BASISKENNIS

Wiskunde voor milieuwetenschappen



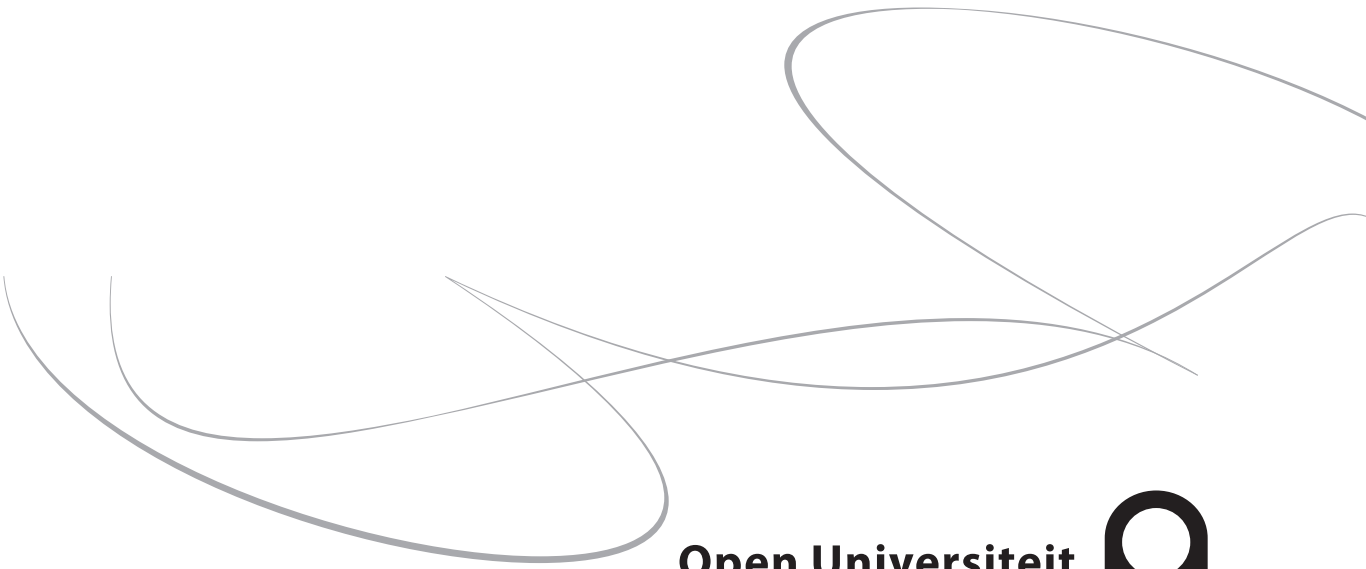
Open Universiteit
www.ou.nl

Basiskennis wiskunde voor milieuwetenschappen

Open Universiteit
Faculteit Management, Science en Technology
Natuurwetenschappen

Cursusteam
drs. G.D. Esmeijer, *cursusteamleider*, Open Universiteit
dr. P. Valkering, *cursusteamleider*, Universiteit Maastricht
ir. L.M.H.E. Driessen, Open Universiteit
dr. ir. J. de Kraker, Open Universiteit
drs. J.J.M.M. Simons
ir. E.M. van de Vrie, Open Universiteit
drs. J. van Wijnen, Open Universiteit
drs. A.J. Cremers, *projectencoördinator*, Open Universiteit
drs. R. Hoekstra, *redacteur*, Open Universiteit
E.B.A. Karsten-Meessen, *medewerker audiovisuele technieken*, Open Universiteit

Basiskennis wiskunde voor milieuwetenschappen



Open Universiteit
www.ou.nl

Productie
Open Universiteit
Basisvormgeving
Eden design, Amsterdam
Omslag
Team Visuele communicatie, Open Universiteit
Redactie
Roel Hoekstra
Illustraties en lay-out
Evelin Karsten-Meessen

Druk– en bindwerk
Canon Business Services

Eerste druk 2016

Basiskennis wiskunde voor milieuwetenschappen /[ir. E.M. van de Vrie (Ed.)] – Heerlen, Open Universiteit

Dit boek is ontwikkeld als onderdeel van de bacheloropleiding Milieu-natuurwetenschappen. Hij kan ook als op zichzelf staande cursus worden bestudeerd.

Voor meer informatie bezoek onze websites:
Faculteit Natuurwetenschappen:
www.ou.nl/nw
Open Universiteit Vlaanderen:
www.openuniversiteit.be



Dit materiaal is gelicentieerd onder de creative commons licentie Naamsvermelding-Niet-Commercieel-GeenAfgeleideWerken 4.0.
Zie de licentie voor details: https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode
This content is licensed under the creative commons license Attribution-Noncommercial-NoDerivs 4.0.
See licence for more details: https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode

31052016

Hoofdstuk		Bladzijde
	Introductie	7
	Diagnotische toets	9
1	Getallenverzamelingen en algebra	15
2	Functies en grafieken	67
3	Eerstegraads functies en rechte lijnen	87
4	Tweedegraads functies	115
5	Exponentiële groei	135
6	Exponentiële functies	151
7	Machtsfuncties en wortelfuncties	175
	Terugkoppelingen	201



BY NC ND

Basiskennis wiskunde voor milieuwetenschappen

INTRODUCTIE

In dit boek wordt de basiskennis wiskunde behandeld die bekend wordt verondersteld als u start met de cursus *Wiskunde voor milieuwetenschappen* van de Open Universiteit. Niet alleen de wiskunde wordt behandeld, ook komt aan bod hoe ze gebruikt wordt in vele relevante toepassingen.

De wiskunde in dit boek wordt ook gegeven op de middelbare school, en kan dus geen onderdeel zijn van een universitaire studie. Als u deze kennis en vaardigheden niet beheerst, dan zal het bestuderen van de cursus *Wiskunde voor milieuwetenschappen* niet goed mogelijk zijn.

We adviseren u goed na te gaan of u de basiskennis in dit boek beheerst, voordat u inschrijft voor de cursus Wiskunde voor milieuwetenschappen. Om na te gaan of u de basiskennis beheerst, kunt u de diagnostische toets maken direct na deze introductie.
Kunt u de toets gemakkelijk maken, dan kunt u er van uit gaan dat u voldoende voorbereid bent om te kunnen starten met de cursus Wiskunde voor milieuwetenschappen.
Valt het u moeilijk om de toets te maken, of mist u enkele onderwerpen, bestudeert u dan dit boek geheel of gedeeltelijk. U kunt er ook voor kiezen om elders een cursus over deze onderwerpen op dit niveau te gaan volgen.

Dit boek is opgebouwd uit een zevental leereenheden. Iedere leereenheid bevat een introductie en beschrijft de leerdoelen. De studiestof staat in de leerkern. De leerkern bestaat uit tekst met uitleg en voorbeelden en toepassingen, maar u komt ook veel opgaven tegen. Maakt u de opgaven op het moment dat u ze tegenkomt. Wiskunde is een vak dat u leert door te oefenen, en dat gaat alleen als u de opgaven maakt. Door de opgaven te maken, ontdekt en ervaart u allerlei aspecten die niet tot u doordringen als u de opgaven alleen leest, of ze overslaat. Om vaardig te worden in wiskunde, moet u oefenen, net zoals bij taal (Nederlands, Engels, …) of het bespelen van een instrument. De uitwerkingen van de opgaven staan achterin het boek. Daarmee kunt u nagaan of u de opgaven goed heeft gemaakt. Hou er rekening mee dat er vaak meerdere uitwerkingen mogelijk zijn om tot het goede antwoord te komen.
Iedere leereenheid wordt afgesloten met een samenvatting en een zelftoets. Met de zelftoets kunt u nagaan of u de inhoud van de leereenheid voldoende beheerst. Ook hier geldt: als u de zelftoets goed kunt maken, gaat u dan verder met dit boek. Als het u moeite kost, bestudeer dan opnieuw de betreffende onderdelen van de leereenheid. Raadpleeg eventueel ook andere boeken of bronnen op het internet.

CC BY NC ND



BY NC ND

Diagnostische toets

1 a Bereken $\frac{4}{7}-\frac{3}{5}=$

b Bereken $\frac{6}{7}:\frac{-2}{3}=$

c Voor welke x geldt: $x+\frac{3}{x+4}=0$

2 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4$
a Wat is het domein van de functie?
b Voor welke x geldt $f(x) = 0$?
c Wat is de kleinste functiewaarde?
d Wat is het bereik van de functie?
e Is (3, 4) een punt op de grafiek?

3 De grafiek van een lineaire functie f gaat door de punten (–2, 1) en (4, 4).
a Stel een functievoorschrift op voor f.
b Voor welke x geldt $f(x) \leq 5$?

4 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.
a Bereken enkele punten en schets de grafiek.
b Bepaal de symmetrieas.
c Voor welke x geldt $f(x) > x + 1$?

5 In een stad woonden in 2000 precies 250.000 mensen. Daarna nam het aantal inwoners geleidelijk af. Vanaf die tijd werden er geen woningen meer bijgebouwd en omdat de gemiddelde gezinsgrootte (het aantal inwoners per woning) afnam, nam het aantal inwoners in de stad geleidelijk verder af:

jaar	*aantal inwoners*
2000	250.000
2005	237.500
2010	224.000
2015	211.000

a Past er bij deze tabel een lineair groeimodel?
Zo ja, bereken dan het aantal inwoners volgens dit model in 2035.
Zo nee, leg uit waarom niet.
b Past er bij deze tabel een exponentieel groeimodel?
Zo ja, bereken dan het aantal inwoners volgens dit model in 2035.
Zo nee, leg uit waarom niet.

cc BY NC ND

6 Gegeven de functies $f(x) = 4^x$ en $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.
a Teken de grafiek van beide functies in één figuur.
b Geef het domein en het bereik van beide functies.
De rechte lijn $y = \frac{1}{8}$ snijdt de grafiek van f in punt A en de grafiek van g in punt B.
c Bereken de afstand tussen punt A en punt B.
d Bereken $f(100)$ en $g(100)$ met een rekenmachine.
Geef de antwoorden in de wetenschappelijke notatie met 6 significante cijfers.

7 Gegeven de functie $f(x) = x^{-\frac{3}{4}}$.
a Bereken $f(\frac{1}{16})$, $f(\frac{16}{81})$, $f(1)$, $f(5\frac{1}{16})$ en $f(16)$.
b Teken de grafiek van f en die van de inverse functie van f in één figuur.
c Geef een functievoorschrift voor de inverse functie van f.
d Geef de asymptoten van de grafiek van de inverse functie van f.

TERUGKOPPELING

Uitwerking diagnostische toets

1 **a** $\frac{4}{7}-\frac{3}{5}=\frac{20}{35}-\frac{21}{35}=\frac{-1}{35}$

b $\frac{6}{7}:\frac{-2}{3}=\frac{6}{7}\cdot\frac{-3}{2}=\frac{-18}{14}=\frac{-9\cdot 2}{7\cdot 2}=-\frac{9}{7}$

c $x+\frac{3}{x+4}=0$

$x=\frac{-3}{x+4}$

$x(x+4)=-3$
$x^2+4x=-3$
$x^2+4x+3=0$
$(x+1)(x+3)=0$
$x=-1$ of $x=-3$
Controle bevestigt dat beide oplossingen voldoen.

2 **a** Voor alle x uit $\mathbb{R}$ is $f(x)$ gedefinieerd, dus het domein is $\mathbb{R}$.
b $f(x)=0$
$x^2-4=0$
$x^2=4$
$x=2$ of $x=-2$
c x^2 kan niet kleiner dan 0 zijn dus x^2-4 kan niet kleiner dan -4 zijn. De kleinste functiewaarde is -4.
d Het bereik is $[-4, \rightarrow\rangle$.
e Er geldt $f(3)=3^2-4=5$. Het punt (3, 4) ligt dus niet op de grafiek.

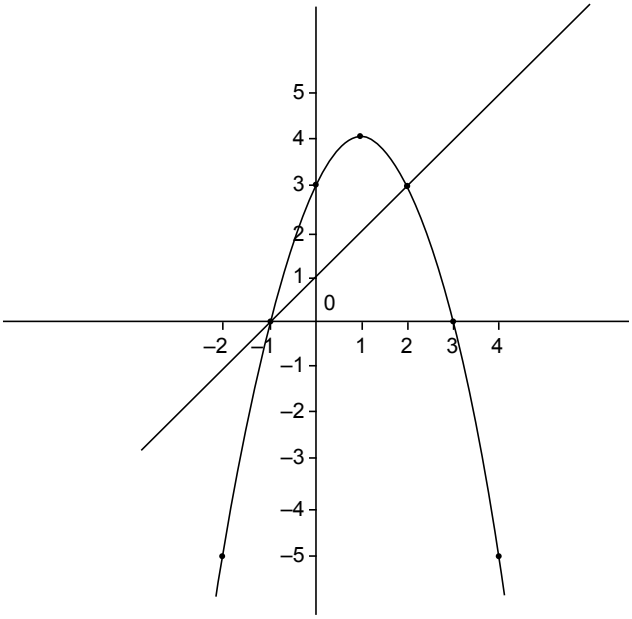
3 **a** De richtingscoëfficiënt is $a=\frac{4-1}{4-(-2)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
Het functievoorschrift is $f(x)=\frac{1}{2}x+b$.
Het punt (4, 4) ligt op de grafiek, dus er moet gelden:
$4=\frac{1}{2}\cdot 4+b$
Hieruit volgt $b=2$ en $f(x)=\frac{1}{2}x+2$
b Eerst bepalen we $f(x)=5$
$\frac{1}{2}x+2=5$
$\frac{1}{2}x=3$
$x=6$
De grafiek is stijgend, dus voor $x\leq 6$ geldt $f(x)\leq 5$.

cc BY NC ND

4 **a** We berekenen enkele punten.

x	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x) = -x^2 + 2x + 3$	−5	0	3	4	3	0	−5

We zetten de punten in de grafiek en tekenen daardoor de parabool.



b De symmetrieas bepalen we met $x = \frac{-b}{2a}$.

In dit geval is dat: $\frac{-2}{2 \cdot -1} = 1$. De vergelijking van de symmetrieas is $x = 1$.

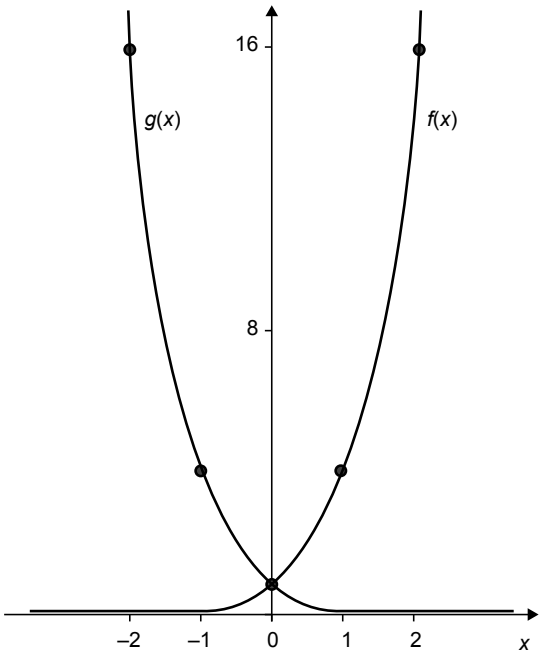
c In de grafiek in onderdeel a is ook de lijn $y = x + 1$ getekend.
We bepalen de x-coördinaten van de snijpunten van de lijn en de parabool.

$x + 1 = -x^2 + 2x + 3$
$x^2 - x - 2 = 0$
$(x - 2)(x + 1) = 0$
$x = 2$ of $x = -1$
Nu lezen we af dat $f(x) > x + 1$ voor $-1 < x < 2$.

5 **a** De afname in de opeenvolgende periodes was 12.500, 13.500 en 13.000. Deze aantallen zijn niet helemaal gelijk, maar wel bijna. Gemiddeld is de afname 13.000 per periode. In 2035 zijn er nog vier periodes verstreken, dus het inwoneraantal is dan $211.000 - 4 \cdot 13.000 = 159.000$.
b De groeifactor in de opeenvolgende periodes is 0,950, 0,943 en 0,942. Deze zijn ongelijk en de groei (afname) is niet echt exponentieel. Als we zouden rekenen met een groeifactor van 0,945 dan is het aantal inwoners in 2035 gelijk aan $211.000 \cdot (0{,}945)^4 \approx 168.270$.

6 **a** Berekening van enkele functiewaarden geeft:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 4^x$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16
$g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

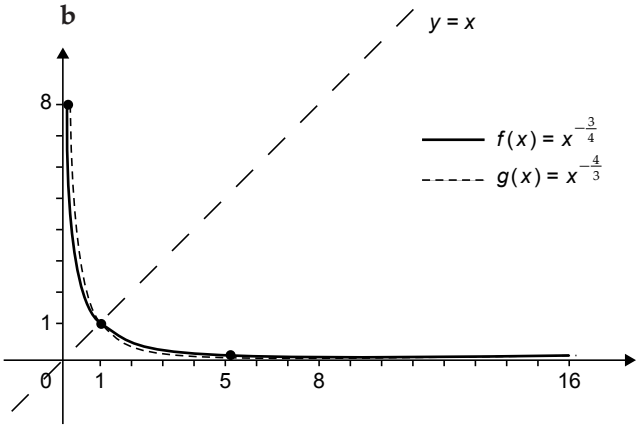


b Het domein is voor beide functies $\mathbb{R}$. Het bereik is voor beide $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
c We moeten de coördinaten van de snijpunten vinden. We moeten dus oplossen $4^x = \frac{1}{8}$. We herschrijven: $2^{2x} = 2^{-3}$, dus $2x = -3$, en $x = -\frac{3}{2}$. Het snijpunt van $f(x) = 4^x$ met de lijn $y = \frac{1}{8}$ is dus $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{8})$. Het snijpunt met $g(x)$ is $(\frac{3}{2}, \frac{1}{8})$. De afstand tussen de snijpunten is 3.
d $f(100) = 4^{100} = 1{,}60694 \times 10^{60}$
$g(100) = (\frac{1}{4})^{100} = 6{,}22302 \times 10^{-61}$.

7 **a**

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{16}{81}$	1	$5\frac{1}{16}$	16
$f(x) = x^{-\frac{1}{4}}$	8	$3\frac{3}{8}$	1	$\frac{8}{27}$	$\frac{1}{8}$

b



c De inverse functie van $f(x) = x^{-\frac{3}{4}}$ is $g(x) = x^{-\frac{4}{3}}$.
d De asymptoten van de grafiek van f zowel als van de grafiek van de inverse functie van f zijn de x-as en de y-as.

cc BY NC ND

Getallenverzamelingen en algebra

Introductie *15*

Leerkern *16*

1 Natuurlijke getallen *16*
2 Gehele getallen *20*
3 Rationele getallen *26*
4 Machten en wortels *34*
5 Reële getallen *31*
6 Samengestelde bewerkingen en de distributieve eigenschap *38*
7 Eigenschappen van machten *45*
8 Berekeningen met wortels *48*
9 Vergelijkingen *50*
10 Eerstegraads vergelijkingen *52*
11 Tweedegraads vergelijkingen *53*
12 Andere types vergelijkingen *61*

Samenvatting *62*

Zelftoets *65*



cc BY NC ND

Leereenheid 1

Getallenverzamelingen en algebra

INTRODUCTIE

Voor het bestuderen van de wiskunde hebt u gereedschappen nodig: getallen en rekenmethodes met getallen. In deze leereenheid zetten we de getallenverzamelingen die we daarbij gebruiken op een rijtje en bespreken we een aantal eigenschappen van de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen van getallen. Ook introduceren we het begrip vergelijking en bespreken we een aantal technieken voor het oplossen van vergelijkingen.
De behandeling van de leerstof is hier en daar zeer beknopt en er zijn, met name in de eerste paragrafen, niet al te veel opgaven. Voor een uitgebreidere behandeling van de hier besproken leerstof verwijzen we naar hoofdstuk 1 t/m 4 en appendix A van *Wiswijs* (Fred Pach en Hans Wisbrun, *Wiswijs* (derde druk), Noordhof, 2010 ISBN 9789001788537. De tweede druk uit 2004 is vrijwel identiek). Deze hoofdstukken bevatten ook veel opgaven. Opgaven 11 t/m 13 van hoofdstuk 7 bieden extra oefening voor de *abc*-formule. Extra oefenopgaven zijn ook te vinden in de hoofdstukken 1 t/m 5 en 9 t/m 11 van het *Basisboek Wiskunde* (Jan van de Craats en Rob Bosch, *Basisboek Wiskunde* (tweede editie), Pearson Education 2010 ISBN 9789043016735).

LEERDOELEN

Na bestudering van deze appendix

- kent u de getallenverzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ en weet u wat het onderscheid is tussen deze getallenverzamelingen
- kent u de intervalnotatie voor deelverzamelingen van $\mathbb{R}$
- kent u de commutatieve eigenschap en de associatieve eigenschap van de optelling en de vermenigvuldiging
- weet u dat de aftrekking en de deling niet commutatief zijn en ook niet associatief
- kent u de begrippen macht, wortel en hogeremachtswortel
- weet u waarom $\sqrt{-4}$ in de reële getallen niet bestaat en weet u dat er geen reëel getal is waarvan de wortel gelijk is aan –4.
- kent u de volgorde waarin samengestelde bewerkingen als $3+4\cdot 5^2$ moeten worden uitgevoerd
- weet u dat de voorgeschreven volgorde van bewerkingen aangepast kan worden door haakjes te plaatsen
- kent u de distributieve eigenschap voor de optelling en de vermenigvuldiging en kunt u deze gebruiken voor het wegwerken van haakjes
- weet u dat u de distributieve eigenschap met enige voorzichtigheid ook kan toepassen bij aftrekkingen en delingen
- kent u de eigenschappen van machten en weet u dat deze gebruikt worden voor het plaatsen of wegwerken van haakjes bij vermenigvuldigingen en delingen met machten

BY NC ND

- weet u wat in de wiskunde onder een vergelijking wordt verstaan en kunt u de graad van een vergelijking bepalen
- kent u de stappen die toegestaan zijn bij het oplossen van een vergelijking
- kunt u deze stappen toepassen om eerstegraads vergelijkingen op te lossen
- kunt u eenvoudige tweedegraads vergelijkingen oplossen door te ontbinden in factoren
- kunt u tweedegraads vergelijkingen ook oplossen met de *abc*-formule.

