}$$

7.4 **a** Deze integraal is gelijk aan de oppervlakte van een driehoek met als basis het interval $[0, a]$ en hoogte $2a$. Deze oppervlakte is gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a$, dus

$$\int_0^a 2x\,\mathrm{d}x = a^2$$

b De oppervlakte is gelijk aan die onder de grafiek van de functie $f(x) = 2x$ tussen 0 en a dus

$$\int_0^a -2x\,\mathrm{d}x = -\int_0^a 2x\,\mathrm{d}x = -a^2$$

7.5 $$\int_c^d 2x\,\mathrm{d}x = \int_0^d 2x\,\mathrm{d}x - \int_0^c 2x\,\mathrm{d}x = d^2 - c^2$$

7.6

$\int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + C$	want $(\frac{1}{4}x^4)' = x^3$
$\int x^6\,\mathrm{d}x = \frac{1}{7}x^7 + C$	want $(\frac{1}{7}x^7)' = x^6$
$\int x^{-3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^{-2} + C$	want $(-\frac{1}{2}x^{-2})' = x^{-3}$
$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	want $(\frac{1}{n+1}x^{n+1})' = x^n$
$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$	want $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$	want $(\sin x)' = \cos x$
$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$	want $(-\cos x)' = \sin x$
$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$	want $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

cc BY NC ND

7.7 Laat F een primitieve zijn van de functie f en G een primitieve van g.
a Dan is $(F + G)' = F' + G' = f + g$, dus $F + G$ is een primitieve van $f + g$.
b Dan is $(F - G)' = F' - G' = f - g$, dus $F - G$ is een primitieve van $f - g$.
c Dan is $(cF)' = cF' = cf$, dus cF is een primitieve van cf.

7.8 Als F een primitieve is van de functie f en G een primitieve van g, dan geldt in het algemeen niet dat FG een primitieve is van fg.
Een tegenvoorbeeld:
Neem $f(x) = g(x) = 1$ (de constante functie), met primitieven $F(x) = G(x) = x$. Dan is $FG(x) = x^2$ *geen* primitieve van $fg(x) = 1$.

7.9 **a** $\int 5x\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \int 5x^{4/3}\,\mathrm{d}x = 5\int x^{4/3}\,\mathrm{d}x = 5 \cdot \frac{3}{7}x^{7/3} + C = \frac{15}{7}x^{7/3} + C$

b $\int \frac{1}{6x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int x^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6} \cdot -x^{-1} + C = -\frac{1}{6x} + C$

c $\int 2^x\,\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

d $\int \frac{x+1}{x}\mathrm{d}x = \int (1 + \frac{1}{x})\,\mathrm{d}x = x + \ln|x| + C$

e $\int \frac{1}{4\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4}\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\tan x + C$

7.10 **a** $\int x^4 - 3x^2 + 2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 - x^3 + 2x + C$

b $\int \sin x - \cos x\,\mathrm{d}x = -\cos x - \sin x + C$

c $\int \frac{1}{5x}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\ln|x| + C$

d $\int \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{2}\right)^x\mathrm{d}x = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{2\ln\frac{1}{2}} + C = \frac{-1}{\ln 2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + C$

e $\int \frac{3}{x^3} - \frac{4}{5x^4}\mathrm{d}x = \int 3x^{-3} - \frac{4}{5}x^{-4}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}x^{-2} + \frac{4}{15}x^{-3} + C$

f $\int (x^4 - 3x)^2\,\mathrm{d}x = \int x^8 - 6x^5 + 9x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}x^9 - x^6 + 3x^3 + C$