LEERKERN

1 Natuurlijke getallen

Wiskunde begint met getallen. Het aantal bomen langs een weg, de waarde van het geld in uw portemonnee in euro's, uw gewicht in kg: deze grootheden kunnen alle worden uitgedrukt in een getal. In deze drie voorbeelden zien we direct een belangrijk verschil tussen soorten getallen. Het aantal bomen langs een weg kan 1, 2, 3, 4 etc. zijn, maar er kunnen ook geen bomen langs de weg staan. Dan is het aantal 0. We spreken hier van de *natuurlijke getallen*. Deze duiden we aan met de letter $\mathbb{N}$.

Natuurlijke getallen

$\mathbb{N}$ is dus de verzameling getallen 0, 1, 2, 3, 4, ……

Voor de andere twee voorbeelden is de uitkomst meestal geen natuurlijk getal. Als u 5 cent in uw portemonnee hebt, dan is de waarde in euro's 0,05 en uw gewicht zal nooit precies een geheel aantal kg zijn.

VOORBEELD 1.1
Natuurlijke getallen optellen

De optelling (en later ook de aftrekking) illustreren we met het voorbeeld van drie vrienden, die samen op vakantie willen. Zij besluiten daarom om een gemeenschappelijke bankrekening te openen, waarop elk van hen zijn vakantiegeld stort. Stel dat de eerste vriend 500 euro vakantiegeld heeft en de tweede vriend 300, dan staat er uiteindelijk in totaal 500 + 300 = 800 euro op de bankrekening.

Som
Termen

In dit voorbeeld is 500 + 300 de *som* van de *termen* 500 en 300.
Het resultaat van deze optelling is weer een natuurlijk getal.
We zeggen: de uitkomst van de som 500 + 300 is 800 of kortweg: de som van 500 en 300 is 800.

VOORBEELD 1.1
(vervolg)

Het kan natuurlijk ook zijn dat de eerste vriend 300 euro vakantiegeld heeft en de tweede vriend 500. Dan staat er in totaal 300 + 500 euro op de vakantierekening. Merk op dat hoewel er in beide gevallen uiteindelijk 800 euro op de vakantierekening staat, de manier waarop dit bedrag tot stand gekomen is verschillend is voor beide situaties. De optelling 500 + 300 is dus een andere optelling dan 300 + 500, maar de uitkomst van beide optellingen is gelijk.

Door in dit voorbeeld 300 te vervangen door een willekeurig getal a en 500 te vervangen door een willekeurig getal b, kunnen we zien dat deze eigenschap algemeen geldig is.

Commutatieve eigenschap

De hier gevonden eigenschap wordt de *commutatieve eigenschap* van de optelling genoemd: Voor alle getallen a en b heeft de som $a + b$ dezelfde uitkomst als de som $b + a$.
In formule: $a + b = b + a$.

De bovenstaande interpretatie geeft ook een betekenis aan optellingen als 0 + 800 en 800 + 0.
0 + 800 betekent: de eerste vriend stort niets en de tweede stort 800 euro.
800 + 0 betekent: de eerste vriend stort 800 euro en de tweede vriend stort niets. In beide gevallen is de uitkomst uiteraard dat er 800 euro op de vakantierekening staat.
Voor alle getallen a geldt $0 + a = a + 0 = a$.

VOORBEELD 1.1
(vervolg)

De derde vriend moet ook nog zijn bijdrage leveren. Hij heeft 400 euro vakantiegeld ter beschikking.
Als hij dit stort nadat de eerste twee vrienden hun bijdrage gestort hebben, dan berekenen we het totale saldo van de vakantierekening met de formule (500 + 300) + 400. De haakjes geven aan dat eerst het vakantiegeld van de eerste twee vrienden opgeteld moeten worden, en dat het vakantiegeld van de derde vriend daar weer bij opgeteld moet worden. Het saldo van de vakantierekening wordt dan (500 + 300) + 400 = 800 + 400 = 1200 euro.
De derde vriend kan echter ook zijn bijdrage eerst aan de tweede vriend geven, die vervolgens de som van deze twee bijdragen toevoegt aan het vakantiegeld dat de eerste vriend al gestort heeft. Het totale saldo van de vakantierekening wordt dan berekend met de formule 500 + (300 + 400), met als uitkomst 500 + 700 = 1200.
We zien dat de volgorde waarin we de bijdragen van de drie vrienden optellen niet uitmaakt: (500 + 300) + 400 = 500 + (300 + 400).

Noemen we in dit voorbeeld de bijdrage van de eerste vriend a, die van de tweede vriend b en die van de derde vriend c, dan zien we dat ook deze eigenschap algemeen geldig is.

Associatieve eigenschap

De hier besproken eigenschap heet de *associatieve eigenschap* van de optelling: Voor alle getallen a, b en c heeft de som $(a + b) + c$ dezelfde uitkomst als de som $a + (b + c)$.
In formule: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Opmerking

Als er in een som met meer dan twee termen geen haakjes staan, dan moeten we deze van links naar rechts uitwerken. De optelling $a + b + c$ komt dus formeel overeen met $a + (b + c)$. De associatieve eigenschap houdt in dat we dit ook kunnen uitrekenen als $a + (b + c)$.

VOORBEELD 1.2
Natuurlijke getallen vermenigvuldigen

Als illustratie van de vermenigvuldiging (en later ook van de deling) kijken we naar een groep van acht vrienden, die iedere maand bij één van hen thuis eten. Ze besluiten de kosten te delen en spreken af dat elk van hen iedere maand 20 euro in een gemeenschappelijke pot stort. Het beschikbare budget is dus 20 euro × 8 = 160 euro per maand.

Product
Factoren

In dit voorbeeld is 20 × 8 het *product* van de *factoren* 20 en 8.
Het resultaat van deze vermenigvuldiging is weer een natuurlijk getal.
We zeggen: de uitkomst van het product 20 × 8 is 160, of kortweg het product van 20 en 8 is 160.

CC BY NC ND

Ook zien we dat de producten 20×8 en 8×20 een gelijke uitkomst hebben. Door het aantal vrienden en het bedrag dat zij per maand in de pot storten aan te passen, is makkelijk in te zien dat dit geldt voor alle getallen a en b.

Commutatieve eigenschap

De vermenigvuldiging heeft dus, net als de optelling, de *commutatieve eigenschap*: Voor alle getallen a en b heeft het product $a \times b$ dezelfde uitkomst als het product $b \times a$.
In formule: $a \times b = b \times a$,

Als één van de factoren van een product 0 is, dan is het product zelf ook 0. Als 0 vrienden 20 euro betalen, zit er nog steeds niets in de pot en als 8 vrienden 0 euro betalen, zit er ook niets in de pot.
Als één van de factoren in een product 1 is, dan is de uitkomst van het product gelijk aan de andere factor. Als 1 vriend 20 euro betaalt, zit er 20 euro in de pot en als 8 vrienden ieder 1 euro betalen, zit er 8 euro in de pot.
Voor alle getallen a geldt $0 \times a = a \times 0 = 0$ en $1 \times a = a \times 1 = a$.

VOORBEELD 1.2 *(vervolg)*

Als we willen weten hoeveel geld onze acht vrienden in een jaar in totaal in de pot storten, dan kunnen we dit op diverse manieren berekenen:
– bereken hoeveel de vrienden iedere maand in de pot storten en vermenigvuldig dit met 12,
– bereken het aantal keer dat er 20 euro in de pot gestort wordt en vermenigvuldig 20 met dit getal.
De eerste berekening geeft $(20 \times 8) \times 12 = 160 \times 12 = 1920$, de tweede berekening geeft $20 \times (8 \times 12) = 20 \times 96 = 1920$.
Voor het totale bedrag dat in de pot gestort wordt maakt het natuurlijk niet uit op welke manier dit berekend wordt. Er wordt in totaal altijd 1920 euro in de pot gestort.

Door het bedrag per maand (a), het aantal vrienden (b) en het aantal maanden (c) aan te passen, kunnen we eenvoudig zien dat ook dit algemeen geldig is.

Associatieve eigenschap

De vermenigvuldiging heeft dus ook de *associatieve eigenschap*: Voor alle getallen a, b en c heeft het product $(a \times b) \times c$ dezelfde uitkomst als het product $a \times (b \times c)$.
In formule: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

In plaats van het vermenigvuldigingsteken $\times$ wordt ook vaak een gecentreerde punt gebruikt. In plaats van $3 \times 4 = 4 \times 3$ schrijven we dan $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$ en in plaats van $a \times b = b \times a$ schrijven we $a \cdot b = b \cdot a$.
Als er geen verwarring kan ontstaan, wordt het vermenigvuldigingsteken vaak zelfs helemaal weggelaten. De associatieve eigenschap van de vermenigvuldiging wordt dan geschreven als $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ of kortweg als $(ab)c = a(bc)$. Omdat de volgorde waarin de vermenigvuldigingen worden uitgevoerd niet uitmaakt, schrijven we hiervoor meestal simpelweg abc.
Tussen twee getallen moet er wel altijd een vermenigvuldigingsteken staan: in plaats van $(3 \times 4) \times 5 = 12 \times 5 = 60$ kunnen we schrijven $(3 \cdot 4) \cdot 5 = 12 \cdot 5 = 60$ of zelfs $(3 \cdot 4)\, 5 = 12 \cdot 5 = 60$, maar niet $(34)\, 5 = 12\, 5 = 60$.

VOORBEELD 1.3
Natuurlijke getallen aftrekken

Onze drie vrienden uit voorbeeld 1.1 hebben aan het begin van hun vakantie 1200 euro op de vakantierekening staan. Zij beschikken ieder over een pasje waarmee ze geld kunnen opnemen van deze rekening.
Op de eerste dag neemt de eerste vriend 700 euro op.
Het saldo van de rekening wordt daardoor 700 euro kleiner.
Het nieuwe saldo wordt berekend met de aftrekking 1200 – 700 = 500.

Verschil
Termen

In dit voorbeeld is $1200 - 700$ het *verschil* van de *termen* 1200 en 700.
We zeggen: de uitkomst van het verschil 1200 – 700 is 500 of kortweg: het verschil van 1200 en 700 is 500.

Merk op dat de aftrekking 1200 – 700 = 500 de omgekeerde bewerking is van de optelling 500 + 700 = 1200. In het kader van voorbeelden 1.1 en 1.3 kunnen we zeggen dat de eerste vriend precies het bedrag opneemt dat de tweede en de derde vriend samen hebben gestort, met als resultaat dat alleen het geld dat hijzelf gestort heeft nog op de vakantierekening staat.

VOORBEELD 1.3
(vervolg)

De tweede vriend heeft niet gehoord hoeveel de eerste vriend heeft opgenomen en hij wil ook 700 euro opnemen. Aangezien onze vrienden in een ver land zijn waar ze de taal nauwelijks spreken, begrijpt hij alleen dat dit om één of andere reden niet mogelijk is.
De derde vriend neemt contact op met zijn eigen bank en hij krijgt het voor elkaar om de vakantierekening te koppelen aan zijn eigen bankrekening. Nu lukt het opeens wel om 700 euro op te nemen.

Wiskundig gezien is het probleem van de tweede vriend dat de uitkomst van de aftrekking 500 – 700 geen natuurlijk getal is. Blijkbaar is dat probleem opgelost doordat de actie van de derde vriend het mogelijk gemaakt heeft om rood te staan op de vakantierekening. Wiskundig gezien heeft de derde vriend het mogelijk gemaakt dat het saldo op deze rekening een negatief getal is.

Om aftrekkingen als 500 – 700 mogelijk te maken, moeten we onze getallenverzameling dus uitbreiden met de negatieve gehele getallen –1, –2, –3, –4, etc.
In paragraaf 2 gaan we verder in op de verzameling $\mathbb{Z}$, de getallenverzameling die alle natuurlijke getallen en alle negatieve gehele getallen omvat, en op het rekenen met negatieve getallen.

VOORBEELD 1.4
Delingen met natuurlijke getallen

De acht vrienden uit voorbeeld 1.2 maken jaarlijks de financiële balans op. Aangezien onze vrienden geen rekenwonders zijn, neemt de laatste gastheer van het jaar het bedrag dat er nadat hij zijn kosten heeft betaald nog in de pot zit, contant mee naar het laatste etentje. De vrienden denken daarbij alle problemen met het verdelen van het geld voor te zijn door dit bedrag in losse euro's op tafel te leggen. De eerste keer lukt dat ook: ze hebben precies 24 euro over. In het tweede jaar worden ze echter geconfronteerd met een probleem: er is dat jaar 22 euro over.

In dit voorbeeld wordt het aantal euro's dat elk van de vrienden in het eerste jaar terugkrijgt, berekend met de deling 24 : 8 = 3.

Quotiënt
Deeltal
Deler

24 : 8 is het *quotiënt* van het *deeltal* 24 en de *deler* 8.
We zeggen: de uitkomst van het quotiënt 24 : 8 is 3, of kortweg het quotiënt van 24 en 8 is 3.

BY NC ND

Net zoals de aftrekking de omgekeerde bewerking is van de optelling, is de deling de omgekeerde bewerking van de vermenigvuldiging: als de 8 vrienden hun 3 euro weer bij elkaar leggen, hebben ze in totaal weer $3 \times 8 = 24$ euro.
Op dezelfde manier volgt $6 : 3 = 2$ want $2 \times 3 = 6$ en $40 : 5 = 8$ want $8 \times 5 = 40$.

Het probleem in het tweede jaar is dat de uitkomst van de deling $22 : 8$ geen natuurlijk getal is: er is immers geen natuurlijk getal dat als je het met 8 vermenigvuldigt het product 22 oplevert.
Eén van de vrienden heeft een oplossing voor dit probleem bedacht: hij neemt een grote zak met munten van 5 cent mee en hij wisselt 6 van de 22 euro's om voor 120 munten van 5 cent. Ieder krijgt dan $16 : 8 = 2$ euro's en $120 : 8 = 15$ munten van 5 cent. In totaal krijgt ieder dus 2 euro en 15×5 cent = 2 euro en 75 cent.

Wiskundig gezien komt de oplossing van deze vriend erop neer dat hij het mogelijk maakt dat de uitkomst van de deling niet een natuurlijk getal is, maar een breuk.
In paragraaf 3 geven we een formele definitie van de verzameling $\mathbb{Q}$, de getallenverzameling waar ook de breuken deel van uitmaken, en gaan we nader in op het rekenen met breuken.

2 Gehele getallen

In paragraaf 1 zijn de negatieve getallen –1, –2, –3, –4 etc. geïntroduceerd om aftrekkingen als $4 - 7$ mogelijk te maken. Deze negatieve gehele getallen vormen samen met de natuurlijke getallen de verzameling van de *gehele getallen*. Deze verzameling wordt aangeduid met de sierletter $\mathbb{Z}$.

Gehele getallen

$\mathbb{Z}$ bestaat dus uit
- de positieve gehele getallen: 1, 2, 3, 4 etc.
- de negatieve gehele getallen: –1, –2, –3, –4 etc.
- en het getal 0, dat noch positief noch negatief is.

Neutrale getal

0 wordt ook wel het *neutrale getal* genoemd.

Opmerking

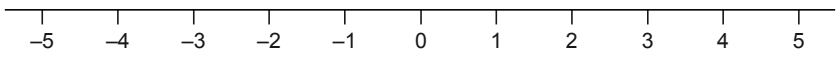
In paragraaf 1 hebben we gezien dat de verzameling van de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ bestaat uit de positieve gehele getallen samen met het getal 0. Ieder natuurlijk getal is dus ook een geheel getal. We zeggen daarom ook wel dat $\mathbb{N}$ een deelverzameling is van $\mathbb{Z}$.

Deelverzameling

In deze paragraaf bekijken we het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met gehele getallen. Aangezien we deze bewerkingen voor natuurlijke getallen al besproken hebben, ligt de nadruk hierbij vooral op het rekenen met negatieve gehele getallen.

Om het optellen en aftrekken van negatieve getallen te illustreren, maken we van een *getallenlijn*. Dat is een (meestal horizontale) rechte lijn waarop op een zeker punt het getal 0 is aangegeven. Rechts van het getal 0 geven we dan op gelijke afstanden de getallen 1, 2, 3, 4 etc. aan, links van het getal 0 komen de getallen –1, –2, –3, –4 etc., ook weer op gelijke afstanden.

Getallenlijn



FIGUUR 1.1 Getallenlijn met gehele getallen

Voordat we gaan optellen en aftrekken bespreken we een andere toepassing van de getallenlijn: de *ordening van de gehele getallen*.
De natuurlijke getallen hebben een natuurlijke ordening: 10 is groter dan 9, maar kleiner dan 100. We noteren dit als $10 > 9$ en $10 < 100$.
Voor negatieve getallen is de ordening niet zo natuurlijk. Is –100 groter dan –10, of juist kleiner? De getallenlijn maakt het mogelijk om precies aan te geven wat er in dit verband in de wiskunde onder de begrippen groter en kleiner wordt verstaan.
Voor positieve getallen is het duidelijk dat $a < b$ betekent dat a links van b op de getallenlijn ligt en dat $b > a$ betekent dat het getal b op de getallenlijn rechts van het getal a ligt.
Voor het geval dat a en b beide negatief zijn en voor het geval dat a negatief en b positief is, definiëren we de begrippen groter en kleiner op precies dezelfde manier:

Kleiner, <

–100 ligt op de getallenlijn links van –10, dus zeggen we dat –100 *kleiner* is dan –10.

Groter, >

1 ligt op de getallenlijn rechts van het getal –1000, dus zeggen we dat 1 *groter* is dan –1000.
Dit noteren we als $-100 < -10$ en $1 > -1000$.

VOORBEELD 1.5
Optellingen met negatieve getallen

Als er op de vakantierekening van onze drie vrienden uit voorbeeld 1.1 500 euro staat en iemand stort 100 euro op deze rekening, dan is het nieuwe saldo 600 euro.
Als onze drie vrienden echter 200 euro rood staan op hun vakantierekening en er stort iemand 100 euro bij, dan is er nog een tekort van 100 euro. Het nieuwe saldo is dan –100 euro.
En als onze drie vrienden 200 euro rood staan op hun vakantierekening en er stort iemand 500 euro bij, dan is het resultaat een positief saldo 300 euro.

Als we een positief getal optellen bij een ander getal, dan maken we dit begingetal *groter*. Op de getallenlijn ligt de uitkomst dan *rechts* van het begingetal.
Bij de optelling 500 + 100 is het begingetal 500 en maken we dit 100 groter. De uitkomst van deze som is 600. Op de getallenlijn ligt deze uitkomst 100 eenheden rechts van 500.
Bij de optelling –200 + 100 is het begingetal –200 en maken we dit 100 groter. Op de getallenlijn ligt de uitkomst dan 100 eenheden rechts van het begingetal. De uitkomst van deze som is dus –100.
Op dezelfde manier volgt –15 + 9 = –6 en –10 + 1 = –9.
De uitkomst van de optelling $-200 + 500$ vinden we op de getallenlijn door 500 eenheden naar rechts te gaan vanuit het begingetal –200. De uitkomst is dan 300.
Op dezelfde manier volgt –5 + 9 = 4 en –90 + 101 = 11.

VOORBEELD 1.6

Teruggekomen van de vakantie wil de derde vriend, die de vakantierekening gekoppeld had aan zijn eigen bankrekening, de vakantierekening opheffen. Het saldo van de opgeheven rekening wordt dan bij het saldo van zijn eigen rekening gevoegd.
Als het saldo van beide rekeningen positief is, dan wordt het nieuwe saldo berekend door twee positieve getallen op te tellen, maar als het saldo van één van beide rekeningen negatief is, dan krijgen we een optelling van een positief en een negatief getal. En als beide saldi negatief zijn, dan krijgen we een optelling van twee negatieve getallen.

cc BY NC ND

Neem om te beginnen aan dat het saldo op de eigen rekening van de derde vriend 400 euro is en dat het saldo op de vakantierekening –200 euro is (zie ook voorbeeld 1.3). Het nieuwe saldo wordt dan 200 euro. De uitkomst van de optelling 400 + (–200) is blijkbaar 200.
Als onze derde vriend op zijn eigen rekening al 200 euro rood staat en er op de vakantierekening ook een negatief saldo is van 200 euro, dan is het nieuwe saldo een tekort van 400 euro. De uitkomst van de optelling –200 + (–200) is dus –400.

In dit voorbeeld zien we dat als we een negatief getal optellen bij een ander getal, dit begingetal *kleiner* gemaakt wordt. Op de getallenlijn ligt de uitkomst dan *links* van het begingetal.
Bij de optelling 400 + (–200) is het begingetal 400 en maken we dit 200 kleiner. Op de getallenlijn ligt de uitkomst dan 200 eenheden links van 400, dat is bij 200. De uitkomst van de som 400 + (–200) is dus 200.
Op dezelfde manier volgt 9 + (–4) = 5 en 100 + (–20) = 80.
Bij de optelling –200 + (–200) is het begingetal –200 en maken we dit 200 kleiner. Op de getallenlijn ligt de uitkomst 200 eenheden links van –200, dat is bij –400. De uitkomst van de som –200 + (–200) is dus –400.
Op dezelfde manier volgt –2 + (–7) = –9 en –1000 + (–100) = –1100.
De uitkomst van de optelling 2 + (–5) kunnen we vinden door het begingetal 2 eerst 2 kleiner te maken, zodat we uitkomen op 0, en dit getal daarna 3 kleiner te maken, zodat we uitkomen op –3. In totaal hebben we het getal 2 dan met 2 + 3 = 5 verlaagd.
Op dezelfde manier volgt 5 + (–9) = –4 en 99 + (–100) = –1.

Opmerking

In bovenstaande voorbeelden zijn vaak haakjes geplaatst rond de negatieve getallen. Dit is niet noodzakelijk, de bewerking 8 + –5 kan niet anders gelezen worden dan de som van de termen 8 en –5, maar de haakjes bevorderen wel de leesbaarheid.

OPGAVE 1.1
Bereken:

a	–4 + 5	c	4 + (–5)	e	–4 + (–5)
b	–5 + 4	d	5 + (–4)	f	–5 + (–4)

Aftrekkingen met negatieve getallen

In paragraaf 1 hebben we geconstateerd dat de aftrekking de omgekeerde bewerking is van de optelling.
Als we een positief getal optellen bij een ander getal, dan maken we dit begingetal groter. De som ligt dan rechts van het begingetal op de getallenlijn. Als we een positief getal aftrekken van een ander getal, dan maken we dit begingetal juist *kleiner*. Het verschil ligt dan dus *links* van het begingetal op de getallenlijn.
Bij de aftrekking 7 – 4 is het begingetal 7 en maken we dit begingetal 4 kleiner. De uitkomst van dit verschil is 3. Op de getallenlijn ligt deze uitkomst 4 eenheden links van 7.
Bij de aftrekking 2 – 4 is het begingetal 2 en maken we dit begingetal 4 kleiner. Op de getallenlijn ligt de uitkomst dan 4 eenheden links van het begingetal. De uitkomst van dit verschil is dus –2.
Op dezelfde manier volgt 15 – 16 = –1 en 10 – 100 = –90.
De uitkomst van de aftrekking –3 – 4 vinden we op de getallenlijn door 4 eenheden naar links te gaan vanuit het begingetal –3. De uitkomst is dan –7.

Op dezelfde manier volgt –5 – 9 = –14 en –90 – 101 = –191.
Voor aftrekkingen met negatieve getallen herhalen we deze redenering met een kleine aanpassing. Als we een negatief getal optellen, is de som kleiner dan het begingetal. De som ligt dan dus links van het begingetal op de getallenlijn. Als we een negatief getal aftrekken, dan moeten we deze bewerking omkeren. Het verschil is dan dus *groter* dan het begingetal. Op de getallenlijn ligt het verschil dan *rechts* van het begingetal.
Bij de aftrekking 8 – (–5) is het begingetal 8 en maken we dit 5 groter. Op de getallenlijn ligt de uitkomst dan 5 eenheden rechts van 8, dat is bij 13. De uitkomst van het verschil 8 – (–5) is dus 13. De aftrekking 8 – (–5) = 13 is dus de omgekeerde bewerking van de optelling 13 + (–5) = 8.
Op dezelfde manier volgt 9 – (–4) = 13 en 100 – (–20) = 120.
Bij de aftrekking –10 – (–5) is het begingetal –10 en maken we dit 5 groter. Op de getallenlijn ligt de uitkomst 5 eenheden rechts van –10, dat is bij –5. De uitkomst van het verschil –10 – (–5) is dus –5. De aftrekking –10 – (–5) = –5 is dus de omgekeerde bewerking van de optelling –5 + (–5) = –10.
Op dezelfde manier volgt –7 – (–2) = –5 en –1000 – (–100) = –900, maar ook –2 – (–7) = 5 en –100 – (–110) = 10.

OPGAVE 1.2
Bereken:

a	3 – 9	c	3 – (–9)	e	–3 – (–9)
b	9 – 3	d	9 – (–3)	f	–9 – (–3)

Tegenstelde

Twee getallen die op de getallenlijn even ver van het getal 0 liggen, maar elk aan een andere kant, worden elkaars *tegengestelde* genoemd. Het tegengestelde van 1 is bijvoorbeeld –1 en het tegengestelde van –7 is 7. Het tegengestelde van een getal a wordt aangeduid als $-a$.

OPGAVE 1.3
a Wat is het tegengestelde van het getal 8? en van –9?
b Het tegengestelde van het getal –3 kunnen we noteren we als –(–3).
Weet u ook een eenvoudiger notatie voor het tegengestelde van –3?
c Is het getal $–a$ altijd negatief?
d Enig idee wat het tegengestelde van het getal 0 is?

Een kenmerkende eigenschap van een getal en zijn tegengestelde is dat hun som gelijk is aan 0:
–5 + 5 = 0, 7 + (–7) = 0, 101 + (–101) = 0, –1000 + 1000 = 0, etc.

Met behulp van het tegengestelde kunnen optellingen worden omgezet in aftrekkingen en kunnen aftrekkingen worden omgezet in optellingen:
8 + (–5) = 8 – 5 = 3 (in beide bewerkingen gaan we 5 naar links op de getallenlijn);
8 – (–5) = 8 + 5 = 13 (in beide bewerkingen gaan we 5 naar rechts op de getallenlijn);
–8 – 3 = –8 + (–3) = –11 (in beide bewerkingen gaan we 3 naar links op de getallenlijn);
–8 – (–3) = –8 + 3 = –5 (in beide bewerkingen gaan we 3 naar rechts op de getallenlijn).

CC BY NC ND

Algemeen geldt:
Aftrekken van een getal is optellen van het tegengestelde.
In formule: $a - b = a + (-b)$

Optellen van een getal is aftrekken van het tegengestelde.
In formule: $a + b = a - (-b)$

OPGAVE 1.4
Bereken op een handige manier

a $7 - (-3)$ c $-7 - 3$
b $7 + (-3)$ d $-7 - (-3)$

VOORBEELD 1.7
Vermenigvuldigingen met gehele getallen

Kijk weer naar de acht vrienden die iedere maand bij één van hen thuis een etentje houden.
In een zeker jaar pakken de gastheren nogal uit en geven zij elk 200 euro uit per etentje. Omdat de maandelijkse inleg nog steeds 20 euro × 8 = 160 euro is, komt de pot iedere maand 40 euro te kort. Na een jaar is het tekort dan opgelopen tot 40 euro × 12 = 480 euro. Als we het tekort noteren als een negatief saldo, dan krijgen we zo de vermenigvuldiging $-40 \times 12 = -480$.

In bovenstaand voorbeeld wordt geïllustreerd dat het product van het negatieve getal –40 en het positieve getal 12 gelijk is aan –480. Dit product is dus negatief.

Dit geldt algemeen, bijvoorbeeld $-4 \times 3 = -12$ en $-5 \times 20 = -100$, maar ook $3 \times -2 = -6$ en $7 \times -9 = -63$.

Merk op dat $-40 \times 12 = -480 = -(40 \times 12)$, $-4 \times 3 = -12 = -(4 \times 3)$, $3 \times -2 = -6 = -(3 \times 2)$, etc.
Als we het tegengestelde nemen van één van de factoren in een product, dan is het resultaat dus het tegengestelde van het oorspronkelijke product. Passen we dit principe toe op het product -40×-12, dan krijgen we $-40 \times -12 = -(-40 \times 12) = -(-480) = 480$.
Op dezelfde manier volgt: $-4 \times -3 = -(-4 \times 3) = -(-12) = 12$ en $-3 \times -2 = -(3 \times -2) = -(-6) = 6$.

We zien:
– Het product van een negatief getal en een positief getal is negatief.
– Het product van twee negatieve getallen is positief.

De verschillende mogelijkheden worden schematisch vaak als volgt weergegeven:
positief × *positief* = *positief*
positief × *negatief* = *negatief*
negatief × *positief* = *negatief*
negatief × *negatief* = *positief*

Opmerking 1

In bovenstaande voorbeelden zijn geen haakjes geplaatst rond de negatieve getallen die als tweede factor in een product staan. Dit is ook niet nodig, met 8×-40 wordt duidelijk het product van de getallen 8 en –40 bedoeld. Gebruiken we de punt als vermenigvuldigingsteken, dan is het wel raadzaam om haakjes te gebruiken. Een punt kan, zeker in geschreven berekeningen, makkelijk over het hoofd gezien worden en dan wordt het product $8 \cdot -40$ makkelijk gelezen als het verschil $8 - 40$. Dit misverstand kunnen we voorkomen door te schrijven $8 \cdot (-40)$.

Opmerking 2

De uitkomst van het product -1×4 is -4, het tegengestelde van 4.
De uitkomst van het product -5×-1 is 5, het tegengestelde van -5.
Als we een getal vermenigvuldigen met -1 is de uitkomst dus het tegengestelde van dat getal!

De bovenstaande regels voor het teken van een product kunnen makkelijk worden uitgebreid naar producten met 3 of meer factoren.

OPGAVE 1.5

Neem in deze opgave eerst $a = 7$, $b = -4$, $c = -1$ en $d = -3$.

a Is het product abc positief of negatief?

b Is het product $abcd$ positief of negatief?

c Wat kunt u zeggen over het teken van het product abc als a, b en c alle drie negatief zijn?

d En wat is het teken van het product $abcd$ als a, b, c en d alle vier negatief zijn?

e Wat is het teken van het product $abcd$ als $c = 0$?

VOORBEELD 1.8
Delingen met gehele getallen

Onze acht vrienden besluiten het tekort van de pot aan te vullen. Het tekort van 480 euro moet dus verdeeld worden over de acht vrienden. Er is dan dus een tekort van $480 : 8 = 60$ euro per persoon.
Als we het tekort aangeven als een negatief saldo, dan is het totale saldo -480 euro en het saldo per persoon -60 euro. De uitkomst van de deling $-480 : 8$ moet dus -60 zijn.
Dit kunnen we controleren door naar de omgekeerde bewerking te kijken: Als de acht vrienden ieder een saldo van -60 euro hebben, dan is het totale saldo $-60 \times 8 = -480$ euro.

In het algemeen geldt dat als we een negatief getal delen door een positief getal, de uitkomst weer negatief is: $-4 : 2 = -2$, $-12 : 3 = -4$, $-20 : 4 = -5$, etc.
Ook hier kunnen we ter controle kijken naar de omgekeerde bewerkingen: $-2 \times 2 = -4$; $-4 \times 3 = -12$ en $-5 \times 4 = -20$.

VOORBEELD 1.8
(vervolg)

Niet alle vrienden zijn even rijk, daarom besluiten ze dat het tekort verdeeld wordt over die vrienden die aangeven dat ze genoeg geld hebben. Deze vrienden krijgen dan wel ieder een even groot deel in het tekort.
Stel nu dat het tekort per rijke vriend 160 euro is. Hoeveel rijke vrienden zijn er dan?
Als we dit aantal berekenen met behulp van het totale saldo en het saldo per rijke vriend, dan is het aantal rijke vrienden gelijk aan de uitkomst van de deling $-480 : -160$. De uitkomst van deze deling is, zoals u hopelijk al gezien hebt 3.
We controleren dit weer door de bijbehorende vermenigvuldiging op te schrijven. Als er 3 vrienden zijn die ieder een saldo van -160 euro hebben, dan wordt het totale saldo gegeven door $-160 \times 3 = -480$.

Bij een deling met twee negatieve getallen, is de uitkomst dus weer positief. Ook dit geldt algemeen: $-4 : -2 = 2$, $-12 : -3 = 4$, $-20 : -4 = 5$, etc.
Ter controle kijken we naar de omgekeerde bewerkingen: $2 \times -2 = -4$; $4 \times -3 = -12$ en $5 \times -4 = -20$.

cc BY NC ND

Het is wat lastiger om op dezelfde manier een betekenis te geven aan de delingen $480 : -8$ en $480 : -160$, maar de uitkomsten van deze delingen kunnen we wel vinden door te kijken naar de bijbehorende vermenigvuldigingen: $-60 \times -8 = 480$, dus $480 : -8 = -60$ en $-3 \times -160 = 480$, dus $480 : -160 = -3$.
Voor het teken van de uitkomst van een deling gelden dus dezelfde regels als voor het teken van de uitkomst van een vermenigvuldiging:
positief : *positief* = *positief*
positief : *negatief* = *negatief*
negatief : *positief* = *negatief*
negatief : *negatief* = *positief*

Net als bij delingen met natuurlijke getallen, is de uitkomst van een deling met gehele getallen niet altijd een geheel getal. Als het tekort in de pot niet 480, maar 500 euro is, dan is het tekort per persoon niet een geheel aantal euro's. Het saldo per persoon is dan een negatieve breuk.

Opmerking

De situatie van voorbeeld 1.8 kan ook gebruikt worden om twee bijzondere delingen toe te lichten.
Als er slechts één vriend aangeeft dat hij rijk genoeg is om het tekort aan te vullen, dan is het tekort 480 euro per rijke vriend. De uitkomst van de deling $-480 : 1$ is dus gelijk aan –480.
Voor ieder getal a geldt $a : 1 = a$.

En als er geen vriend rijk genoeg is om het tekort aan te vullen, dan heeft de vriendengroep een probleem.

Delen door 0 is niet mogelijk. Immers, als een getal wordt gedeeld door 0, dan zou het resultaat vermenigvuldigd met 0 weer het oorspronkelijke getal op moeten leveren. Maar dat gaat niet, want een resultaat vermenigvuldigen met 0 geeft altijd weer 0. Dus delen door 0 kan niet.

3 Rationale getallen

Rationale getallen

Door de introductie van breuken is het mogelijk om een uitkomst te vinden voor delingen als $22 : 8$ en $-500 : 8$. De getallenverzameling waar ook de breuken bijhoren heet de verzameling van de *rationale getallen.* Zij wordt genoteerd met de sierletter $\mathbb{Q}$.
Formeel gesproken is ieder getal dat geschreven kan worden als de uitkomst van een deling van twee gehele getallen een rationaal getal. Aangezien voor ieder geheel getal a geldt dat de uitkomst van de deling $a : 1$ gelijk is aan a, zijn alle gehele getallen – en dus ook alle natuurlijke getallen – ook rationale getallen. De verzamelingen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$ zijn dus beide een deelverzameling van $\mathbb{Q}$.

Breuken worden meestal geschreven in de vorm $\frac{teller}{noemer}$, waarbij de teller een willekeurig geheel getal is en de noemer een positief geheel getal. Als de breuk negatief is, wordt het minteken ook vaak voor de breuk geschreven.

De uitkomst van de deling $1 : 2$ is de breuk $\frac{1}{2}$. Op de getallenlijn kunnen we deze deling weergeven door het deel van de getallenlijn tussen 0 en 1 in twee gelijke stukken op te delen. Het getal $\frac{1}{2}$ ligt dus halverwege 0 en 1 op de getallenlijn.

De plaats van de breuken $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ en $\frac{3}{4}$ vinden we door het deel van de getallenlijn tussen 0 en 1 in vier gelijke stukken op te delen. Merk op dat de breuk $\frac{2}{4}$ op dezelfde plaats ligt als de breuk $\frac{1}{2}$. Deze breuken hebben dus dezelfde waarde.

Op dezelfde manier vinden we de plaatsen van de breuken $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3}$ door het deel van de getallenlijn tussen 0 en 1 in drie gelijke stukken op te delen, en vinden we de plaatsen van breuken als $\frac{1}{9}$, $\frac{3}{9}$ en $\frac{6}{9}$ door het deel van de getallenlijn tussen 0 en 1 in negen gelijke stukken op te delen. Zo zien we dat de breuken $\frac{1}{3}$ en $\frac{3}{9}$ dezelfde waarde hebben en ook dat de breuken $\frac{2}{3}$ en $\frac{6}{9}$ dezelfde waarde hebben.

Opmerking

Algemeen geldt:
De waarde van een beuk verandert niet als we de teller en de noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigen of door hetzelfde getal delen.
In formule: $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} = \frac{a:c}{b:c}$

Breuken optellen en aftrekken

Formeel is er een verschil tussen de deling $3:9$ en de uitkomst van die deling, de breuk $\frac{3}{9}$.
In de praktijk maakt dit verschil niet zo veel uit en schrijven we de deling ook als $\frac{3}{9}$. De uitkomst van deze deling noteren we meestal in de meest vereenvoudigde vorm. Omdat de teller en de noemer beide gedeeld kunnen worden door 3 schrijven we in dit geval $\frac{3}{9} = \frac{3:3}{9:3} = \frac{1}{3}$.

Breuken waarvan de noemer gelijk is, kunnen we bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken door de tellers bij elkaar op te tellen of van elkaar af te trekken:

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{2+3}{5} = \frac{5}{5} \left(= 1\right)$$

$$\frac{2}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2-3}{5} = \frac{-1}{5} = -\frac{1}{5}$$

Gelijknamig maken

Breuken waarvan de noemers niet gelijk zijn, tellen we bij elkaar op door ze eerst *gelijknamig* te *maken* met behulp van de eigenschap die we hierboven besproken hebben:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{12}{15} - \frac{10}{15} = \frac{12-10}{15} = \frac{2}{15}$$

Bij optellingen of aftrekkingen met een geheel getal en een breuk kunnen we het gehele getal eerst schrijven als een breuk en vervolgens de breuken gelijknamig maken:

$$2 + \frac{3}{4} = \frac{2}{1} + \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8+3}{4} = \frac{11}{4}$$

$$3 - \frac{2}{3} = \frac{3}{1} - \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 3}{1 \cdot 3} - \frac{2}{3} = \frac{9}{3} - \frac{2}{3} = \frac{9-2}{3} = \frac{7}{3}$$

Gehelen uit een breuk halen

Breuken met een waarde groter dan 1 (of negatieve breuken met een waarde kleiner dan –1) worden vaak geschreven in de vorm $a\frac{b}{c}$, waarbij $\frac{b}{c}$ een breuk is met een waarde tussen 0 en 1.
Voor de breuk $\frac{7}{3}$ doen we dit door te schrijven $\frac{7}{3} = \frac{6+1}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$.
Voor de breuk $\frac{11}{4}$ doen we dit door de berekening hierboven om te keren. Zo krijgen we $\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4} = 2\frac{3}{4}$.

cc BY NC ND

Gehelen uit een breuk halen

Schrijven als één breuk

De omzetting van $\frac{11}{4}$ naar $2\frac{3}{4}$ noemen we *gehelen uit een breuk halen*.
De omzetting van $2\frac{3}{4}$ naar $\frac{11}{4}$ noemen we *schrijven als één breuk*.

VOORBEELD 1.9

In voorbeeld 1.4 moesten de acht vrienden van het eetclubje 22 euro verdelen.
We kunnen nu berekenen hoeveel elk van hen krijgt: $\frac{22}{8} = \frac{22:2}{8:2} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$.
Ieder krijgt dus 2 euro plus $\frac{3}{4}$ deel van een euro.
In voorbeeld 1.4 kregen de vrienden ieder 2 euro's en 15 munten van 5 cent, ofwel 2 euro en 75 cent. Dit is nog een aardige illustratie van het feit dat $\frac{75}{100}$ en $\frac{15}{20}$ gelijk zijn aan $\frac{3}{4}$ (er gaan honderd centen in 1 euro, dus $1 \text{ cent} = \frac{1}{100} \text{ euro}$, er gaan 20 munten van vijf cent in één euro, dus $5 \text{ cent} = \frac{1}{20} \text{ euro}$).

OPGAVE 1.6

Werk de volgende bewerkingen uit door eerst de termen als één breuk te schrijven en deze vervolgens gelijknamig te maken. Vereenvoudig het antwoord en/of haal de gehelen uit de breuk als dat mogelijk is.

a $3\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$ b $3\frac{2}{5}-\frac{3}{4}$ c $7\frac{1}{6}-6\frac{3}{4}$

Breuken vermenigvuldigen

Breuken worden met elkaar vermenigvuldigd door de tellers en de noemers met elkaar te vermenigvuldigen:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{9} = \frac{3\cdot 2}{4\cdot 9} = \frac{6}{36}\left(= \frac{6:6}{36:6} = \frac{1}{6}\right)$$

Om breuken als $2\frac{3}{4}$ en $2\frac{1}{3}$ te vermenigvuldigen moeten we ze eerst schrijven als één breuk:

$$2\tfrac{3}{4}\cdot 2\tfrac{1}{3} = \tfrac{11}{4}\cdot\tfrac{7}{3} = \tfrac{11\cdot 7}{4\cdot 3} = \tfrac{77}{12}\left(= \tfrac{72+5}{12} = \tfrac{72}{12}+\tfrac{5}{12} = 6+\tfrac{5}{12} = 6\tfrac{5}{12}\right)$$

$$3\tfrac{1}{2}\cdot\left(-\tfrac{3}{14}\right) = \left(3+\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(-\tfrac{3}{14}\right) = \left(\tfrac{6}{2}+\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(\tfrac{-3}{14}\right) = \tfrac{7}{2}\cdot\tfrac{-3}{14} = \tfrac{7\cdot(-3)}{2\cdot 14} = \tfrac{-21}{28} = \tfrac{-21:7}{28:7} = \tfrac{-3}{4} = -\tfrac{3}{4}$$

Merk op dat het product van een positieve breuk en een negatieve breuk weer negatief is. Op dezelfde manier kunnen we zien dat ook de andere regels over het teken van een product die we in paragraaf 2 besproken hebben gelden voor breuken, bijvoorbeeld:

$$-2\tfrac{1}{2}\cdot\left(-\tfrac{4}{5}\right) = -\left(2+\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(-\tfrac{4}{5}\right) = -\left(\tfrac{4}{2}+\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(-\tfrac{4}{5}\right) = \left(-\tfrac{5}{2}\right)\cdot\left(-\tfrac{4}{5}\right)$$
$$= \tfrac{-5}{2}\cdot\tfrac{-4}{5} = \tfrac{-5\cdot(-4)}{2\cdot 5} = \tfrac{20}{10} = 2$$

Het product van deze twee negatieve breuken is dus inderdaad positief.