7.11 **a** Probeer als primitieve $\frac{1}{5}(1 - x)^5$. De afgeleide hiervan is $-(1 - x)^4$ dus

$$\int (1-x)^4\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{5}(1-x)^5 + C$$

b Probeer als primitieve $\ln|3 + 2x|$. De afgeleide hiervan is $2/(3 + 2x)$ dus

$$\int \frac{1}{3+2x}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\ln|3+2x| + C$$

c Probeer als primitieve $e^{x/3}$. De afgeleide hiervan is $\frac{1}{3}e^{x/3}$, dus

$$\int e^{x/3}\,\mathrm{d}x = 3e^{x/3} + C$$

d Probeer als primitieve $\sin(5x + 8)$. De afgeleide hiervan is $5\cos(5x + 8)$ dus

$$\int \cos(5x+8)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{5}\sin(5x+8) + C$$

e Probeer als primitieve $4\sin(3x) - 3\sin(4x)$. De afgeleide hiervan is $12\cos(3x) - 12\cos(4x)$ dus

$$\int 4\cos(3x) - 3\cos(4x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{4}{3}\sin(3x) - \tfrac{3}{4}\sin(4x) + C$$

f Schrijf de wortels eerst als macht:

$$\int (1-3x)^{\frac{1}{2}} + 2(4x+2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

Probeer als primitieve

$$\tfrac{2}{3}(1-3x)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{2}{3}\cdot 2\cdot(4x+2)^{\frac{3}{2}}$$

De afgeleide hiervan is:

$$-3(1-3x)^{\frac{1}{2}} + 4\cdot 2\cdot(4x+2)^{\frac{1}{2}}$$

dus:

$$\int \sqrt{1-3x} + 2\sqrt{4x+2}\,\mathrm{d}x = \int (1-3x)^{\frac{1}{2}} + 2(4x+2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$-\tfrac{2}{9}(1-3x)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{3}(4x+2)^{\frac{3}{2}} + C$$

g Probeer als primitieve $3^{3x}/\ln 3 + \frac{1}{3}\cos(3x)$. De afgeleide hiervan is $3\cdot 3^{3x} - \sin(3x)$ dus:

$$\int 3^{3x} - \tfrac{1}{3}\sin(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{3^{3x}}{3\ln 3} + \tfrac{1}{9}\cos(3x) + C$$

h Met proberen komt u waarschijnlijk in een keer op het goede antwoord:

$$\int \frac{6}{\cos^2(1+x)} + \frac{4}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x = 6\tan(1+x) - \frac{2}{(x+1)^2} + C$$

i Als u een primitieve van de vorm $\frac{1}{4}(1 + 2x^2)^4$ probeert, krijgt u bij het differentiëren een extra factor x als gevolg van de kettingregel. Het zal u waarschijnlijk niet lukken om zo met trial and error een primitieve te vinden. Er zit niets anders op dan de term uit te schrijven:
$(1 + 2x^2)^3 = 1 + 6x^2 + 12x^4 + 8x^6$.

Dus

$$\int (1+2x^2)^3\,\mathrm{d}x = \int 1 + 6x^2 + 12x^4 + 8x^6\,\mathrm{d}x = x + 2x^3 + \tfrac{12}{5}x^5 + \tfrac{8}{7}x^7 + C$$

cc BY NC ND

7.12 **a** $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x\big|_0^{\pi/4} = \tan(\pi/4) - \tan 0 = 1$

b $\int_1^2 (1-2x)^5\,dx = -\frac{1}{12}(1-2x)^6\Big|_1^2 = -\frac{1}{12}((-3)^6 - (-1)^6) = -\frac{728}{12} = -60\frac{2}{3}$

c $\int_{-1}^1 e^{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x-1}\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2}(e - e^{-3})$

d $\int_0^{\pi/4} \cos x + 2\sin 2x\,dx = (\sin x - \cos 2x)\big|_0^{\pi/4} =$

$\sin(\pi/4) - \cos(\pi/2) - \sin 0 + \cos 0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + 1$

e $\int_0^7 \sqrt{3x+4}\,dx = \int_0^7 (3x+4)^{1/2}\,dx = \frac{2}{9}(3x+4)^{3/2}\Big|_0^7 = \frac{2}{9}(25^{3/2} - 4^{3/2}) = 26$