Om het product van een geheel getal met een breuk te schrijven met bovenstaande regel, moeten we dit getal eerst schrijven als een breuk:

$$6\cdot\tfrac{2}{3} = \tfrac{6}{1}\cdot\tfrac{2}{3} = \tfrac{6\cdot 2}{1\cdot 3} = \tfrac{12}{3} = 4$$

$$\tfrac{3}{4}\cdot 10 = \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{10}{1} = \tfrac{3\cdot 10}{4\cdot 1} = \tfrac{30}{4}\left(= \tfrac{30:2}{4:2} = \tfrac{15}{2} = \tfrac{14+1}{2} = \tfrac{14}{2}+\tfrac{1}{2} = 7+\tfrac{1}{2} = 7\tfrac{1}{2}\right)$$

Let op: in dergelijke berekeningen moet het gehele getal gelezen worden als de teller van een breuk en het moet dus ook alleen met de teller van de andere breuk vermenigvuldigd worden.

OPGAVE 1.7
Bereken het product *ab* als
a $a = 2\frac{1}{2}$ en $b = \frac{3}{10}$ b $a = -4$ en $b = \frac{3}{8}$ c $a = -\frac{3}{4}$ en $b = -2$

OPGAVE 1.8
Bereken het product *ab* als
a $a = 2\frac{1}{2}$ en $b = \frac{2}{5}$ b $a = -4$ en $b = -\frac{1}{4}$ c $a = \frac{3}{4}$ en $b = 1\frac{1}{3}$
Wat valt u op aan de antwoorden?

Omgekeerde

Als de teller van een breuk niet gelijk is aan 0, dan kunnen we de teller en de noemer van deze breuk ook verwisselen. De breuk die zo ontstaat heet het *omgekeerde* van de breuk.

het omgekeerde van $\frac{2}{3}$ is $\frac{3}{2}$ $\left(=1\frac{1}{2}\right)$
het omgekeerde van $\frac{3}{4}$ is $\frac{4}{3}$ $\left(=1\frac{1}{3}\right)$
het omgekeerde van $\frac{1}{2}$ is $\frac{2}{1}=2$.

Het omgekeerde van een breuk waarvan de gehelen buiten de breuk gehaald zijn, bepalen we door deze eerst te schrijven als één breuk. Het omgekeerde van een negatieve breuk bepalen we door het minteken in de teller (of in de noemer) te plaatsen.

$3\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$, dus het omgekeerde van $3\frac{1}{2}$ is $\frac{2}{7}$
$-\frac{3}{4}=\frac{-3}{4}$, dus het omgekeerde van $-\frac{3}{4}$ is $\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3}$ $\left(=-1\frac{1}{3}\right)$
$-\frac{1}{5}=\frac{1}{-5}$, dus het omgekeerde van $-\frac{1}{5}$ is $\frac{-5}{1}=-5$.

Het omgekeerde van het omgekeerde van een breuk is uiteraard weer die breuk zelf:

$1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, dus het omgekeerde van $1\frac{1}{2}$ is $\frac{2}{3}$ en het omgekeerde van $\frac{2}{3}$ is zoals we al zagen $\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$.
het omgekeerde van $\frac{2}{7}$ is $\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$ en het omgekeerde van $3\frac{1}{2}$ is zoals we al zagen $\frac{2}{7}$.
$-1\frac{1}{3}=\frac{-4}{3}$, dus het omgekeerde van $-1\frac{1}{3}$ is $\frac{3}{-4}=-\frac{3}{4}$ en het omgekeerde van $-\frac{3}{4}$ is zoals we al zagen $-1\frac{1}{3}$.

Om het omgekeerde van een geheel getal te vinden, moeten we dit ook eerst schrijven als één breuk:

het omgekeerde van $2=\frac{2}{1}$ is $\frac{1}{2}$
het omgekeerde van $-5=\frac{-5}{1}$ is $\frac{1}{-5}=-\frac{1}{5}$
het omgekeerde van $-1=\frac{-1}{1}$ is $\frac{1}{-1}=-1$.

OPGAVE 1.9
Hierboven zien we dat –1 zijn eigen omgekeerde is.
a Kent u een ander getal dat zijn eigen omgekeerde is?
b Ga na dat de getallen *a* en *b* uit opgave 1.8 telkens elkaars omgekeerde zijn.
Als de gehele getallen *a* en *b* beide niet nul zijn, dan zijn de breuken $\frac{a}{b}$ en $\frac{b}{a}$ elkaars omgekeerde.
c Laat door het uitwerken van de vermenigvuldiging $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}$ zien dat het product van een getal en zijn omgekeerde altijd gelijk is aan 1.

cc BY NC ND

Delingen met breuken

Aangezien de deling de omgekeerde bewerking is van de vermenigvuldiging, bekijken we eerst een drietal vermenigvuldigingen met breuken.

$24 \times \frac{1}{8} = \frac{24}{1} \times \frac{1}{8} = \frac{24}{8} \left(= 3\right)$
$6 \times \frac{1}{4} = \frac{6}{1} \times \frac{1}{4} = \frac{6}{4} \left(= \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}\right)$
$40 \times -\frac{1}{6} = \frac{40}{1} \times \frac{1}{-6} = \frac{40}{-6} \left(= -\frac{40:2}{6:2} = -\frac{20}{3} = -6\frac{2}{3}\right)$

Merk op dat het resultaat van de vermenigvuldiging met een breuk iedere keer geschreven kan worden als een deling door het omgekeerde van die breuk. Om de deling door een breuk uit te voeren, passen we dit idee 'omgekeerd' toe. In plaats van $3 : \frac{1}{8}$ berekenen we 3×8. Dit suggereert dat $3 : \frac{1}{8} = 24$.
Dat dit correct is, kunnen we controleren met de bijbehorende vermenigvuldiging. Hierboven zagen we al $24 \times \frac{1}{8} = 3$, de omgekeerde bewerking hiervan is de deling $3 : \frac{1}{8} = 24$.

Op dezelfde manier volgt:
Suggestie: $1\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 1\frac{1}{2} \times 4 = 6$.
Controle: De omgekeerde bewerking van de vermenigvuldiging $6 \times \frac{1}{4} = 1\frac{1}{2}$ is de deling $1\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 6$.

Suggestie: $-6\frac{2}{3} : \left(-\frac{1}{6}\right) = -6\frac{2}{3} \times -6 = \frac{-20}{3} \times \frac{-6}{1} = \frac{-20 \times -6}{3 \times 1} = \frac{120}{3} = 40$.
Controle: De omgekeerde bewerking van de vermenigvuldiging $40 \times -\frac{1}{6} = -6\frac{2}{3}$ is de deling $-6\frac{2}{3} : \left(-\frac{1}{6}\right) = 40$.

Bovenstaande suggestie kan ook gebruikt worden bij delingen van meer ingewikkelde breuken:

Suggestie: $1\frac{1}{2} : \frac{3}{8} = 1\frac{1}{2} \times \frac{8}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{8}{3} = \frac{3 \times 8}{2 \times 3} = \frac{24}{6} = 4$.
Controle: $4 \times \frac{3}{8} = \frac{4}{1} \times \frac{3}{8} = \frac{4 \times 3}{1 \times 8} = \frac{12}{8} = \frac{12:4}{8:4} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Suggestie: $-3\frac{2}{3} : 1\frac{5}{6} = -\frac{11}{3} : \frac{11}{6} = -\frac{11}{3} \times \frac{6}{11} = -\frac{11 \times 6}{3 \times 11} = -\frac{66}{33} = -2$.
Controle: $-2 \times 1\frac{5}{6} = -\frac{2}{1} \times \frac{11}{6} = -\frac{2 \times 11}{1 \times 6} = -\frac{22}{6} = -\frac{22:2}{6:2} = -\frac{11}{3} = -3\frac{2}{3}$.

Suggestie: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.
Controle: $\frac{ad}{bc} \times \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd} = \frac{a \times cd}{b \times cd} = \frac{a}{b}$.

Conclusie:
De deling $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ heeft dezelfde uitkomst als de vermenigvuldiging $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.
Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde.

OPGAVE 1.10
Bereken het quotiënt $a : b$ als
a $a = 2\frac{1}{2}$ en $b = \frac{3}{10}$ b $a = -6$ en $b = \frac{3}{8}$ c $a = -\frac{3}{4}$ en $b = -2$

4 Machten en wortels

Machtsverheffen

Als a een willekeurig getal is en n een geheel getal groter dan of gelijk aan 2 is, dan geeft de bewerking a^n (spreek uit 'a tot de n-de macht' of 'a tot de macht n') aan dat we het product moeten uitrekenen van n factoren a, bijvoorbeeld:

$$3^2 = 3 \cdot 3$$
$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4$$
$$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

Macht
Grondgetal
Exponent
Kwadraat

a^n heet een *macht*; a is het *grondtal* van deze macht en n is de *exponent*. De tweede macht van een getal wordt meestal het *kwadraat* van dit getal genoemd.

Het uitrekenen van een hogere macht vereist vaak nogal wat rekenwerk. Als we stap voor stap een tabel met machten van een vast grondtal gebruiken is het rekenwerk – dankzij de associatieve eigenschap van de vermenigvuldiging – vaak iets makkelijker, bijvoorbeeld:

$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$$
$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot \left(2 \cdot 2\right) = 2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 4 = 8$$
$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot \left(2 \cdot 2 \cdot 2\right) = 2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 8 = 16$$
$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot \left(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2\right) = 2 \cdot 2^4 = 2 \cdot 16 = 32$$

We zien dat iedere volgende macht telkens twee keer zo groot is als de voorafgaande. Dit gebruiken we om de volgende vijf machten in de tabel snel uit te rekenen:

$$2^6 = 2 \cdot 2^5 = 2 \cdot 32 = 64$$
$$2^7 = 2 \cdot 2^6 = 2 \cdot 64 = 128$$
$$2^8 = 2 \cdot 2^7 = 2 \cdot 128 = 256$$
$$2^9 = 2 \cdot 2^8 = 2 \cdot 256 = 512$$
$$2^{10} = 2 \cdot 2^9 = 2 \cdot 512 = 1024$$

OPGAVE 1.11
Bereken op dezelfde manier:
a 3^2, 3^3, 3^4 en 3^5
b 5^2, 5^3, 5^4 en 5^5
c Bereken ook: 10^2, 10^4 en 10^6.

Voor machten met een negatief getal of een breuk als grondtal is het van belang om te weten dat afgesproken is dat de exponent alleen betrekking heeft op het getal dat er direct onder staat:

-2^2 betekent: neem de tweede macht van 2 en neem daar het tegengestelde van. -2^2 is dus gelijk aan $-\left(2 \cdot 2\right) = -4$.

$\frac{2^4}{3}$ betekent: neem de vierde macht van 2 en deel deze door 3.
$\frac{2^4}{3}$ is dus gelijk aan $\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3} = \frac{16}{3}\left(= 5\frac{1}{3}\right)$.

cc BY NC ND

Als we het kwadraat van –2 of de vierde macht van $\frac{2}{3}$ willen aangeven, dan moeten we haakjes gebruiken:

$$(-2)^2 = (-2)\cdot(-2) = 4$$

$$\left(\tfrac{2}{3}\right)^4 = \left(\tfrac{2}{3}\right)\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{2\cdot2\cdot2\cdot2}{3\cdot3\cdot3\cdot3} = \tfrac{16}{81}$$

Merk op dat $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$ en dat bovenstaande berekening net zo gaat voor andere breuken.
De vierde macht van een breuk is dus gelijk aan de vierde macht van de teller gedeeld dor de vierde macht van de noemer. Hetzelfde geldt voor machten van een breuk met andere exponenten.

OPGAVE 1.12
We zagen al: $(-2)^2 = (-2)\cdot(-2) = 4$.
a Vul in: $(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = (-2)\cdot(-2)^2 = (-2)\cdot\ldots = \ldots$
b Bereken ook: $(-2)^4$ en $(-2)^5$.
c Bereken: $(-3)^2$, $(-3)^3$, $(-3)^4$ en $(-3)^5$.
d Is $(-2)^{9999}$ positief of negatief?

OPGAVE 1.13
We zagen al: $3^5 = 243$ en $5^5 = 3125$.
a Bereken nu: $\left(\frac{3}{5}\right)^5$ en $\left(1\frac{2}{3}\right)^5$.
b Bereken ook: $\left(\frac{1}{3}\right)^5$ en $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$.
c Bereken tenslotte $\left(\frac{1}{5}\right)^5$.

Decimale breuk

Een breuk waarvan de noemer 10 is, kan ook geschreven worden als een *decimale breuk* met 1 cijfer achter de komma, bijvoorbeeld $\frac{1}{10} = 0,1$; $\frac{3}{10} = 0,3$; $1\frac{1}{10} = \frac{11}{10} = 1,1$; $-2\frac{7}{10} = -\frac{27}{10} = -2,7$.

Een breuk waarvan de noemer een macht van 10 is, kan ook geschreven worden als een decimale breuk. De exponent van deze macht geeft het aantal cijfers achter de komma.
Een paar voorbeelden:

$$\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 0,01$$
$$\frac{1}{10.000} = \frac{1}{10^4} = 0,0001$$
$$1\frac{41}{100} = \frac{141}{100} = \frac{141}{10^2} = 1,41$$
$$-3\frac{14159}{100.000} = -\frac{314.159}{100.000} = -\frac{314.159}{10^5} = -3,14159$$

Breuken waarvan de noemer gelijk is aan 2, aan 5, aan een macht van 2, aan een macht van 5 of aan een product van zulke getallen, kunnen ook geschreven worden als een decimale breuk, bijvoorbeeld:

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0,2$$
$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0,25$$
$$-1\frac{3}{8} = -\frac{11}{8} = -\frac{1375}{1000} = -1,375$$
$$\frac{1}{40} = \frac{25}{1000} = 0,025$$
$$\frac{3}{50} = \frac{6}{100} = 0,06$$

Breuken met een andere noemer kunnen niet geschreven worden als een decimale breuk, maar kunnen wel benaderd worden door zo'n breuk. In deze beknopte inleiding beperken we ons tot het noemen van de mogelijkheid om deze benadering te berekenen met een rekenmachine. Zo vinden we bijvoorbeeld $\frac{1}{3} = 1:3 \approx 0,3333333333$ en $\frac{11}{12} = 11:12 \approx 0,9166666667$.
Het teken ≈ (spreek uit: 'is ongeveer gelijk aan') geeft aan dat de weergegeven decimale breuk niet precies gelijk is aan de uitkomst van de deling, maar dat deze een benadering is. Hoe meer cijfers achter de komma, hoe beter de benadering. Het aantal drieën en zessen achter de komma hangt af van de grootte van het scherm. Bij de benadering van $\frac{11}{12}$ wordt als laatste cijfer een 7 gegeven, omdat het volgende cijfer (weer een 6) naar boven afgerond wordt.
Vaak wordt een dergelijke breuk afgerond op twee, drie of vier cijfers achter de komma, maar let daarbij op de notatie. $\frac{1}{3}$ is niet precies gelijk aan $0,33 = \frac{33}{100}$, maar net iets groter. Dit kunnen we zien door beide breuken te vermenigvuldigen met 3: $3 \times \frac{1}{3} = 1$; $3 \times \frac{33}{100} = \frac{99}{100}$.
Daarom mogen we nooit schrijven $\frac{1}{3} = 0,33$, maar moeten we altijd het teken ≈ gebruiken.
Zo schrijven we bijvoorbeeld ook $\frac{2}{3} \approx 0,67$ en $\frac{1}{7} \approx 0,14$.

Omdat berekeningen met decimale breuken in eenvoudige gevallen makkelijk kunnen worden omgezet naar berekeningen met gewone breuken en in ingewikkelde gevallen met een rekenmachine gedaan kunnen worden, gaan we daar in deze leereenheid niet verder op in.

Worteltrekken

Worteltrekken is de omgekeerde bewerking van machtsverheffen:

$\sqrt{4} = 2$ want $2^2 = 4$.
$\sqrt[3]{125} = 5$ want $5^3 = 125$.
$\sqrt[4]{10.000} = 10$ want $10^4 = 10.000$.

Wortel

$\sqrt{4}$ is de *tweedemachtswortel* uit 4, meestal kortweg 'wortel 4' genoemd.
$\sqrt[3]{125}$ is de *derdemachtswortel* uit 125.
$\sqrt[4]{10.000}$ is de *vierdemachtswortel* uit 10.000.

Wortelexponent

Bij deze laatste twee wortels noemen we 3 resp. 4 de *wortelexponent*.
Om het onderscheid met de hogeremachts wortels te benadrukken wordt in plaats van $\sqrt{4}$ soms ook $\sqrt[2]{4}$ geschreven, maar meestal wordt de wortelexponent 2 weggelaten. Met $\sqrt{4}$ wordt altijd de 'gewone' wortel, ofwel de tweedemachtswortel bedoeld.

Voor een willekeurig getal *a* is $\sqrt{a}$ een getal waarvan het kwadraat gelijk is aan *a*.
Bij deze definitie zijn drie kanttekeningen te plaatsen:
– Het kwadraat van een positief getal is een product van twee positieve factoren en is dus zelf ook positief. Het kwadraat van een negatief getal is het product van twee negatieve factoren, dat is ook positief. Het enige kwadraat dat niet positief is, is $0^2 = 0$.
Een kwadraat is dus nooit negatief.
– Hierboven zagen we: $\sqrt{4} = 2$ want $2^2 = 4$, maar het kwadraat van –2 is ook gelijk aan 4. Omdat we niet willen dat $\sqrt{4}$ twee verschillende uitkomsten kan hebben, moeten we een keuze maken.
– Het is makkelijk na te gaan dat er geen geheel getal is waarvan het kwadraat gelijk is aan 2, maar het kan ook bewezen worden dat er ook geen breuk is waarvan het kwadraat gelijk is aan 2. $\sqrt{2}$ is dus geen rationaal getal. Wat voor een getal is $\sqrt{2}$ dan wel?

cc BY NC ND

De eerste twee kanttekeningen lossen we op door de definitie van de tweedemachtswortel aan te scherpen, op de derde kanttekening komen we terug in paragraaf 5.

$\sqrt{a}$

De aangescherpte definitie voor de tweedemachtswortel luidt:
Voor ieder positief getal a is $\sqrt{a}$ het *positieve* getal waarvan het kwadraat gelijk is aan a.
De wortel uit 0 is gelijk aan 0.
De wortel uit een negatief getal bestaat niet.

Bovenstaande kanttekeningen zijn ook te maken voor een vierdemachtswortel. De vierde macht van een positief getal is uiteraard positief, maar de vierde macht van een negatief getal is ook positief.
Daarom bestaat de vierdemachtswortel van een negatief getal niet.
Zowel $2^4 = 16$ als $(-2)^4 = 16$, maar $\sqrt[4]{16} = 2$.
Er is geen rationaal getal waarvan de vierde macht gelijk is aan 2, dus is $\sqrt[4]{2}$ geen rationaal getal.

De eerste en de tweede kanttekening hoeven niet gemaakt worden bij een hogeremachtswortel met een oneven exponent. $(-2)^3 = -8$, dus $\sqrt[3]{-8}$ bestaat en is gelijk aan –2 en er is maar één getal waarvan de derde macht gelijk is aan 8, namelijk 2, dus $\sqrt[3]{8}$ ligt eenduidig vast.
De derde kanttekening blijft wel van kracht. Er is geen rationaal getal waarvan de derde macht gelijk is aan 2, dus is $\sqrt[3]{2}$ geen rationaal getal.

Algemeen geldt:
Als n een *even* getal is groter dan 2, dan geldt:
Voor ieder positief getal a is $\sqrt[n]{a}$ het *positieve* getal waarvan de n-de macht gelijk is aan a.
Als a negatief is, bestaat $\sqrt[n]{a}$ niet.

Als n een *oneven* getal is groter dan 1, dan geldt:
Voor ieder getal a is $\sqrt[n]{a}$ het getal waarvan de n-de macht gelijk is aan a.
Als a positief is, is $\sqrt[n]{a}$ ook positief, als a negatief is, is $\sqrt[n]{a}$ ook negatief.

Voor al deze exponenten geldt $0^n = 0$, dus $\sqrt[n]{0} = 0$.

OPGAVE 1.14
Bereken:
a $(-4)^4$ b $(-6)^3$ c $(-7)^2$

OPGAVE 1.15
Bepaal indien mogelijk:
a $\sqrt[4]{256}$ c $\sqrt[3]{216}$ e $\sqrt{49}$
b $\sqrt[4]{-4^4}$ d $\sqrt[3]{-6^3}$ f $\sqrt{-7^2}$

5 Reële getallen

In paragraaf 4 hebben we geconstateerd dat de uitkomst van wortels die niet 'mooi' uitkomen, zoals $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ en $\sqrt[4]{2}$, geen rationaal getal zijn. Er zijn geen gehele getallen en ook geen breuken waarvan het kwadraat, de derde macht of de vierde macht gelijk is aan 2. Andere voorbeelden van dergelijke wortels zijn $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ en $\sqrt[10]{6}$; de verzameling van de rationale getallen bevat dus kennelijk niet alle getallen. De oplossing van dit probleem is dat we onze getallenverzameling nog een keer uitbreiden, en wel met de *irrationale getallen*.

Irrationale getallen

De bekendste voorbeelden van irrationale getallen zijn de hierboven genoemde wortelgetallen. Een ander bekend voorbeeld is het getal π, het quotiënt van de omtrek en de diameter van een cirkel.
Hoewel de wortelgetallen niet gelijk zijn aan een breuk, kunnen we deze wel benaderen met een decimale breuk. Voor $\sqrt{2}$ gaat dit als volgt:
2 is groter dan 1 en kleiner dan 4, dus $\sqrt{2}$ is groter dan $\sqrt{1}=1$ en kleiner dan $\sqrt{4}=2$.

Dubbele ongelijkheid

Dergelijke relaties worden vaak aangeduid met een *dubbele ongelijkheid*:
$1<2$ en $2<4$ wordt gecombineerd tot $1<2<4$; $1<\sqrt{2}$ en $\sqrt{2}<2$ wordt gecombineerd tot $1<\sqrt{2}<2$.
Om een betere benadering te vinden, berekenen we de kwadraten van 1,1; 1,2; 1,3; etc. Omdat dit een goed voorbeeld is van het rekenen met decimale breuken, werken we dit hieronder even uit:

$$1{,}1^2=\left(\tfrac{11}{10}\right)^2=\tfrac{121}{100}=1{,}21$$
$$1{,}2^2=\left(\tfrac{12}{10}\right)^2=\tfrac{144}{100}=1{,}44$$
$$1{,}3^2=\left(\tfrac{13}{10}\right)^2=\tfrac{169}{100}=1{,}69$$
$$1{,}4^2=\left(\tfrac{14}{10}\right)^2=\tfrac{196}{100}=1{,}96$$
$$1{,}5^2=\left(\tfrac{15}{10}\right)^2=\tfrac{225}{100}=2{,}25$$

Zo zien we dat $\sqrt{2}$ tussen 1,4 en 1,5 ligt.
Op deze manier verder redenerend vinden we $1{,}41^2=1{,}9881$ en $1{,}42^2=2{,}0164$, dus $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$ en $1{,}411^2=1{,}990921$; $1{,}412^2=1{,}993744$; $1{,}413^2=1{,}996569$; $1{,}414^2=1{,}999369$ en $1{,}415^2=2{,}002225$, dus $1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415$.
Als u (zoals altijd verstandig is) deze kwadraten zelf nagerekend hebt, dan hebt u daarvoor waarschijnlijk een rekenmachine gepakt. Zo'n rekenmachine kan ook in één keer een benadering in veel meer cijfers achter de komma geven. Zo vinden we $\sqrt{2}\approx 1{,}41421356$.
Let op: dit betekent niet dat $\sqrt{2}$ gelijk is aan 1,41421356. Als uw rekenmachine genoeg cijfers kan weergeven, kunt u controleren dat het kwadraat van 1,41421356 net iets kleiner is dan 2. Vandaar dat we ook hier altijd het teken ≈ gebruiken en nooit het teken =.
We kunnen de waarde van $\sqrt{2}$ niet exact met een decimale breuk weergeven, maar wel is duidelijk dat dit getal een plaats heeft op de getallenlijn en dat we deze plaats zeer nauwkeurig kunnen bepalen. Ook voor andere irrationale getallen geldt dat we hun plaats op de getallenlijn meestal zullen benaderen met een rekenmachine. Alle irrationale getallen hebben een plaats tussen de rationale getallen op de getallenlijn.

Reële getallen

Al deze getallen samen worden de *reële getallen* genoemd. De verzameling van de reële getallen wordt aangeduid met de letter $\mathbb{R}$. Deze verzameling bevat dus zowel de irrationale getallen, zoals $\sqrt{2}$ en π, als de rationale getallen. Dit betekent dat ook de natuurlijke getallen en de gehele getallen reële getallen zijn. De verzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ zijn dus alle drie een deelverzameling van $\mathbb{R}$.
Er is overigens ook een negatief reëel getal waarvan het kwadraat gelijk is aan 2. Dit getal is het tegengestelde van $\sqrt{2}$, ofwel $-\sqrt{2}$. Er geldt dus $-\sqrt{2}\approx -1{,}41421356$ (vergelijk: $-\sqrt{4}=$ het tegengestelde van $\sqrt{4}=-2$).

Deelverzamelingen

In wiskundige redeneringen willen we vaak niet alle getallen uit een getallenverzameling betrekken, maar alleen de getallen die kleiner of groter zijn dan een bepaalde grens, of de getallen die tussen bepaalde grenzen in liggen. Ook hier spreken we over een *deelverzameling* van de oorspronkelijke getallenverzameling.

cc BY NC ND

Als het om natuurlijke of gehele getallen gaat, kunnen we de getallen uit zo'n deelverzameling vaak één voor één opsommen en als dit niet mogelijk is met een puntjesnotatie duidelijk maken welke getallen we bedoelen.
Alle natuurlijke getallen kleiner dan 10 zijn bijvoorbeeld 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9 en alle positieve gehele getallen kleiner dan of gelijk aan 10 zijn 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, en 10.
Als we alle gehele getallen groter dan 1 willen noteren, kunnen we ook schrijven 2, 3, 4, 5, 6, …, waarbij de lezer zal begrijpen dat deze rij met dezelfde regelmaat doorgaat.
Alle gehele getallen vanaf –1000 tot en met 1000 kunnen we aangeven met –1000, –999, –998, … 998, 999, 1000.
Bij rationale en reële getallen is zo'n opsomming niet mogelijk. Als we alle positieve rationale getallen willen opsommen, dan is de vraag: bij welk getal beginnen we? Is er een kleinste positief rationaal getal?
Neem eens aan dat er een kleinste positief rationaal getal is, en noem dit a. Omdat a positief is, is het quotiënt $a:2$ ook positief.
Maar dit quotiënt is kleiner dan a en a was nu juist het kleinste positieve rationale getal!

Dit is een eenvoudig voorbeeld van wat in de wiskunde een *bewijs uit het ongerijmde* wordt genoemd.

De aanname dat er een kleinste positief rationaal getal is leidt tot een tegenspraak en kan dus niet kloppen.
Een soortgelijke redenering gaat op voor 'het grootste rationale getal dat kleiner is dan 10' of 'het kleinste reële getal dat groter is dan 2'. We zien dat het onmogelijk is om de positieve rationale getallen op te sommen en dat dit ook geldt voor deelverzamelingen als 'alle rationale getallen die tussen 1 en 10 liggen' en 'alle reële getallen die groter zijn dan 2'. Als we zo'n deelverzameling willen omschrijven moeten we dat dus op een andere manier doen. Vaak wordt bij die omschrijving een enkele of dubbele ongelijkheid gebruikt. Daarbij moet ook de oorspronkelijke getallenverzameling worden aangegeven.
Zo kunnen we de deelverzameling van de positieve rationale getallen omschrijven als:
'de verzameling van alle q uit $\mathbb{Q}$ waarvoor geldt $q > 0$'.
De deelverzameling van alle rationale getallen die tussen 1 en 10 liggen wordt dan:
'de verzameling van alle q uit $\mathbb{Q}$ waarvoor geldt $1 < q < 10$'.
En de verzameling van alle reële getallen die groter zijn dan 2 wordt zo:
'de verzameling van alle x uit $\mathbb{R}$ waarvoor geldt $x > 2$'.
Deze omschrijving kunnen we natuurlijk ook gebruiken voor natuurlijke of gehele getallen. Zo worden de hierboven omschreven verzamelingen omschreven als:
'de verzameling van alle n uit $\mathbb{N}$ waarvoor geldt $n < 10$'.
'de verzameling van alle n uit $\mathbb{Z}$ waarvoor geldt $0 < n \leq 10$'.
'de verzameling van alle n uit $\mathbb{Z}$ waarvoor geldt $n > 1$'.
'de verzameling van alle n uit $\mathbb{Z}$ waarvoor geldt $-1000 \leq n \leq 1000$'.

OPGAVE 1.16
A is de verzameling van alle n uit $\mathbb{N}$ waarvoor geldt $0 < n < 10$.
B is de verzameling van alle n uit $\mathbb{N}$ waarvoor geldt $1 \leq n \leq 9$.
C is de verzameling van alle q uit $\mathbb{Q}$ waarvoor geldt $0 < q < 10$.
D is de verzameling van alle x uit $\mathbb{R}$ waarvoor geldt $1 \leq x \leq 9$.
a Zijn er getallen die wel in A zitten, maar niet in B? En zijn er getallen die wel in B zitten maar niet in A? Zo ja, geef een voorbeeld van zo'n getal; zo nee, leg uit waarom niet.
b Zijn er getallen die wel in C zitten, maar niet in D? En zijn er getallen die wel in D zitten maar niet in C? Zo ja, geef een voorbeeld van zo'n getal; zo nee, leg uit waarom niet.

De intervalnotatie

De omschrijving van de deelverzamelingen hiervoor is nogal omslachtig, mede omdat iedere keer ook de oorspronkelijke verzameling moet worden aangegeven. In de notatie wordt gesuggereerd dat n staat voor een natuurlijk of een geheel getal, dat q staat voor een rationaal getal en dat x staat voor een reëel getal, maar we zouden daar even goed andere letters kunnen gebruiken. Het gebruik van deze letters ontslaat ons dus niet van de plicht om de oorspronkelijke getallenverzameling te vermelden.
Dit probleem wordt grotendeels opgelost door af te spreken dat als er niet expliciet vermeld wordt wat de oorspronkelijke verzameling is, we deze zo groot mogelijk nemen. Tenzij andere vermeld spreken we dus altijd over reële getallen. Met de aanduiding 'alle $x > 1$' bedoelen we dus de verzameling van alle ***reële*** getallen die groter zijn dan 1. De verzameling van alle positieve reële getallen wordt kortweg aangegeven met 'alle $x > 0$', alle niet-negatieve reële getallen geven we aan met alle $x \geq 0$' en alle reële getallen tussen –10 en 10 geven we aan als 'alle x waarvoor geldt $-10 < x < 10$'.
Op de getallenlijn vormen deze deelverzamelingen een aaneengesloten deelstuk, dat aan één of twee kanten begrensd is. De grens van dit deelstuk kan bij de getallenverzameling horen, zoals bij 'alle $x \geq 0$', of juist niet, zoals bij de andere twee voorbeelden hierboven. Een dergelijk aaneengesloten deelstuk van de getallenlijn wordt een *interval* genoemd en wordt vaak met een speciale notatie aangegeven.

Interval

De verzameling van alle positieve reële getallen geven we aan met $\langle 0, \rightarrow \rangle$. Hierin geeft $\langle 0$ aan dat de ondergrens 0 is en dat deze niet tot het interval behoort. Met $\rightarrow\rangle$ geven we aan dat het interval geen bovengrens heeft.
De verzameling van alle niet-negatieve getallen geven we aan met $[0, \rightarrow\rangle$. Met $[0$ geven we aan dat de ondergrens 0 is en dat deze wel tot het interval behoort.
De andere hiervoor besproken deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zien er in de intervalnotatie als volgt uit:
De verzameling van alle x uit $\mathbb{R}$ waarvoor geldt $x > 2$ wordt $\langle 2, \rightarrow \rangle$.
De verzameling van alle x uit $\mathbb{R}$ waarvoor geldt $1 \leq x \leq 9$ wordt $[1, 9]$.
De verzameling van alle reële getallen tussen –10 en 10 wordt $\langle -10, 10 \rangle$.
Andere voorbeelden van intervallen zijn:
De verzameling van alle negatieve reële getallen. Intervalnotatie: $\langle \leftarrow, 0 \rangle$.
De verzameling van alle reële getallen die kleiner dan of gelijk aan 100 zijn: $\langle \leftarrow, 100]$.
De verzameling van alle reële getallen die groter zijn dan 1, maar niet groter dan 2, dus waarvoor geldt $1 < x \leq 2$ wordt $\langle 1, 2]$.

OPGAVE 1.17
Schrijf de volgende deelverzamelingen van de reële getallen in de intervalnotatie.
a Alle getallen die kleiner zijn dan 4.
b Alle getallen die niet kleiner zijn dan 4.
c Alle getallen die kleiner zijn dan 4, maar niet kleiner dan π.

Met intervalnotatie geven we aan dat we alle *reële* getallen bedoelen die onder, boven of tussen de vermelde grenzen liggen. Als we alleen gehele getallen of rationale getallen willen hebben, dan moeten we dat expliciet aangeven. Bij gehele getallen kunnen we dan eventueel de getallen opsommen of de puntjesnotatie gebruiken, bij rationale getallen ontkomen we niet aan een uitgebreidere omschrijving. In die

cc BY NC ND

omschrijving kunnen we overigens wel gebruik maken van intervallen. Zo kunnen we 'alle breuken tussen 1 en 2' ook omschrijven als 'alle rationale getallen in het interval $\langle 1, 2 \rangle$'.

OPGAVE 1.18

A is het interval $[2, 4]$, B is het interval $\langle 1, 5 \rangle$.

a Geef alle gehele getallen die in interval A liggen.

Geef ook alle gehele getallen die in interval B liggen.

Wat valt u op? Kunt u dit verklaren?

b Geef een rationaal getal dat wel in B ligt maar niet in A.

c Geef een irrationaal getal dat wel in B ligt maar niet in A.

6 Samengestelde bewerkingen en de distributieve eigenschap

Tot nu toe hebben we optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen en worteltrekken bekeken als afzonderlijke bewerkingen. Vaak moeten we echter in één berekening meerdere van deze bewerkingen uitvoeren. In deze paragraaf bespreken we eerst de regels voor het uitvoeren van zo'n *samengestelde bewerking* als er geen haakjes staan en bespreken we vervolgens het effect van haakjes. Verder kijken we ook even terug naar de commutatieve en de associatieve eigenschap van de optelling en de vermenigvuldiging en breiden we deze uit met de distributieve eigenschap voor de optelling en de vermenigvuldiging.

Samengestelde bewerking

Volgorde van bewerkingen

Als voorbeeld van een samengestelde bewerking nemen we $10 + 8 : 6 - 4 \cdot 3^2$.

Jeroen werkt dit als volgt uit:

$10 + 8 = 18$, dus $10 + 8 : 6 - 4 \cdot 3^2 = 18 : 6 - 4 \cdot 3^2$

$18 : 6 = 3$, dus $18 : 6 - 4 \cdot 3^2 = 3 - 4 \cdot 3^2$

$3 - 4 = -1$, dus $3 - 4 \cdot 3^2 = -1 \cdot 3^2$

$-1 \cdot 3 = -3$, dus $-1 \cdot 3^2 = -3^2$

Het kwadraat van –3 is 9, dus de uitkomst van de berekening is 9.

Jeroen heeft goed gezien dat er in deze berekening vijf verschillende bewerkingen zitten (optellen, delen, aftrekken, vermenigvuldigen en machtsverheffen), hij is alleen vergeten dat er regels zijn voor de volgorde waarin deze bewerkingen moeten worden uitgevoerd. In de laatste stap vergeet hij ook nog dat -3^2 staat voor het tegengestelde van het kwadraat van 3. Als het kwadraat van –3 bedoeld was had er $(-3)^2$ moeten staan.

De voorgeschreven volgorde is:

Eerst machtsverheffen

Eerst machtsverheffen, dus $10 + 8 : 6 - 4 \cdot 3^2 = 10 + 8 : 6 - 4 \cdot 9$.

Dan vermenigvuldigen en delen

Dan vermenigvuldigen en delen, dus $10 + 8 : 6 - 4 \cdot 9 = 10 + 1\frac{1}{3} - 36$.

Tenslotte optellen en aftrekken

Tenslotte optellen en aftrekken.

Als er geen haakjes staan, moet daarbij van links naar rechts gewerkt worden $10 + 1\frac{1}{3} - 36 = 11\frac{1}{3} - 36 = -24\frac{2}{3}$.

Bij de uitwerking van $27 - 8 - \frac{2}{3}^2 \cdot 6$ komen we een paar subtiele puntjes tegen.

Ten eerste is de plaatsing van de exponent ongelukkig. Wordt hier nu $\frac{2^2}{3}$ bedoeld of het kwadraat van $\frac{2}{3}$? Aangezien er geen haakjes staan, moeten we uitgaan van het eerste, maar het is beter om in zo'n geval met de breukstreep duidelijk te maken dat de noemer niet bij het grondtal van de macht hoort. En als de noemer wel bij het grondtal van de macht zou horen, dan zouden er haakjes rond de hele breuk moeten staan, dus zouden we moeten schrijven $\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

Nu duidelijk is dat het grondtal van de macht 2 moet zijn, is de eerste stap van de berekening verder ook helder. Machtsverheffen geeft: $27-8-\frac{2^2}{3}\cdot 6 = 27-8-\frac{4}{3}\cdot 6$.
Vatten we de laatste term op als het product van $\frac{4}{3}$ en 6, dan volgt $27-8-\frac{4}{3}\cdot 6 = 27-8-8$.
Van links naar rechts aftrekken geeft dan $27-8-8 = 19-8 = 11$.

Bij gelijke prioriteit van links naar rechts werken

Bij de laatste stap is het verleidelijk om eerst $8-8$ uit te rekenen en het resultaat daarvan af te trekken van 27, maar de regel is nu eenmaal dat een dergelijke bewerking van links naar rechts moet worden uitgevoerd.

Bij de tweede stap zouden we $\frac{4}{3}$ ook kunnen lezen als deling $4:3$.
Vermenigvuldigen met 6 levert dan: $4:3\cdot 6$.

Gezien de uitwerking hierboven is het duidelijk dat deze bewerking van links naar rechts moet worden uitgevoerd, dus eerst 4 delen door 3 en dan het resultaat vermenigvuldigen met 6.
Op dezelfde manier zou $6:ab = 6:a\cdot b$ moeten betekenen: deel 6 eerst door a en vermenigvuldig het resultaat dan met b. In sommige boeken wordt echter gesteld dat $6:ab$ gelezen moet worden als: deel 6 door het product ab. Om verwarring te voorkomen is het daarom beter om in een dergelijke samengestelde bewerking de deelstreep te gebruiken als deelteken in plaats van het de dubbele punt. Als we $\frac{6}{ab}$ of $\frac{6}{a}\cdot b$ schrijven, is er geen twijfel over wat er bedoeld wordt.

Haakjes

Als we bewerkingen in een andere volgorde willen uitvoeren dan de in de vorige sectie beschreven verplichte volgorde, gebruiken we haakjes.

In $7+8\cdot 9$ moeten we eerst $8\cdot 9$ uitrekenen en de uitkomst vervolgens optellen bij 7. Als we de som van 7 en 8 willen vermenigvuldigen met 9 moeten we schrijven $(7+8)\cdot 9$.
Zo krijgen we $7+8\cdot 9 = 7+72 = 79$ en $(7+8)\cdot 9 = 15\cdot 9 = 135$.

In $4\cdot 3^2$ moeten we eerst 3 kwadrateren en vervolgens 4 vermenigvuldigen met de uitkomst. Als we het kwadraat van het product $4\cdot 3$ bedoelen, dan moeten we schrijven $(4\cdot 3)^2$.
Zo krijgen we $4\cdot 3^2 = 4\cdot 9 = 36$ en $(4\cdot 3)^2 = 12^2 = 144$.

In paragraaf 4 hebben we het gebruik van haakjes bij machten van negatieve getallen en breuken al besproken:
$-4^4 = -4\cdot 4\cdot 4\cdot 4 = -256$; $(-4)^4 = (-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4) = 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4 = 256$
$\frac{3^4}{5} = \frac{81}{5} = 16\frac{1}{5}$; $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{5\cdot 5\cdot 5\cdot 5} = \frac{81}{625}$.
Deelstrepen werken ook als haakjes. $(3+5):(4-2)$ kunnen we ook schrijven als $\frac{3+5}{4-2}$.

Bij het gebruik van het wortelteken heeft de lengte van de 'vlag' het effect van haakjes:
$\sqrt{16}+9 = 4+9 = 13$; $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$
$\sqrt{25}\cdot 4 = 5\cdot 4 = 20$; $\sqrt{25\cdot 4} = \sqrt{100} = 10$.

Omdat het door deze notatie altijd duidelijk is dat de bewerking onder de vlag voorrang heeft boven het worteltrekken en dat een bewerking die niet onder de vlag staat pas na het worteltrekken moet worden uitgevoerd, is het niet nodig om het worteltrekken op te nemen in de volgorde van bewerkingen. Let wel op dat de vlag duidelijk aangeeft wat er wel en wat er niet onder de wortel valt. Een notatie als $\sqrt{16+9}$ of $\sqrt{25}\cdot 4$ is uit den boze.

Opmerking

In getypte tekst wordt als er geen formule-editor beschikbaar is ook wel gebruik gemaakt van het symbool √ om een wortel aan te geven. In dat geval moet de wortel in principe alleen genomen worden van het getal direct achter dit symbool en moeten er haakjes gebruikt worden als de bewerking achter het wortelteken eerst moet worden uitgevoerd:
√16 + 9 = 4 + 9 = 13; √(16 + 9) = √25 = 5;
√25 · 4 = 5 · 4 = 20; √(25 · 4) = √100 = 10.

OPGAVE 1.19

Bereken voor $a=2$ en $b=3$:
a $a+3b$ en $(a+3)b$
b $a-b^3$ en $\left(a-b\right)^3$
c $a-3b^2$ en $\left(a-3\right)b^2$

OPGAVE 1.20

In de vorige sectie heeft Jeroen $10+8:6-4\cdot 3^2$ zo uitgewerkt, dat uiteindelijk het kwadraat van –3 berekend werd.
Plaats zelf haakjes in $10+8:6-4\cdot 3^2$ op zo'n manier dat de stappen waarmee Jeroen deze bewerking uitgewerkt heeft wel kloppen, en zorg er zo voor dat de uitkomst wel gelijk is aan 9.

De commutatieve en de associatieve eigenschap

In paragraaf 1 hebben we al besproken dat de optelling en de vermenigvuldiging de commutatieve en de associatieve eigenschap hebben:

Voor alle getallen *a* en *b* geldt: $a+b=b+a$ en $ab=ba$.
Voor alle getallen *a*, *b* en *c* geldt: $\left(a+b\right)+c=a+\left(b+c\right)$ en $\left(ab\right)c=a\left(bc\right)$.

Formeel hebben we deze eigenschappen in paragraaf 1 alleen besproken voor het geval dat *a*, *b* en *c* natuurlijke getallen zijn, maar aangezien het rekenen met negatieve getallen en met breuken volledig is gebaseerd op het rekenen met natuurlijke getallen, gelden deze eigenschappen ook voor het rekenen met rationale getallen. Verder zullen we in paragraaf 8 zien dat berekeningen met irrationale getallen terug te voeren zijn op berekeningen met rationale getallen, dus gelden deze eigenschappen voor alle reële getallen.