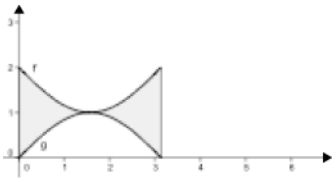
7.13 De functie $f(x) = x(x^2 - 1)(x - 2)$ snijdt de lijn x-as in $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ en $x = 2$. Op $[-1, 0]$ en $[1, 2]$ ligt de grafiek onder de x-as en is de oppervlakte dus gelijk aan het tegengestelde van de integraal over deze gebieden. Op $[0, 1]$ is de oppervlakte onder de functie gelijk aan de integraal. De totale oppervlakte is dus gelijk aan:

$$O = -\int_{-1}^0 f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx - \int_1^2 f(x)\,dx$$

Voordat we deze integralen uit kunnen rekenen moeten we eerst het functievoorschrift van f uitwerken: $x(x^2 - 1)(x - 2) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$.
Een primitieve van f is dus $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2$.
Dus de gearceerde oppervlakte is gelijk aan:

$$O = -\left(\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{3}x^3 + x^2\Big|_{-1}^0\right) + \left(\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{3}x^3 + x^2\Big|_0^1\right) - \left(\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{3}x^3 + x^2\Big|_1^2\right)$$
$$= -(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - 1) + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + 1) - ((\tfrac{32}{5} - 8 - \tfrac{8}{3} + 4) - (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + 1)) = 1\tfrac{19}{30}$$

7.14 **a** Zie figuur 7.12



FIGUUR 7.12 De grafiek van de functies $f(x) = 2 - \sin x$ en $g(x) = \sin x$ tussen $x = 0$ en $x = \pi$.

b De oppervlakte tussen de functies is gelijk aan de oppervlakte ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = 0$ en $x = \pi$, min de de oppervlakte ingesloten door de grafiek van g, de x-as en de lijnen $x = 0$ en $x = \pi$. Dus de oppervlakte is gelijk aan

$$\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$$

De oppervlakte is gelijk aan:

$$\int_0^{\pi} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} 2 - 2\sin x\,\mathrm{d}x = (2x + 2\cos x)\Big|_0^{\pi} = 2\pi - 4$$

c Ook voor deze functies geldt dat f boven g ligt, en dat de ingesloten oppervlakte dus gelijk is aan

$$\int_0^{\pi/k} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/k} 2k - 2k\sin kx\,\mathrm{d}x = (2kx + 2\cos kx)\Big|_0^{\pi/k} = 2\pi - 4$$

De oppervlakte is dus onafhankelijk van k.

7.15 **a** Schrijf de integraal eerst als limiet:

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{p\to-\infty} \int_p^{-2} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{p\to-\infty} \ln|x+1|\Big|_p^{-2} =$$
$$\lim_{p\to-\infty} (\ln|-1| - \ln|p+1|) = -\infty$$

Deze integraal is dus divergent.

b $$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{p\to\infty} \int_0^{p} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{p\to\infty} (-\mathrm{e}^{-x}\big|_0^{p}) = \lim_{p\to\infty} (-\mathrm{e}^{-p} - (-\mathrm{e}^{-0}) = 1$$

c $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{p\to\infty} \int_1^{p} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{p\to\infty} (-2x^{-\frac{1}{2}}\Big|_1^{p}) = \lim_{p\to\infty} (-2p^{-\frac{1}{2}} + 2) = 2$$

7.16 Behalve het splitspunt verandert er weinig ten opzichte van het voorbeeld voor deze opgave:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to-\infty} \int_q^{1} 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{p\to\infty} \int_1^{p} 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{q\to-\infty} -\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_q^{1} + \lim_{p\to\infty} -\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_1^{p} = \lim_{q\to-\infty} (-\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-q^2}) + \lim_{p\to\infty} (-\mathrm{e}^{-p^2} + \mathrm{e}^{-1}) = 0$$

cc BY NC ND

7.17 **a** F is een primitieve van f als $F' = f$. Differentieer dus de functie F:

$$F'(x) = \left(\frac{1}{1+e^x}\right)' = \frac{-1}{(1+e^x)^2} \cdot e^x = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$$

b Splits de integraal en gebruik de primitieve uit onderdeel a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}\,dx =$$
$$\lim_{q\to-\infty} \int_{q}^{0} \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}\,dx + \lim_{p\to\infty} \int_{0}^{p} \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}\,dx =$$
$$\lim_{q\to-\infty} \left(\frac{1}{1+e^x}\Big|_q^0\right) + \lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{1+e^x}\Big|_0^p\right) =$$
$$\lim_{q\to-\infty} \left(\tfrac{1}{2} - \frac{1}{1+e^q}\right) + \lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{1+e^p} - \tfrac{1}{2}\right) =$$
$$\tfrac{1}{2} - 1 + 0 - \tfrac{1}{2} = -1$$

7.18 **a** F is een primitieve van f als $F' = f$. Differentieer dus de functie F:

$$F'(x) = \left(\tfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)' = \tfrac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{x}{1+x^2}$$

b Splits de integraal en gebruik de primitieve uit onderdeel a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$
$$\lim_{q\to-\infty} \int_{q}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx + \lim_{p\to\infty} \int_{0}^{p} \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$
$$\lim_{q\to-\infty} \left(\tfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_q^0\right) + \lim_{p\to\infty} \left(\tfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^p\right) =$$
$$\lim_{q\to-\infty} \left(0 - \tfrac{1}{2}\ln(1+q^2)\right) + \lim_{p\to\infty} \left(\tfrac{1}{2}\ln(1+p^2) - 0\right) =$$
$$0 - \infty + \infty - 0$$

Deze integraal is dus divergent.

7.19 **a** $\int_{-\infty}^{0} e^{3x}\,dx = \lim_{q\to-\infty} \left(\tfrac{1}{3}e^{3x}\Big|_q^0\right) = \lim_{q\to-\infty} \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}e^{3q}\right) = \tfrac{1}{3}$

Dus deze integraal is convergent.

b $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{p\to\infty} \left(2\sqrt{x}\Big|_1^p\right) = \lim_{p\to\infty} \left(2\sqrt{p} - 2\right) = \infty$

Deze integraal is dus divergent.

c Splits de integraal:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx = \int_{-\infty}^{0} \sin x\,dx + \int_{0}^{\infty} \sin x\,dx =$$

$$\lim_{q\to-\infty} \int_{q}^{0} \sin x\,dx + \lim_{p\to\infty} \int_{0}^{p} \sin x\,dx =$$

$$\lim_{q\to-\infty} (-\cos x|_{q}^{0}) + \lim_{p\to\infty} (-\cos x|_{0}^{p}) =$$

$$\lim_{q\to-\infty} (-1-(-\cos q)) + \lim_{p\to\infty} (-\cos p+1)$$

Beide limieten bestaan niet, dus deze integraal is divergent.

2 Antwoorden op de zelftoets

1 **a** Een primitieve van x^4 is $\frac{1}{5}x^5$, dus een primitieve van $10x^4$ is $2x^5$. Omdat $x\sqrt[5]{x} = x^{6/5}$, is een primitieve van $x\sqrt[5]{x}$ gelijk aan $\frac{5}{11}x^{11/5}$. Ten slotte: een primitieve van e^{2x-3} is $\frac{1}{2}e^{2x-3}$, dus een primitieve van $4e^{2x-3}$ is $2e^{2x-3}$. Samen met de som- en verschilregel geeft dit:

$$\int (10x^4 + x\sqrt[5]{x} - 4e^{2x-3})\,dx = 2x^5 + \tfrac{5}{11}x^2\sqrt[5]{x} - 2e^{2x-3} + C$$

b Een primitieven van $1/(2x-5) = \frac{1}{2}\ln|2x-5|$, dus

$$\int \frac{3}{2x-5}\,dx = \tfrac{3}{2}\ln|2x-5| + C$$

c Een primitieve van $2\sin 2x$ is $-\cos 2x$ en een primitieve van $1/(3\cos^2 x)$ is $\frac{1}{3}\tan x$ dus:

$$\int 2\sin 2x + \frac{1}{3\cos^2 x}\,dx = -\cos 2x + \tfrac{1}{3}\tan x + C$$

d $2^x/5^x = (2/5)^x$ dus

$$\int \frac{2^x}{5^x}\,dx = \int \left(\tfrac{2}{5}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln 2 - \ln 5} + C$$