De aftrekking en de deling hebben deze eigenschappen niet:
$12-4=8$, maar $4-12=-8$ (*merk op dat –8 het tegengestelde is van* 8)
$12:4=3$, maar $4:12=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ (*merk op dat* $\frac{1}{3}$ *het omgekeerde is van* 3)
$\left(12-4\right)-2=8-2=6$, maar $12-\left(4-2\right)=12-2=10$
$\left(12:4\right):2=3:2=1\frac{1}{2}$, maar $12:\left(4:2\right)=12:2=6$
(*merk op dat* $12-4-2$ *resp.* $12:4:2$ *uitgewerkt moeten worden als* $\left(12-4\right)-2$ *resp.* $\left(12:4\right):2$).

Als we in een aftrekking de volgorde willen veranderen, dan kunnen we deze herschrijven als een optelling (*aftrekken is optellen van het tegengestelde*): $12-4-2=12+\left(-4\right)+\left(-2\right)$.
Zo opgeschreven kunnen we de tweede optelling als eerste uitvoeren (*associatieve eigenschap*) of de termen in een hele andere volgorde optellen (*commutatieve eigenschap*). Zo krijgen we bijvoorbeeld:

$$12-4-2=12+\left(-4\right)+\left(-2\right)=12+\left(-6\right)=12-6=6$$
$$923-58+77=923+\left(-58\right)+77=923+77+\left(-58\right)=1000+\left(-58\right)$$
$$=1000-58=942$$

Als we in een deling de volgorde willen veranderen, dan kunnen we deze herschrijven als een vermenigvuldiging (*delen is vermenigvuldigen met het omgekeerde*): $12:4:2=12\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}$.
Zo opgeschreven kunnen we de tweede vermenigvuldiging als eerste uitvoeren (*associatieve eigenschap*) of de factoren in een geheel andere volgorde vermenigvuldigen (*commutatieve eigenschap*). Zo krijgen we bijvoorbeeld:

$$12:4:2=12\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=12\times\frac{1}{8}=12:8=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$$
$$99\times8:11=99\times8\times\frac{1}{11}=8\times99\times\frac{1}{11}=8\times\frac{99}{11}=8\times9=72.$$

OPGAVE 1.21
Werk onderstaande bewerkingen op een handige manier uit. Schrijf daarbij de aftrekkingen indien nodig als optellingen en de delingen indien nodig als vermenigvuldigingen.

a $124+637-24$
b $32\times97:16$
c $3:2^3\times8:27-2:\sqrt{36}\times3+2:3^2$

VOORBEELD 1.10
De distributieve eigenschap

Twee van onze drie vrienden uit voorbeeld 1.1 besluiten het volgend jaar weer samen op vakantie te gaan – de derde vriend heeft, omdat hij het tekort moest aanvullen, geen zin meer. Omdat ze een luxe vakantie willen, beginnen ze al vroeg met sparen. De eerste stort gedurende 10 maanden iedere maand 150 euro op de vakantierekening en de tweede stort gedurende 10 maanden iedere maand 120 euro op de vakantierekening.
Het bedrag dat er na tien maanden op de vakantierekening staat, kan nu op twee manieren berekend worden:
Iedere maand wordt er $150+120=270$ euro gestort. Na 10 maanden is er dus bij elkaar $\left(150+120\right)\cdot10=270\cdot10=2700$ euro gestort.
Of:
De eerste vriend heeft bij elkaar $150\times10=1500$ euro gestort;
de tweede vriend heeft bij elkaar $120\times10=1200$ euro gestort;
samen hebben ze dus $150\times10+120\times10=1500+1200=2700$ euro gestort.

Als we in dit voorbeeld het bedrag dat de eerste vriend per maand stort a noemen, het bedrag dat de tweede vriend per maand stort b noemen en het aantal maanden p noemen, dan zien we dat deze eigenschap algemeen geldt (daarbij kan p ook een breuk zijn als we veronderstellen dat beide vrienden in een bepaalde maand bijvoorbeeld maar een kwart van hun bijdrage storten).

Distributieve eigenschap

De hier gevonden eigenschap wordt de *distributieve eigenschap* van de optelling en de vermenigvuldiging genoemd:
Voor alle getallen a en b en p heeft de bewerking $\left(a+b\right)\cdot p$ dezelfde uitkomst als de bewerking $a\cdot p+b\cdot p$.
In formule: $\left(a+b\right)\cdot p=a\cdot p+b\cdot p$.

cc BY NC ND

Vanwege de commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging kan de distributieve eigenschap ook geschreven worden als
$p \cdot (a + b) = p \cdot a + p \cdot b.$

Omdat een aftrekking kan worden omgezet naar een optelling en een deling kan worden omgezet naar een vermenigvuldiging kunnen we hieruit eenvoudig afleiden:
$(a-b)\cdot p = a\cdot p - b\cdot p$ (1)
$p\cdot(a-b) = p\cdot a - p\cdot b$ (2)
$(a+b):q = a:q + b:q$ (3)
$(a-b):q = a:q - b:q$ (4)

OPGAVE 1.22
De afleiding van regels (1) en (3) gaat als volgt:
$(a-b)\cdot p = (a+(-b))\cdot p = a\cdot p + (-b)\cdot p = a\cdot p + (-b\cdot p) = a\cdot p - b\cdot p$
$(a+b):q = (a+b)\cdot\frac{1}{q} = a\cdot\frac{1}{q} + b\cdot\frac{1}{q} = a:q + b:q$.
a Leid ook regels (2) en (4) af.
b Wat denkt u van de formule $q:(a+b) = q:a + q:b$?

Bij het optellen en aftrekken van gelijknamige breuken gebruiken we in feite regel (3) en regel (4) 'omgekeerd':
$\frac{2}{9} + \frac{4}{9} = 2:9 + 4:9 = (2+4):9 = \frac{2+4}{9} \quad \left(= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}\right)$
$\frac{11}{12} - \frac{7}{12} = 11:12 - 7:12 = (11-7):12 = \frac{11-7}{12} \quad \left(= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}\right)$.

In de breuknotatie wordt ook het verschil tussen formule (3) en die uit opgave 1.22b duidelijk.
Voor formule (3) kunnen we ook schrijven $\frac{a+b}{q} = \frac{a}{q} + \frac{b}{q}$. We hebben dus telkens dezelfde noemer.
Deze formule is zolang $q \neq 0$ altijd waar, welke getallen we ook nemen voor *a*, *b* en *q*.
De formule uit opgave 1.22b wordt $\frac{q}{a+b} = \frac{q}{a} + \frac{q}{b}$. Hier staan drie verschillende noemers.
Deze formule is alleen waar als $q = 0$. Als $q \neq 0$ is deze formule voor geen enkele waarde van *a* en *b* waar. Welke getallen u ook invult, $\frac{q}{a+b}$ is dan nooit gelijk aan $\frac{q}{a} + \frac{q}{b}$.

In navolging van de formule $\frac{a+b}{q} = \frac{a}{q} + \frac{b}{q}$ wordt overigens ook vaak geschreven $\frac{a\cdot b}{q} = \frac{a}{q}\cdot\frac{b}{q}$.
Met getallenvoorbeelden is onmiddellijk in te zien dat deze laatste formule fout is:
$\frac{4\cdot 9}{6} = \frac{36}{6} = 6$; $\frac{4}{6}\cdot\frac{9}{6} = \frac{4\cdot 9}{6\cdot 6} = \frac{36}{36} = 1$.
Wel correct zijn de formules $\frac{a\cdot b}{q} = \frac{a}{q}\cdot b$ en $\frac{a\cdot b}{q} = a\cdot\frac{b}{q}$.

Een bekende toepassing van de distributieve eigenschap is het berekenen van producten met getallen dicht bij een honderdtal of een duizendtal:
$1001\cdot 643 = (1000+1)\cdot 643 = 1000\cdot 643 + 1\cdot 643 = 643.000 + 643 = 643.643$
$99\cdot 88 = (100-1)\cdot 88 = 100\cdot 88 - 1\cdot 88 = 8800 - 88 = 8712$.

Gelijksoortige termen

Een andere toepassing van de distributieve eigenschap is het samennemen van *gelijksoortige termen*.

Letterfactor

De berekening $3a+4a+5a^2+6b$ kunnen we niet uitvoeren zolang we geen waarden voor a en b kennen. Toch kunnen we deze berekening wel eenvoudiger schrijven. In de eerste twee termen staat de *letterfactor a* en dat betekent dat we de distributieve eigenschap omgekeerd kunnen toepassen: $3\cdot a+4\cdot a=(3+4)\cdot a=7\cdot a$.
Dit geeft: $3a+4a+5a^2+6b=7a+5a^2+6b$.

In de termen $5a^2$ (andere macht van a) en $6b$ (andere letter) is de letterfactor niet hetzelfde als in de eerste twee termen. Dit zijn daarom geen gelijksoortige termen, zodat ze dan ook niet kunnen worden samengenomen met de eerste twee termen, of met elkaar.

Haakjes wegwerken

In een bewerking als $3(a+b)+4(a-b)$ kunnen we eerst schrijven $3(a+b)=3a+3b$ en $4(a-b)=4a-4b$. Deze actie heet *haakjes wegwerken*.
Haakjes wegwerken geeft dus: $3(a+b)+4(a-b)=3a+3b+4a-4b$.
De commutatieve eigenschap van de optelling geeft dan:
$3a+3b+4a-4b=3a+4a+3b-4b$.
Samennemen van gelijksoortige termen geeft vervolgens:
$3a+4a+3b-4b=(3+4)a+(3-4)b=7a+(-1\cdot b)=7a+(-b)=7a-b$.

OPGAVE 1.23
Werk op dezelfde manier uit tot een som of verschil van twee termen:
a $3(a-b)+4(a+b)$
b $4a+5(a^2-a)+6a^2$.

In bewerkingen als $3a-4(a-5)$ en $2(a+b)-(a-b)$ maken de diverse aftrekkingen het lastig om te zien hoe de haakjes weggewerkt moeten worden. Dit probleem kan worden omzeild door de mintekens te 'verstoppen' in de termen die er achter staan (*aftrekken is immers hetzelfde als optellen van het tegengestelde*).
Zo geldt: $3a-4(a-5)=3a+(-4(a+(-5)))=3a+(-4)(a+(-5))$
en $2(a+b)-(a-b)=2(a+b)+(-(a+(-b)))=2(a+b)+(-1)(a+(-b))$
(*het tegengestelde van een getal is immers gelijk aan het product van dat getal met –1*).
Nu geeft het toepassen van de distributieve eigenschap geen problemen meer:
$3a+(-4)(a+(-5))=3a+(-4)a+(-4)\cdot(-5)=3a+(-4a)+20=3a-4a+20$
$2(a+b)+(-1)(a+(-b))=2a+2b+(-1)a+(-1)(-b)$
$=2a+(-1)a+2b+(-1)(-b)=2a-a+2b+b.$
Samennemen van gelijksoortige termen geeft dan
$3a-4(a-5)=3a-4a+20=(3-4)a+20=(-1)a+20=-a+20$
$2(a+b)-(a-b)=2a-a+2b+b=(2-1)a+(2+1)b=1a+3b=a+3b$.

Als u goed begrepen heeft wat het effect van de mintekens in een dergelijke berekening is, kunt u de laatste twee regels natuurlijk ook direct opschrijven (en deze ook in minder stappen uitwerken), maar wees daar wel voorzichtig mee. Bij twijfel altijd eerst de aftrekkingen omzetten in optellingen voordat u de haakjes gaat wegwerken.

OPGAVE 1.24
Werk uit tot een som of verschil van twee termen:
a $3(a+b)-4(a-b)$
b $4a+6a^2-(a^2+a)$

cc BY NC ND

VOORBEELD 1.12

Na de geslaagde vakantie uit voorbeeld 1.10 besluiten onze twee vrienden om direct te beginnen met het opzij leggen van het geld voor de volgende vakantie. De eerste stort nu 100 euro per maand en de tweede 80 euro per maand. Dit houden ze vol van september tot en met juni van het volgende jaar. In juli stort elk nog eens de helft van zijn normale bijdrage.
Om belastingtechnische redenen hebben onze vrienden in hun administratie een onderscheid gemaakt tussen de 4 stortingen die ze voor 1 januari gedaan hebben en de $6\frac{1}{2}$ storting die ze na 1 januari gedaan hebben.

Ook nu zijn er diverse manieren om het saldo van de vakantierekening te berekenen.
Gaan we uit van het totale bedrag per storting en het totale aantal stortingen, dan wordt het totale saldo in euro's gegeven door $\left(100+80\right)\cdot\left(4+6\frac{1}{2}\right)$.
We kunnen ook apart berekenen:
– het totale bedrag dat de eerste vriend voor 1 januari gestort heeft: $100 \text{ euro}\times 4$;
– het totale bedrag dat de eerste vriend na 1 januari gestort heeft: $100 \text{ euro}\times 6\frac{1}{2}$;
– het totale bedrag dat de tweede vriend voor 1 januari gestort heeft: $80 \text{ euro}\times 4$;
– het totale bedrag dat de tweede vriend na 1 januari gestort heeft: $80 \text{ euro}\times 6\frac{1}{2}$.
Volgens de eerste berekening is het saldo op de vakantierekening $180 \text{ euro}\times 10\frac{1}{2}$ euro, volgens de tweede berekening is het saldo 400 + 650 + 320 + 520 euro. Beide berekeningen geven (uiteraard!) dezelfde uitkomst, namelijk 1890 euro.

Als de eerste vriend in voorbeeld 1.12 iedere maand a euro stort en de tweede b euro, en als er verder c stortingen zijn voor 1 januari en d stortingen na 1 januari, dan geeft de eerste redenering in dit voorbeeld de formule $\left(a+b\right)\cdot\left(c+d\right)$. De tweede redenering geeft de formule $ac+ad+bc+bd$.

Blijkbaar geldt:
Voor alle getallen a en b en c en d heeft de bewerking $\left(a+b\right)\cdot\left(c+d\right)$ dezelfde uitkomst als de bewerking $a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d$.
In formule: $\left(a+b\right)\cdot\left(c+d\right)=ac+ad+bc+bd$.

Deze formule kan ook afgeleid worden uit de formule $\left(a+b\right)\cdot p=a\cdot p+b\cdot p$ door p te vervangen door $\left(c+d\right)$. Zo krijgen we $\left(a+b\right)\cdot\left(c+d\right)=a\cdot\left(c+d\right)+b\cdot\left(c+d\right)$.
Nog een keer de distributieve eigenschap toepassen geeft dan de formule hierboven.

OPGAVE 1.25

Voorbeeld:
$\left(2x-2\right)\left(x+3\right)=2x\cdot x-2\cdot x+2x\cdot 3-2\cdot 3=2x^2-2x+6x-6=2x^2+4x-6$
Werk op dezelfde manier uit:
a $\left(x-4\right)\left(2x+3\right)$ c $\left(4x+6y\right)\left(2x+y\right)$
b $\left(x-y\right)\left(x-y\right)$ d $\left(3-x\right)\left(x+3\right)$.

OPGAVE 1.26

Onderstaande uitdrukkingen worden *merkwaardige producten* genoemd.
Werk elk van deze producten uit.

a $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = \ldots$

b $(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = \ldots$

c $(A-B)(A+B) = \ldots$

OPGAVE 1.27

a Controleer dat $(3-1)(3+2)-(4+2)(5-4) = 2\cdot 5-6\cdot 1 = 10-6 = 4$.

b Wat is er fout in de volgende uitwerking?

$$\begin{aligned}(3-1)(3+2)-(4+2)(5-4) &= 3\cdot 3-1\cdot 3+3\cdot 2-1\cdot 2-4\cdot 5+2\cdot 5-4\cdot 4-2\cdot 4\\ &= 9-3+6-2-20+10-16-8 = -24\end{aligned}$$

7 Eigenschappen van machten

In paragraaf 4 hebben we machtsverheffen gedefinieerd. Hier geven we een vijftal algemene eigenschappen van machten. Deze geven ons de mogelijkheid om bewerkingen met machten te herschrijven en/of om deze op een handige manier uit te voeren.

Eigenschap 1

Het product van twee machten met hetzelfde grondtal
Voorbeeld: $a^2\cdot a^3 = (a\cdot a)\cdot(a\cdot a\cdot a) = a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a = a^5$
Dit volgt uit de associatieve eigenschap van de vermenigvuldiging.
Voor alle exponenten m en n en voor alle grondtallen a geldt:
$a^m\cdot a^n = a^{m+n}$

Eigenschap 2

Het quotiënt van twee machten met hetzelfde grondtal

Voorbeeld: $\dfrac{a^5}{a^2} = \dfrac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a} = \dfrac{a\cdot a\cdot a\cdot(a\cdot a):(a\cdot a)}{(a\cdot a):(a\cdot a)} = \dfrac{a\cdot a\cdot a}{1} = a\cdot a\cdot a = a^3$

Dit volgt uit de rekenregels voor breuken.

Voor alle exponenten m en n en voor alle grondtallen a met $a \neq 0$ geldt:
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Eigenschap 3

Een macht van een macht
Voorbeeld: $(a^4)^3 = a^4\cdot a^4\cdot a^4 = a^{4+4+4} = a^{12}$
Dit volgt uit de eigenschap 1 van machten.
Voor alle exponenten m en n en voor alle grondtallen a geldt:
$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$

Eigenschap 4

Het product van twee machten met dezelfde exponent
Voorbeeld: $a^3\cdot b^3 = a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b = a\cdot b\cdot a\cdot b\cdot a\cdot b = (a\cdot b)^3$
Dit volgt uit de commutatieve en associatieve eigenschap van de vermenigvuldiging.
Voor alle exponenten n en voor alle grondtallen a en b geldt:
$a^n\cdot b^n = (a\cdot b)^n$

Eigenschap 5

Het quotiënt van twee machten met dezelfde exponent
Voorbeeld: $\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{a\cdot a}{b\cdot b} = \dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2$

Dit volgt uit de rekenregels voor breuken.
Voor alle exponenten n en voor alle grondtallen a en b met $b \neq 0$ geldt:
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
In omgekeerde volgorde geeft eigenschap 5 precies aan hoe we een macht van een breuk berekenen.

OPGAVE 1.28
Bereken:

a	$2 \cdot 3^4$	c	$64 : 2^3$	e	$2^4 + 3^4$
b	$(2 \cdot 3)^4$	d	$(64 : 2)^3$	f	$(2 + 3)^4$

OPGAVE 1.29
Schrijf zonder haakjes en breukstrepen:

a	$(ab)^4$	d	$(ab^2)^4$	g	$(a-b)^2$
b	$\frac{a^{27}}{a^{19}}$	e	$\frac{a^{12} \cdot a^7}{(a^4)^4}$	h	$\frac{(a^4+b)^2 - b^2}{a^2}$
c	$\frac{a^4}{a^3}$	f	$\frac{a \cdot a^5}{(a^2)^3}$	i	$\frac{(a^4+b)^2 - b^2}{a}$

Door te spelen met eigenschap 2 kunnen we ook zien wat de betekenis zou moeten zijn van a^1, a^0, a^{-1} en van a^{-n} als $n = 2, 3, 4$ etc.

Volgens eigenschap 2 geldt $\frac{a^4}{a^3} = a^{4-3} = a^1$.
Uitwerken met 'gezond verstand' geeft

$$\frac{a^4}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = \frac{a \cdot (a \cdot a \cdot a) : (a \cdot a \cdot a)}{(a \cdot a \cdot a) : (a \cdot a \cdot a)} = \frac{a}{1} = a .$$

Conclusie: $a^1 = a$.

Volgens eigenschap 2 geldt $\frac{a^4}{a^4} = a^{4-4} = a^0$.
Uitwerken met 'gezond verstand' geeft $\frac{a^4}{a^4} = 1$.
Conclusie: $a^0 = 1$.

Volgens eigenschap 2 geldt $\frac{a^3}{a^4} = a^{3-4} = a^{-1}$.
Uitwerken met 'gezond verstand' geeft

$$\frac{a^3}{a^4} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{(a \cdot a \cdot a) : (a \cdot a \cdot a)}{a \cdot (a \cdot a \cdot a) : (a \cdot a \cdot a)} = \frac{1}{a} .$$

Conclusie: $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Volgens eigenschap 2 geldt $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$.
Uitwerken met 'gezond verstand' geeft

$$\frac{a^2}{a^5} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{(a \cdot a) : (a \cdot a)}{a \cdot a \cdot a \cdot (a \cdot a) : (a \cdot a)} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^3} .$$

Conclusie: $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$.

De betekenis van a^{-1} kunnen we ook verduidelijken met behulp van eigenschap 1.
Volgens deze eigenschap geldt $a^{-1} \cdot a^1 = a^{-1+1} = a^0 = 1$, dus zijn a^{-1} en $a^1 = a$ elkaars omgekeerde.
a^{-1} is dus het omgekeerde van *a*.

Dit kunnen we samen met eigenschap 3 gebruiken bij het uitrekenen van negatieve machten van breuken:
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1 \cdot 2} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)^2$, dus $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ is het kwadraat van het omgekeerde van $\frac{2}{3}$.
Dit geeft: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}\ \left(= 2\frac{1}{4}\right)$.

Op dezelfde manier volgt $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$ en $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 4^3 = 64$.

Op grond van het bovenstaande definiëren we voor alle grondtallen *a* met uitzondering van $a = 0$:
$a^{-1} = \frac{1}{a}$ en $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$.

OPGAVE 1.30
Bereken:

a	3^{-1}	c	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$	e	$\left(-1\frac{1}{2}\right)^{-1}$
b	3^{-5}	d	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$	f	$\left(-1\frac{1}{2}\right)^{-5}$.

Tot slot van deze paragraaf een aantal eigenschappen die *niet* gelden voor machten.