2 **a** $$\int_{1}^{4} \frac{1}{(x+2)^2}\,dx = \int_{1}^{4} (x+2)^{-2}\,dx = -(x+2)^{-1}\Big|_{1}^{4} = -\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6}$$

b $$\int_{0}^{\pi} \sin x - 3x^2 - 2\,dx = (-\cos x - x^3 - 2x)\Big|_{0}^{\pi} =$$
$$-\cos\pi - \pi^3 - 2\pi - (-\cos 0) = 2 - \pi^3 - 2\pi$$

3 Uit de intervalregel volgt dat

$$\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (1+t^2)\mathrm{d}t + \int_1^2 \cos(\pi t + \tfrac{\pi}{2})\mathrm{d}t = (t + \tfrac{1}{3}t^3)\Big|_0^1 + \tfrac{1}{\pi}\sin(\pi t + \tfrac{\pi}{2})\Big|_1^2$$
$$= \tfrac{4}{3} + \tfrac{2}{\pi}$$

waarbij is gebruikt dat $\sin(2\pi + \pi/2) = \sin(\pi/2) = 1$ en $\sin(3\pi/2) = -1$. Omdat $f(t) \geq 0$ op $[0, 2]$, geeft deze integraal de oppervlakte onder de grafiek van f op $[0, 2]$.

4 **a** Een primitieve van $f(x)$ is $4\tan x$ en van $g(x)$ is $-\frac{3}{2}\cos 2x$. Uit de verschilregel volgt dan dat

$$\int h(x)\mathrm{d}x = 4\tan x + \tfrac{3}{2}\cos 2x + C$$

b Omdat $\cos^2 x$ dalend is op $[0, \pi/4]$, geldt er dat $f(x) \geq f(0) = 4$. Verder geldt dat $g(x) \leq 3$ (op $\mathbb{R}$), dus volgt dat $f(x) \geq g(x)$ op $[0, \pi/4]$.
De oppervlakte tussen de grafieken van f en g op $[0, \pi/4]$ wordt dus gegeven door $\int_0^{\pi/4} f(x)\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/4} g(x)\mathrm{d}x$ $(= \int_0^{\pi/4} h(x)\mathrm{d}x)$. In onderdeel a zijn primitieven van f en g bepaald en hiermee kunnen we de bepaalde integraal uitrekenen:

$$\int_0^{\pi/4} f(x)\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/4} g(x)\mathrm{d}x = 4\tan x\Big|_0^{\pi/4} - (-\tfrac{3}{2}\cos 2x)\Big|_0^{\pi/4} = 4 - \tfrac{3}{2} = \tfrac{5}{2}$$

c We kiezen $H(x) = 4\tan x + \frac{3}{2}\cos 2x$ als primitieve van h (een andere keuze scheelt een constante die geen invloed heeft op wat volgt). Dan volgt

$$H(5\pi/4) - H(\pi/6) = (4\tan(5\pi/4) + \tfrac{3}{2}\cos(5\pi/2)) - (4\tan(\pi/6) + \tfrac{3}{2}\cos(\pi/3))$$
$$= 4 - \tfrac{3}{2} - \tfrac{4}{3}\sqrt{3} = 3\tfrac{1}{4} - \tfrac{4}{3}\sqrt{3}$$

waarbij we gebruikten dat $\tan(5\pi/4) = \tan(\pi/4) = 1$, $\cos(5\pi/2) = 0$, $\tan(\pi/6) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ en $\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$. Hoewel $f(x) \geq g(x)$ voor alle x waar f en g gedefinieerd zijn, is $H(5\pi/4) - H(\pi/6)$ niet te interpreteren als een oppervlakte tussen de grafieken van f en g op $[\pi/6, 5\pi/4]$. Immers, f is niet gedefinieerd in $x = \pi/2$ en nadert hier naar *oneindig*. We kunnen daarom de integraal van f over $[\pi/6, \pi/2]$ niet bepalen en dus ook niet die over $[\pi/6, 5\pi/4]$.

abc-formule 115
Absolute waarde 85
Afgeleide 134
Afgeleide functie 135
Afronden 17
Amplitude 99
Argument 75

Basis 58
Beeld 76
Bepaalde integraal 163
Bereik 76
Bergparabool 82
Breuken 20

Ceiling 18
Complexe getallen 25
Convergent 167
Coördinaten 68
Cosinus 66
Cosinusfunctie 94

Dalparabool 82
Deler 18
Differentieerbaar 136
Differentiequotiënt 132
Differentiëren 136
Discriminant 117
Divergent 167
Domein 76
Doorsnede 16
Driedimensionale ruimte 69
Driehoek 57
Dubbelproduct 44
Dummyvariabele 35

Eenheidscirkel 92
Element 14
Even functie 100
Expliciete definitie 16
Exponentiële functies 89
Exponentiële vergelijking 120

Floor 18
Functie 75
Functievoorschrift 75

Gebroken functies 87
Gebroken vergelijking 118
Gehele getallen 17
Gelijkbenige driehoek 57
Gelijkzijdige driehoek 57
Gemiddelde snelheid 132
Gestrekte hoek 55
Getallenlijn 22
Goniometrische functies 91
Goniometrische vergelijking 121
Graad 55
Grafiek 75
Grootste gemene deler 19

Het getal e 147
Hoek 55
Hogeregraadsfuncties 83
Hogeremachtsfuncties 83
Hoogte 58
Hoogtelijn 59
Hypotenusa 57

Identiteit 102
Impliciete definitie 16
Ingangswaarde 74
Integraal 157
Interval 24
Intervalregel 158
Inverse functie 102

Kleinste gemene veelvoud 19
Kwadratische functie 81
Kwadratische vergelijking 113

Lege verzameling 16
Lijn 54
Lijnstuk 55
Lineaire functie 76
Lineaire vergelijking 108
Logaritme 30
Logaritmische functies 90

Machtsverheffen 26
Meetkundige rij 34
Momentane snelheid 132

Natuurlijke getallen 17
Natuurlijke logaritme 32, 147
Noemer 20

Onbepaalde integraal 160, 163
Oneigenlijke integraal 166
Oneindig 16
Oneven functie 100
Ongelijkheid 122
Oorsprong 67
Oplossing 108
Origineel 76

Parabool 82
Parallellogram 57
Parameters 76
Perfect getal 20
Periodieke functie 94
Platte vlak 54
Polynomiale functies 83
Polynoom 83
Priemfactor 18
Priemgetal 18
Primitieve 160
Productfunctie 101
Punt 54

Quotiëntfunctie 101

Radiaal 55, 64
Rationale getallen 17, 20
Rechte hoek 55
Rechthoek 57
Rechthoekige driehoek 57
Rechthoekszijde 57
Reële getallen 24
Rekenkundige rij 33
Repeterende breuk 22
Richtingscoëfficiënt 78

Samengestelde breuk 20
Samengestelde functie 101
Sinus 66
Sinusfunctie 93
Somfunctie 101

Tangens 66
Tangensfunctie 95
Teller 20
Top 82
Trial and error methode 162
Tweedegraadsfunctie 81
Tweedegraads-vergelijking 113
Tweedemachtsfunctie 81
Tweedimensionale ruimte 69

Uitgangswaarde 74

Variabele 16, 75
Veelvoud 19
Vereniging 15
Vergelijking 75
Vergelijkingen met logaritmen 120
Verschil 16
Verschilfunctie 101
Verzameling 14

Vierhoek 57
Vierkant 57
Vijfhoek 57

Wortel 29
Wortelformule 115
Wortelfunctie 84
Wortelvergelijking 119

Z-hoek 56

cc BY NC ND