Machtsverheffen is niet commutatief: $3^2 \neq 2^3$
(de uitzondering die de regel bevestigt is $2^4 = 4^2$).

Machtsverheffen is niet associatief: $\left(3^2\right)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6$ is niet gelijk aan $3^{(2^3)} = 3^8$.

De eigenschappen van machten zeggen niets over het wegwerken van haakjes als het grondtal een som of een verschil is van twee getallen.
$(a+b)^2$ is niet gelijk aan $a^2 + b^2$, maar moet worden uitgewerkt met de distributieve eigenschap:
$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a \cdot a + b \cdot a + a \cdot b + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$.

OPGAVE 1.31
Bekijk de bewerkingen $(a-b)^3$ en $a^3 - b^3$.
a Bereken de uitkomst van beide bewerkingen als $a = 3$ en $b = 2$.
b Controleer onderstaande uitwerking:

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b) \cdot (a-b)^2 = (a-b) \cdot \left(a^2 - 2ab + b^2\right) \\ &= a \cdot \left(a^2 - 2ab + b^2\right) + (-b) \cdot \left(a^2 - 2ab + b^2\right) \\ &= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

c Bereken de uitkomst van $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ als $a = 3$ en $b = 2$ en controleer dat deze gelijk is aan de uitkomst van $(a-b)^3$.

cc BY NC ND

Kijk ook uit bij uitdrukkingen als $a^m \cdot b^n$.
Deze worden vaak uitgewerkt als $(a \cdot b)^{m+n}$ of nog erger, als $(a \cdot b)^{m \cdot n}$.
Er bestaat echter geen regel om machten met verschillende exponenten en verschillende grondtallen te combineren.
De uitdrukking $a^m \cdot a^m$ kan met zowel eigenschap 1 (gelijke grondtallen), eigenschap 4 (gelijke exponenten) als eigenschap 3 (kwadraat van een macht) worden uitgewerkt, maar we moeten maar één van deze regels tegelijk toepassen.
Goed zijn $a^m \cdot a^m = a^{m+m} = a^{2m}$, $a^m \cdot a^m = (a \cdot a)^m = (a^2)^m = a^{2m}$ en $a^m \cdot a^m = (a^m)^2 = a^{m \cdot 2} = a^{2m}$.
Fout is $a^m \cdot a^m = (a \cdot a)^{m+m} = (a^2)^{2m}$ of nog erger $a^m \cdot a^m = (a \cdot a)^{m \cdot m} = (a^2)^{m^2}$.

8 Berekeningen met wortels

In paragraaf 4 hebben we wortels en worteltrekken gedefinieerd. Hier bespreken we een tweetal praktische regels die bij het rekenen met wortels van pas komen. Deze worden bewezen door de definitie van wortels te combineren met de eigenschappen van machten.

De wortel van een product

$\sqrt{a}$ is het getal waarvan het kwadraat gelijk is aan a en $\sqrt{b}$ is het getal waarvan het kwadraat gelijk is aan b, dus $(\sqrt{a})^2 = a$ en $(\sqrt{b})^2 = b$.
Uit eigenschap 4 van machten volgt dan: $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$.
Het kwadraat van $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ is dus gelijk aan ab.
Dit betekent dat $\sqrt{ab}$ gelijk is aan $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.
Bovenstaande redenering kunnen we ook maken voor hogere exponenten, dus algemeen geldt:
Voor alle $a \geq 0$ en alle $b \geq 0$ geldt $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ en $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.
Als de wortelexponent n oneven is, geldt deze laatste formule ook als a en/of b negatief is.

De wortel van een quotiënt

Uit eigenschap 5 van machten volgt: $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$.
Het kwadraat van $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ is dus gelijk aan $\frac{a}{b}$.
Dit betekent dat $\sqrt{\frac{a}{b}}$ gelijk is aan $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
Bovenstaande redenering kunnen we ook maken voor hogere exponenten, dus algemeen geldt:
Voor alle $a \geq 0$ en alle $b > 0$ geldt $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ en $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
Als de wortelexponent n oneven is, geldt deze laatste formule ook als a en/of b negatief is.

De eerste regel maakt het mogelijk om wortels van grote getallen snel uit te rekenen:
$\sqrt{2500} = \sqrt{25 \times 100} = \sqrt{25} \times \sqrt{100} = 5 \times 10 = 50$
$\sqrt{9.000.000} = \sqrt{9 \times 1.000.000} = \sqrt{9} \times \sqrt{1.000.000} = 3 \times 1000 = 3000$.

De tweede regel is handig bij het berekenen van wortels van breuken:
$\sqrt{5\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{16}} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$
$\sqrt{0,25} = \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Met beide regels kunnen we soms het product of het quotiënt van twee wortels die niet 'mooi'uitkomen, wel exact berekenen:
$\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 8}=\sqrt{16}=4$
$\dfrac{\sqrt{99}}{\sqrt{11}}=\sqrt{\dfrac{99}{11}}=\sqrt{9}=3$.

OPGAVE 1.32
Bereken voor zover mogelijk:

a $\sqrt{4900}$

b $\dfrac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}$

c $\sqrt{250}\cdot\sqrt{10}$

d $\sqrt[3]{-0,008}$

e $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$

f $\dfrac{\sqrt{-75}}{\sqrt{-3}}$

De eerste regel kan ook gebruikt worden om in wortels als $\sqrt{12}$ en $\sqrt{72}$ het getal onder de wortel kleiner te maken:
$\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=2\cdot\sqrt{3}$
$\sqrt{63}=\sqrt{9\cdot 7}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{7}=3\cdot\sqrt{7}$.

Omdat het vermenigvuldigingsteken tussen een getal en een symbool weggelaten kan worden, worden deze wortels meestal geschreven als $2\sqrt{3}$ resp. $3\sqrt{7}$. Let er bij deze notatie wel op dat de factor voor de wortel niet als wortelexponent geschreven wordt: $2\sqrt{3}\neq\sqrt[2]{3}$, $3\sqrt{7}\neq\sqrt[3]{7}$.

Kwadraten uit een wortel halen

Bovenstaande operatie noemen we ook wel *kwadraten uit een wortel halen*. Bij grotere getallen onder de wortel kan deze ook stapsgewijs worden toegepast:
$\sqrt{72}=\sqrt{4\cdot 18}=2\sqrt{18}=2\sqrt{9\cdot 2}=2\cdot 3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$
$\sqrt{96}=\sqrt{4\cdot 24}=2\sqrt{24}=2\sqrt{4\cdot 6}=2\cdot 2\sqrt{6}=4\sqrt{6}$.

U mag, als u deze mogelijkheid direct ziet, natuurlijk ook in één keer schrijven
$\sqrt{72}=\sqrt{36\cdot 2}=6\sqrt{2}$ en $\sqrt{96}=\sqrt{16\cdot 6}=4\sqrt{6}$.

In de wiskunde is het gebruikelijk dat er geen wortels in de noemer van een breuk staan.
Aangezien de waarde van een beuk niet verandert als we teller en noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigen, kunnen we overwegingen bij de eerste regel ook gebruiken om dit voor elkaar te krijgen:
$\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\dfrac{2}{\sqrt{10}}=\dfrac{2\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{\left(\sqrt{10}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{10}}{10}=\frac{2}{10}\sqrt{10}=\frac{1}{5}\sqrt{10}$.

Hiermee vinden we ook:
$\sqrt{\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $\sqrt{0,4}=\sqrt{\frac{4}{10}}=\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{10}}=\dfrac{2}{\sqrt{10}}=\frac{2}{10}\sqrt{10}=0,2\sqrt{10}$.
Deze wortels zouden we ook zo kunnen uitwerken:
$\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ en
$\sqrt{0,4}=\sqrt{\frac{4}{10}}=\sqrt{\frac{40}{100}}=\dfrac{\sqrt{40}}{\sqrt{100}}=\dfrac{\sqrt{4\cdot 10}}{10}=\dfrac{2\sqrt{10}}{10}=\frac{2}{10}\sqrt{10}=0,2\sqrt{10}$.

cc BY NC ND

OPGAVE 1.33
Werk de volgende wortels om tot een uitdrukking van de vorm $q\sqrt{n}$ waarbij q een rationaal getal en n een zo klein mogelijk geheel getal is:

a $\sqrt{8}$ c $\sqrt{\frac{1}{12}}$ e $\sqrt{\frac{2}{3}}$

b $\sqrt{468}$ d $\sqrt{0{,}75}$ f $\sqrt{1\frac{1}{3}}$

Net als bij machten is er *geen regel* voor het herschrijven van de wortel van een som of een verschil.
In tegenstelling tot de situatie bij machten, waar we de macht $(a+b)^2$ kunnen uitwerken als het product $(a+b)(a+b)$, is er ook geen andere manier om uitdrukkingen van de vorm $\sqrt{a+b}$ of $\sqrt{a-b}$ te herschrijven. We laten zulke uitdrukkingen dus gewoon staan, of we vullen concrete waarden voor a en b in, berekenen dan eerst de som of het verschil en nemen daarna pas de wortel.

OPGAVE 1.34
Neem in deze opgave $a=16$ en $b=9$.

a Bereken $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ en $\sqrt{a+b}$.
b Is $\sqrt{a+b}$ gelijk aan $\sqrt{a}+\sqrt{b}$?
c Is $\sqrt{a-b}$ gelijk aan $\sqrt{a}-\sqrt{b}$?

Uitdrukkingen als $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ en $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ kunnen soms herschreven worden als we in $\sqrt{a}$ en/of $\sqrt{b}$ kwadraten uit een wortel kunnen halen.
$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2}+\sqrt{4\cdot 2}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=1\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2}=(1+2)\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}$
$\sqrt{27}-\sqrt{12}=\sqrt{9\cdot 3}-\sqrt{4\cdot 3}=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}=(3-2)\sqrt{3}=\sqrt{3}$.
We zien dat we het samennemen van gelijksoortige termen ook kunnen toepassen bij wortels.

OPGAVE 1.35
Werk de volgende uitdrukkingen om tot de vorm $q\sqrt{n}$ waarbij q een rationaal getal en n een zo klein mogelijk geheel getal is:

a $\sqrt{12}+\sqrt{108}$ b $\sqrt{32}-\sqrt{2}$ c $\sqrt{1000}-\sqrt{360}$.

Het samennemen van gelijksoortige termen kan ook gebruikt worden bij berekeningen met andere reële getallen, zoals π:
$3\pi+4\pi=(3+4)\pi=7\pi$
$\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{6}\pi=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\pi=\left(\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\right)\pi=\frac{4}{6}\pi=\frac{2}{3}\pi$

9 Vergelijkingen

VOORBEELD 1.13
Na alweer een geslaagde vakantie hebben onze twee overgebleven vrienden direct plannen voor een nieuw avontuur. Ze hebben dit keer nog 200 euro over op hun vakantierekening en ze hebben nog 10 maanden de tijd om te sparen voor de volgende vakantie. Voor deze vakantie willen ze in totaal 2500 euro op de vakantierekening hebben staan en ze vragen zich nu af hoe groot het bedrag is dat iedere maand op de rekening gestort moet worden.
De oplossing van het probleem van onze vrienden begint door het bedrag dat iedere maand gestort moet worden aan te geven met een letter, bijvoorbeeld x.
Als de vrienden gedurende 10 maanden x euro op de vakantierekening storten, dan staat er na die 10 maanden (inclusief het overschot van het vorige jaar) $10x+200$ euro op de vakantierekening. Dit bedrag moet gelijk zijn aan 2500 euro.
Er moet dus gelden: $10x+200=2500$

Vergelijking

De formule $10x + 200 = 2500$ is een voorbeeld van wat in de wiskunde een *vergelijking* wordt genoemd. In zo'n vergelijking staan één (of meer) letters, die allerlei waarden kunnen aannemen.
In het voorbeeld staat x voor geldbedrag (x is dus een veelvoud van 0,01 euro), maar als we de context van het voorbeeld loslaten, kan x ieder reëel getal zijn. De letter x wordt de *onbekende* of de *variabele* genoemd.

Onbekende
Variabele

In de wiskunde wordt de variabele net als in het voorbeeld vaak aangegeven met de letter x, in de natuurwetenschappen en andere toepassingen worden meestal andere letters gebruikt, afhankelijk van de context. Zo wordt de tijd vaak aangegeven met de letter t.

Andere voorbeelden van vergelijkingen zijn:
$6(x + 4) = 12$
$(x + 4)^2 = 36$
$6(x + 4) = (x + 4)^2$.

Kenmerkend voor een vergelijking is dat er sommige waarden van x zijn die de vergelijking waar maken als ze in de vergelijking worden ingevuld, en dat er (meestal veel meer) waarden van x zijn die geen ware bewering opleveren als ze ingevuld worden. Een waarde van x die de vergelijking waar maakt, wordt een *oplossing* van de vergelijking genoemd.

Oplossing

OPGAVE 1.36
a Ga na dat $x = 2$ een oplossing is van de vergelijking $(x + 4)^2 = 36$.
b Is $x = 2$ ook een oplossing van de vergelijkingen $6(x + 4) = 12$ en $6(x + 4) = (x + 4)^2$?
c Heeft de vergelijking $(x + 4)^2 = 36$ ook andere oplossingen?

Bij het oplossen van een vergelijking zijn we niet tevreden als we toevallig een oplossing zien of in de schoot geworpen krijgen, we willen zeker weten dat we *alle* waarden van x vinden die de vergelijking waar maken. Daarom moeten we vergelijkingen systematisch oplossen. De methode waarmee we dat doen hangt af van het type vergelijking.

Om de vergelijkingen $6(x+4) = 12$, $(x+4)^2 = 36$ en $6(x+4) = (x+4)^2$ te typeren, werken we eerst de haakjes weg. Dat is overigens ook meestal de eerste stap bij het systematisch oplossen van een vergelijking. Zo krijgen we:

$$6(x+4) = 12 \Leftrightarrow 6 \cdot x + 6 \cdot 4 = 12 \Leftrightarrow 6x + 24 = 12$$
$$(x+4)^2 = 36 \Leftrightarrow (x+4)(x+4) = 36 \Leftrightarrow x \cdot x + 4 \cdot x + x \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 36$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 = 36$$
$$6(x+4) = (x+4)^2 \Leftrightarrow 6x + 24 = x^2 + 8x + 16$$

Het teken $\Leftrightarrow$ (spreek uit: is gelijkwaardig met) wordt gebruikt om aan te geven dat de vergelijkingen voor en na dit teken dezelfde oplossingen hebben. We spreken van *gelijkwaardige vergelijkingen*.

Gelijkwaardige vergelijking

In de vergelijkingen hierboven staan alleen termen met x of met een macht van x. In zo'n vergelijking wordt de exponent van de hoogste macht de *graad* van de vergelijking genoemd.

Graad

Eerstegraads vergelijking

Zo is $6x + 24 = 12$ een *eerstegraads vergelijking* (er geldt immers $x = x^1$). Ook de vergelijking $10x + 200 = 2500$ uit voorbeeld 1.13 is een eerstegraads vergelijking. In paragraaf 10 bespreken we hoe we deze vergelijkingen systematisch oplossen.

cc BY NC ND

Tweedegraads vergelijking

De vergelijkingen $x^2+8x+16=64$ en $8x+32=x^2+8x+16$ zijn voorbeelden van *tweedegraads vergelijkingen*. Deze worden besproken in paragraaf 11.

In paragraaf 12 bespreken we nog een tweetal voorbeelden van andere types vergelijkingen.

OPGAVE 1.37
Wat is de graad van de vergelijking $x^3=x^4$?
En van de vergelijking $(x-1)(x+1)=3$?

Toegestane stappen

Bij het oplossen van vergelijkingen zijn de volgende stappen toegestaan:
– Links en rechts van het =-teken dezelfde term optellen of aftrekken: $x-4=0 \Leftrightarrow x-4+4=0+4 \Leftrightarrow x=4$.
– Links en rechts van het =-teken vermenigvuldigen met of delen door dezelfde factor. $2x=4 \Leftrightarrow (2x):2=4:2 \Leftrightarrow x=2$.
Pas op: deze factor mag niet gelijk zijn aan 0. Delen door 0 mag niet en bij vermenigvuldigen met 0 blijft er geen vergelijking over.

In de volgende paragrafen zien we hoe deze toegestane stappen worden gebruikt bij het oplossen van eerste- en tweedegraads vergelijkingen.

10 Eerstegraads vergelijkingen

In de vorige paragraaf zijn we de eerstegraads vergelijkingen $6x + 24 = 12$ en $10x+200=2500$ tegengekomen. Andere voorbeelden van eerstegraads vergelijkingen zijn $\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}x+6$ en $-\frac{1}{3}x+6=4x-8$. Een eerstegraads vergelijking lossen we op door deze stapsgewijs te vereenvoudigen met behulp van de toegestane stappen.

VOORBEELD 1.14
Gegeven de vergelijking $6x+24=12$.
Links en rechts 24 aftrekken geeft: $6x=-12$.
Links en rechts delen door 6 geeft: $x=-2$.
Dit is de oplossing van deze vergelijking.
Controle: Als we $x=-2$ invullen in $6x+24=12$ krijgen we de ware bewering $6\cdot(-2)+24=12$.

OPGAVE 1.38
Los op dezelfde manier de vergelijking $10x+200=2500$ op en bereken zo het bedrag dat onze vrienden in voorbeeld 1.13 iedere maand moeten storten.

VOORBEELD 1.15
Gegeven de vergelijking $\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}x+6$.
Links en rechts $2\frac{1}{2}$ aftrekken geeft: $\frac{1}{2}x=-\frac{1}{3}x+3\frac{1}{2}$.
Links en rechts $\frac{1}{3}x$ optellen geeft: $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x=3\frac{1}{2}$.
Omdat $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$ volgt hieruit: $\frac{5}{6}x=3\frac{1}{2}$.
Om de factor $\frac{5}{6}$ weg te werken vermenigvuldigen we nu links en rechts met $\frac{6}{5}$. Dit geeft: $\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{6}x=\frac{6}{5}\cdot3\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1\cdot x=\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{2} \Leftrightarrow x=\frac{42}{10}=\frac{21}{5}=4\frac{1}{5}$.
Het rekenen met breuken kan in dit voorbeeld voor een groot deel omzeild worden door als eerste stappen alle termen te vermenigvuldigen met de noemers van de breuken, dus met 2 en met 3. Op die manier verdwijnen de breuken uit de vergelijking.
De vergelijking was $\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}x+6$.
Links en rechts vermenigvuldigen met 2 geeft: $2\left(\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}\right)=2\left(-\frac{1}{3}x+6\right)$.

Haakjes wegwerken geeft dan: $x+5=-\frac{2}{3}x+12$.
Links en rechts vermenigvuldigen met 3 geeft: $3\left(x+5\right)=3\left(-\frac{2}{3}x+12\right)$.
Haakjes wegwerken geeft dan: $3x+15=-2x+36$.
Deze stappen kunnen we ook in één keer nemen door links en rechts direct met 6 te vermenigvuldigen.
Vervolgens trekken we links en rechts 15 af: $3x=-2x+21$.
Links en rechts $2x$ optellen geeft dan: $5x=21$.
Links en rechts delen door 5 geeft tenslotte: $x=\frac{21}{5}=4\frac{1}{5}$.

OPGAVE 1.39
Los op dezelfde manier de vergelijking $-\frac{1}{3}x+6=4x-8$ op.

OPGAVE 1.40
Los de volgende vergelijkingen op en controleer uw antwoorden zoals in voorbeeld 1.14.

a $3x-6=5x+7$ c $\frac{1}{4}x+3=\frac{2}{3}x-2$

b $5x+4=3x+3$ d $\frac{1}{3}(x+4)=2x+13$ (*Werk eerst de haakjes weg!*)

11 Tweedegraads vergelijkingen

Herleiden op 0

De meeste tweedegraads vergelijkingen worden opgelost door deze eerst in de standaardvorm $ax^2+bx+c=0$ te schrijven, dus met alle termen links van het =-teken. We noemen dit *herleiden op 0*.
Hiervoor gebruiken we weer de toegestane stappen bij het oplossen van vergelijkingen: links en rechts dezelfde termen optellen of aftrekken en links en rechts vermenigvuldigen met of delen door dezelfde factor.
Indien nodig werken we daarbij eerst de haakjes weg.

VOORBEELD 1.16
Gegeven de vergelijking $6\left(x+4\right)=\left(x+4\right)^2$.
Haakjes wegwerken geeft: $6x+24=x^2+8x+16$.
Links en rechts 16 afrekken geeft: $6x+8=x^2+8x$.
Links en rechts $8x$ aftrekken geeft: $-2x+8=x^2$.
Links en rechts x^2 aftrekken geeft: $-x^2-2x+8=0$.
Links en rechts delen door –1 geeft: $x^2+2x-8=0$.
Dit geeft $a=1$, $b=2$ en $c=-8$.

Let op dat bij de laatste stap alle termen links van het =-teken door –1 gedeeld moeten worden. Rechts heeft de deling door –1 geen effect.
Overigens heeft de vergelijking bij de voorlaatste stap ook al de standaardvorm, maar het oplossen van tweedegraads vergelijkingen is zoals we zullen zien makkelijker als $a=1$.

OPGAVE 1.41
Wat zijn de waarden van *a*, *b* en *c* in de volgende vergelijkingen?
Let op: *b* en *c* kunnen ook 0 zijn.

a $2x^2-3x+5=0$ c $x^2+7x=0$

b $x^2+x+1=0$ d $2x^2-4=0$.

OPGAVE 1.42
Schrijf onderstaande vergelijkingen in de standaardvorm. Zorg er daarbij voor dat $a=1$. Noteer de waarden van *b* en *c*.

a $\left(x+4\right)^2=36$ b $4x^2+9x+8=2x^2-x$.

Iedere tweedegraads vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ kan worden opgelost met kwadraatafsplitsen en de daaruit voortvloeiende *abc*-formule. Deze oplossingsmethode vergt echter nogal veel rekenwerk. Daarom bespreken we eerst drie situaties waarin de vergelijking met een andere, snellere methode gevonden kan worden.
Bij twee van deze methoden maken we gebruik van het volgende principe:
Een product $A \cdot B$ is alleen gelijk aan 0, als één van de factoren gelijk is aan 0. In formule:
$A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ of $B = 0$

Vergelijking splitsen
$A \cdot B = 0 \Leftrightarrow$
$A = 0 \vee B = 0$

Een vergelijking van de vorm $A \cdot B = 0$ kan dus worden opgelost door de *vergelijking te splitsen* in de vergelijkingen $A = 0$ en $B = 0$ en vervolgens deze twee vergelijkingen afzonderlijk op te lossen.
In bovenstaande formule is 'of' gebruikt in de betekenis 'en/of': een product is ook gelijk aan 0 als beide factoren gelijk zijn aan 0. In formules wordt 'of' in deze betekenis ook weergegeven met het symbool $\vee$.

Vergelijkingen van de vorm $ax^2 + c = 0$
In deze vergelijkingen geldt $b = 0$, er is dus geen eerstegraads term.
We passen de toegestane stappen voor het oplossen van een vergelijking toe om de vergelijking te herschrijven tot de vorm $x^2 = d$.

VOORBEELD 1.17
Gegeven de vergelijking $10x^2 - 40 = 0$.
Links en rechts 40 optellen geeft: $10x^2 = 40$.
Links en rechts delen door 10 geeft: $x^2 = 4$.
Hieruit volgt: $x = 2$ of $x = -2$.

Let bij de laatste stap op: het gaat nu niet om de wortel uit 4, maar om alle waarden van x waarvan het kwadraat 4 is.

VOORBEELD 1.18
Gegeven de vergelijking $5x^2 + 90 = 10x^2$.
Links en rechts 90 aftrekken geeft: $5x^2 = 10x^2 - 90$.
Links en rechts $10x^2$ aftrekken geeft: $-5x^2 = -90$.
Links en rechts delen door -5 geeft: $x^2 = 18$.
Hieruit volgt: $x = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$ of $x = -\sqrt{18} = -3\sqrt{2}$.

VOORBEELD 1.19
Gegeven de vergelijking $7x^2 + 56 = 0$.
Links en rechts 56 aftrekken geeft: $7x^2 = -56$.
Links en rechts delen door 7 geeft: $x^2 = -8$.
Aangezien een kwadraat van een reëel getal nooit negatief kan zijn, heeft deze vergelijking geen oplossingen.

OPGAVE 1.43
Los de volgende vergelijkingen op. Controleer dat de gevonden oplossingen een ware bewering opleveren als deze worden ingevuld in de oorspronkelijke vergelijking.

a $3x^2 = 27$
b $3x^2 + 27 = 0$
c $7 - 10x^2 = 8x^2 + 5$
d $7x^2 - 56 = 0$

Opmerking
De vorm $ax^2 + c = 0$ is de uitzondering op de regel dat we een tweedegraads vergelijking in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ moeten schrijven om deze op te lossen. In alle andere situaties gaat de oplossingsmethode uit van deze standaardvorm.

Vergelijkingen van de vorm $ax^2 + bx = 0$

In deze vergelijkingen geldt $c = 0$, er is dus geen constante term.
Nu staat de onbekende x in alle termen en dat maakt het mogelijk om de vergelijking te herschrijven met behulp van de distributieve eigenschap.
Deze kunnen we hier 'omgekeerd' toepassen door te schrijven:
$ax^2 + bx = ax \cdot x + b \cdot x = x \cdot ax + x \cdot b = x \cdot (ax + b)$.

Ontbinden in factoren

Buiten haakjes halen

Deze techniek heet *ontbinden in factoren* door het *buiten haakjes halen* van de factor x. Een vergelijking van de vorm $ax^2 + bx = 0$ kan dus ook worden geschreven als $x \cdot (ax + b) = 0$.
Dit is een vergelijking van de vorm $A \cdot B = 0$, met $A = x$ en $B = ax + b$, dus kunnen we deze splitsen in $A = 0 \vee B = 0$, ofwel $x = 0 \vee ax + b = 0$.
Eén oplossing, $x = 0$, staat er nu al, de andere oplossing krijgen we door de vergelijking $ax + b = 0$ verder op te lossen.

VOORBEELD 1.20

Gegeven de vergelijking $x^2 - 3x = 0$.
Herschrijf dit tot: $x \cdot x - x \cdot 3 = 0$.
x buiten haakjes halen geeft: $x \cdot (x - 3) = 0$.
Splits de vergelijking: $x = 0 \vee x - 3 = 0$.
Los de tweede vergelijking verder op: $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x - 3 + 3 = 0 + 3 \Leftrightarrow x = 3$.
De oplossingen zijn dus: $x = 0$ en $x = 3$.

VOORBEELD 1.21

Gegeven de vergelijking $x^2 - 3x = 4(x^2 - x)$.
We herleiden deze eerst op 0:
$x^2 - 3x = 4(x^2 - x) \Leftrightarrow x^2 - 3x = 4x^2 - 4x \Leftrightarrow -3x^2 + x = 0$.
Herschrijf dit tot: $-3x \cdot x + x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (-3x) + x \cdot 1 = 0$.
Merk op dat we om de factor x buiten haakjes te kunnen halen, de tweede term een product moet zijn.
Daarom schrijven we deze hier als $x \cdot 1$.
x buiten haakjes halen geeft: $x \cdot (-3x + 1) = 0$.
Splits de vergelijking: $x = 0 \vee -3x + 1 = 0$.
Los de tweede vergelijking verder op: $-3x + 1 = 0 \Leftrightarrow -3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.
De oplossingen zijn dus: $x = 0$ en $x = \frac{1}{3}$.

OPGAVE 1.44

Los de volgende vergelijkingen op. Controleer dat de gevonden oplossingen een ware bewering opleveren als deze worden ingevuld in de oorspronkelijke vergelijking.

a $x^2 + 4x = 0$
b $x^2 = 4x$
c $3x^2 + 4 = 2(x + 2)$
d $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 4 = \frac{2}{3}(x + 6)$.

Vergelijkingen van de vorm $x^2 + bx + c = 0$

De techniek van het oplossen van tweedegraads vergelijkingen met ontbinden in factoren kan ook worden toegepast als de eerste factor ingewikkelder is dan in de vorige sectie. In dat geval moeten we na het splitsen nog twee eerstegraads vergelijkingen oplossen, maar die zijn meestal heel simpel.

VOORBEELD 1.22

Gegeven de vergelijking $x^2 - 5x + 6 = 0$.
Dit kan herschreven worden tot: $(x - 2)(x - 3) = 0$.
Splits de vergelijking: $x - 2 = 0 \vee x - 3 = 0$.
Los de twee vergelijkingen verder op: $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ en $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.
De oplossingen zijn dus: $x = 2$ en $x = 3$.

CC BY NC ND

Het probleem bij deze oplossingsmethode zit in de tweede stap. Als het resultaat bekend is, kunnen we dit eenvoudig controleren met de distributieve eigenschap:

$$\begin{aligned}(x-2)(x-3) &= x(x-3)+(-2)(x-3) = x\cdot x + x\cdot(-3)+(-2)\cdot x+(-2)\cdot(-3)\\ &= x^2-5x+6\end{aligned}$$

Maar hoe vinden we de factoren $x - 2$ en $x - 3$ als deze niet gegeven zijn? Om deze vraag te beantwoorden kijken we naar het verband tussen de getallen –2 en –3 enerzijds en de getallen –5 en 6 anderzijds. In de uitwerking hierboven zien we hoe de termen $-5x$ en 6 tot stand komen als we uitgaan van het product $(x - 2)(x - 3)$:

$(-2)\cdot x + x\cdot(-3) = (-2)\cdot x + (-3)\cdot x = \big((-2)+(-3)\big)x = -5x$

$(-2)\cdot(-3) = 6$.

–5 is dus de *som* van de getallen –2 en –3, 6 is het *product* van de getallen –2 en –3.

Dit idee gebruiken we ook bij het oplossen van andere vergelijkingen van de vorm $x^2 + bx + c = 0$.

We zoeken dan eerst twee getallen waarvan de som gelijk is aan b en het product aan c.

Daarna kunnen we $x^2 + bx + c$ schrijven als een product van twee factoren en vervolgens kunnen we de vergelijking oplossen zoals in voorbeeld 1.22.

VOORBEELD 1.23

Gegeven de vergelijking $x^2 + 6x + 8 = 0$.

Zoek eerst twee getallen waarvan het product gelijk is aan 8 en waarvan de som gelijk is aan 6.

Als u deze getallen niet onmiddellijk ziet, dan begint de zoektocht door te kijken naar de getallen waarvan het product 8 is: $1\times 8 = 8$, $2\times 4 = 8$.

Voor deze getallen geldt: $1 + 8 = 9$ en $2 + 4 = 6$, dus de gezochte getallen zijn 2 en 4.

Blijkbaar geldt dus: $x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$.

Dit kunnen we weer controleren door de haakjes weg te werken:

$(x+2)(x+4) = x(x+4)+2(x+4) = x\cdot x + x\cdot 4 + 2\cdot x + 2\cdot 4 = x^2 + 6x + 8$

De vergelijking kan dus geschreven worden als $(x+2)(x+4) = 0$.

Splits nu de vergelijking: $x + 2 = 0 \vee x + 4 = 0$.

Los de twee vergelijkingen verder op: $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$;

$x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

De oplossingen zijn dus: $x = -2$ en $x = -4$.

In het vervolg zullen we de controle bij de tweede stap niet vaak meer uitvoeren. Als we willen nagaan of we de vergelijking goed opgelost hebben, is het eenvoudiger om de oplossingen te controleren door deze in te vullen in de oorspronkelijke vergelijking.

Voor de vergelijking uit voorbeeld 1.23 zien we:

$x^2 + 6x + 8$ met $x = -2$ geeft $(-2)^2 + 6\cdot(-2) + 8 = 4 - 12 + 8 = 0$

$x^2 + 6x + 8$ met $x = -4$ geeft $(-4)^2 + 6\cdot(-4) + 8 = 16 - 24 + 8 = 0$.

Opmerking

Het is een goede gewoonte om na het oplossen van een vergelijking de gevonden oplossingen te controleren door deze in te vullen in de oorspronkelijke vergelijking. We zullen dat vanaf nu niet meer expliciet vragen, maar raden u aan om dit vrijwel altijd wel te doen.

VOORBEELD 1.24

Gegeven de vergelijking $90+35x=5x^2$.
Herleiden op 0 en herschikken van de termen geeft: $-5x^2+35x+90=0$.
Alle termen delen door -5 geeft: $x^2-7x-18=0$.
We zoeken nu twee getallen waarvan het product gelijk is aan –18 en de som gelijk is aan –7. Als u deze getallen niet direct ziet, kunt u ze vinden in het volgende lijstje:

$-18=-1\times 18$, $-1+18=17$
$-18=-2\times 9$, $-2+9=7$
$-18=-3\times 6$, $-3+6=3$
$-18=-6\times 3$, $-6+3=-3$
$-18=-9\times 2$, $-9+2=-7$ *BINGO!*
$-18=-18\times 1$, $-18+1=-17$.

We schrijven dus alle paren gehele getallen waarvan het product gelijk is aan –18 systematisch op en kijken of hun som gelijk is aan –7.
Nu kunnen we de vergelijking schrijven als $(x+2)(x-9)=0$.
Splits nu de vergelijking: $x+2=0 \vee x-9=0$.
Los de twee vergelijkingen verder op: $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$;
$x-9=0 \Leftrightarrow x=9$.
De oplossingen zijn dus: $x=-2$ en $x=9$.
Controle:
$90+35x$ met $x=-2$ geeft $90+35\cdot(-2)=90-70=20$.
$5x^2$ met $x=-2$ geeft $5\cdot(-2)^2=5\cdot 4$ en dit is ook gelijk aan 20.
$90+35x$ met $x=9$ geeft $90+35\cdot 9=90+315=405$.
$5x^2$ met $x=9$ geeft $5\cdot 9^2=5\cdot 81$ en dit is ook gelijk aan 405.

VOORBEELD 1.25

Gegeven de vergelijking $2x^2-9x=5x-24$.
Herleiden op 0 geeft: $2x^2-14x+24=0$.
Alle termen delen door 2 geeft: $x^2-7x+12=0$.
We zoeken nu twee getallen waarvan het product gelijk is aan 12 en de som gelijk is aan –7.
Omdat de som negatief moet zijn, bekijken we nu de paren van negatieve gehele getallen waarvan het product gelijk is aan 12:

$12=-1\times -12$, $-1+(-12)=-13$
$12=-2\times -6$, $-2+(-6)=-8$
$12=-3\times -4$, $-3+(-4)=-7$. *BINGO!*

Nu kunnen we de vergelijking schrijven als $(x-3)(x-4)=0$.
Splits nu de vergelijking: $x-3=0 \vee x-4=0$.
Los de twee vergelijkingen verder op: $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$;
$x-4=0 \Leftrightarrow x=4$.
De oplossingen zijn dus: $x=3$ en $x=4$.
Controle:
$2x^2-9x$ met $x=3$ geeft $2\cdot 3^2-9\cdot 3=18-27=-9$.
$5x-24$ met $x=3$ geeft $5\cdot 3-24=15-24$ en dit is ook gelijk aan –9.
$2x^2-9x$ met $x=4$ geeft $2\cdot 4^2-9\cdot 4=32-36=-4$.
$5x-24$ met $x=4$ geeft $5\cdot 4-24=20-24$ en dit is ook gelijk aan –4.

Som en product-methode

Ontbinden in factoren

De techniek waarmee de tweedegraads vergelijkingen in voorbeelden 1.22 t/m 1.25 herschreven zijn, wordt de *som en product-methode* voor het *ontbinden in factoren* genoemd. Voorwaarde voor het toepassen van deze techniek is dat de vergelijking geschreven kan worden in de vorm $x^2+bx+c=0$, waarbij b en c gehele getallen zijn.

cc BY NC ND

OPGAVE 1.45
Los de volgende vergelijkingen op.
a $x^2+7x+12=0$ c $5x^2+3x+13=2x^2+21x-11$
b $x^2+4x=12$ d $3(x-5)=x^2-25$. (*Werk eerst de haakjes weg*!)

Kwadraatafsplitsen

Niet alle vergelijkingen van de vorm $ax^2+bx+c=0$ kunnen worden opgelost met één van de hiervoor besproken methoden. Om de eerste of de tweede methode te gebruiken moet b of c gelijk zijn aan 0. Om de som en product-methode te kunnen gebruiken moeten we er eerst voor zorgen dat $a=1$, zodat we een vergelijking van de vorm $x^2+bx+c=0$ krijgen, maar in deze vorm moeten b en c dan ook nog eens gehele getallen zijn. En zelfs als een vergelijking deze vorm heeft kan het nog gebeuren dat het niet lukt om deze te ontbinden in factoren. Daarom hieronder twee voorbeelden van tweedegraads vergelijkingen die niet met één van de tot nu toe besproken methoden kunnen worden opgelost, maar die we wel op een andere manier kunnen oplossen.

VOORBEELD 1.26
Zie opgave 1.26b.

Gegeven de vergelijking $(x-3)^2=7$
Haakjes wegwerken geeft: $x^2-6x+9=7$
Links en rechts 7 aftrekken geeft: $x^2-6x+2=0$.
We zien dat $b\neq 0$ en $c\neq 0$. Verder is er geen tweetal gehele getallen met product 2 en som –6.
We kunnen dus geen van de besproken methoden toepassen. Toch is het bij een heel andere aanpak vrij eenvoudig om de oplossingen te vinden.
Begin weer met de vergelijking $(x-3)^2=7$.
Als het kwadraat van een getal gelijk is aan 7, dan moet dat getal zelf gelijk zijn aan $\sqrt{7}$ of aan $-\sqrt{7}$. Er moet dus gelden: $x-3=\sqrt{7}$ of $x-3=-\sqrt{7}$.
Zo krijgen we twee eerstegraads vergelijkingen, die we op de bekende manier kunnen oplossen.
Dit geeft: $x-3=\sqrt{7}\Leftrightarrow x=3+\sqrt{7}$ of $x-3=-\sqrt{7}\Leftrightarrow x=3-\sqrt{7}$.

VOORBEELD 1.27

De vergelijking $x^2+8x-6=0$ kunnen we ook niet met de hiervoor besproken methoden oplossen. Er geldt immers $b\neq 0$ en $c\neq 0$ en er is ook geen tweetal gehele getallen met product –6 en som 8. Om deze vergelijking op te kunnen lossen, gaan we deze eerst in de vorm $(x+p)^2=d$ schrijven.
Gegeven de vergelijking $x^2+8x-6=0$
Links en rechts 6 optellen geeft: $x^2+8x=6$
Links en rechts 16 optellen geeft: $x^2+8x+16=22$
En dit kunnen we schrijven als: $(x+4)^2=22$.

OPGAVE 1.46
a Controleer de laatste stap van voorbeeld 1.27 door de haakjes weg te werken in $(x+4)^2$.
b Los de vergelijking $(x+4)^2=22$ op met de methode van voorbeeld 1.26.

Kwadraatafsplitsen

De cruciale stap in de uitwerking van voorbeeld 1.27 is het links en rechts optellen van 16.
Dit getal komt tot stand door eerst de helft te nemen van 8 (de waarde van b in de oorspronkelijke vergelijking) en deze vervolgens te kwadrateren. Op die manier wordt het linkerdeel van de vergelijking uitgebreid van x^2+8x tot $x^2+8x+16$ en dit is dan weer gelijk aan het kwadraat $(x+4)^2$. Deze techniek wordt *kwadraatafsplitsen* genoemd, hoewel de benaming *aanvullen tot een kwadraat* beter aangeeft wat we hier doen.

abc-formule

Alle tweedegraads vergelijkingen kunnen worden opgelost met kwadraatafsplitsen. Daarom kunnen we met deze methode ook een algemene formule afleiden voor het oplossen van tweedegraads vergelijkingen, de *abc-formule*. Met deze formule hoeven we het proces van voorbeelden 1.26 en 1.27 niet iedere keer te herhalen.

abc-formule

De afleiding van de *abc*-formule gebeurt in twee fasen.
Eerst werken we de vergelijking $ax^2+bx+c=0$ om tot de vergelijking $\left(2ax+b\right)^2=b^2-4ac$. Vervolgens lossen we deze laatste vergelijking op op de manier van voorbeeld 1.26.
Voor het werken met de *abc*-formule zijn de details van de eerste fase van minder belang. Wie niet geïnteresseerd is in deze details kan fase 1 overslaan en direct doorgaan naar fase 2.

Fase 1

Gegeven de vergelijking $ax^2+bx+c=0$
Links en rechts *c* aftrekken geeft: $ax^2+bx=-c$.
In voorbeeld 1.27 was de eerste term een kwadraat en moesten we het getal in de tweede term delen door 2. Om beide mogelijk te maken zonder de waarden van a en b te kennen, vermenigvuldigen we nu alle termen van de vergelijking met 4a.
Dit geeft: $4a^2x^2+4abx=-4ac$
Dit kunnen we ook schrijven als: $\left(2ax\right)^2+2b\cdot 2ax=-4ac$
Links en rechts b^2 optellen geeft dan: $\left(2ax\right)^2+2b\cdot 2ax+b^2=b^2-4ac$
Nu staat er links een uitdrukking van de vorm $A^2+2AB+B^2$ *met* $A=2ax$ *en* $B=b$. *Dit kunnen we ook schrijven als* $\left(A+B\right)^2=\left(2ax+b\right)^2$.
De vergelijking wordt dan: $\left(2ax+b\right)^2=b^2-4ac$.

Fase 2

Discriminant
$D=b^2-4ac$

Het vervolg van de berekening hangt af van het teken van b^2-4ac. Deze uitdrukking wordt daarom de *discriminant* van de vergelijking genoemd en aangeduid met de letter *D*.
Er geldt dus $D=b^2-4ac$.
$D<0$ betekent dat de uitkomst van het kwadraat $\left(2ax+b\right)^2$ negatief is. Aangezien dit niet mogelijk is, heeft de vergelijking geen oplossingen.
Als $D=0$ gaat de vergelijking over in $\left(2ax+b\right)^2=0$.
Dit geeft $2ax+b=0\Leftrightarrow 2ax=-b\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}$.
Als $D>0$ moet $2ax+b$ gelijk zijn aan de wortel uit *D* of aan het tegengestelde daarvan.
De vergelijking gaat dan over in de eerstegraads vergelijkingen $2ax+b=\sqrt{D}$ en $2ax+b=-\sqrt{D}$.
Los nu verder op: $2ax+b=\sqrt{D}\Leftrightarrow 2ax=-b+\sqrt{D}\Leftrightarrow x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ en
$2ax+b=-\sqrt{D}\Leftrightarrow 2ax=-b-\sqrt{D}\Leftrightarrow x=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

De *abc*-formule is eigenlijk niet een formule, maar een recept waarmee we de oplossingen van de vergelijking $ax^2+bx+c=0$ (als die er zijn) in twee stappen kunnen vinden.
Stap 1: Bereken eerst de discriminant $D=b^2-4ac$.
Stap 2: Als $D<0$ heeft de vergelijking geen oplossingen.
Als $D=0$ is er één oplossing, $x=-\frac{b}{2a}$.
Als $D>0$ zijn er twee oplossingen, $x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ en $x=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.

Hieronder een aantal voorbeelden van het gebruik van de *abc*-formule bij het oplossen van tweedegraads vergelijkingen.

cc BY NC ND

VOORBEELD 1.28 Gegeven de vergelijking $3x^2 + 3 = 10x$
Schrijf eerst in de standaard vorm: $3x^2 - 10x + 3 = 0$
In deze vergelijking geldt: $a = 3$, $b = -10$ en $c = 3$
De discriminant is: $D = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 100 - 36 = 64$
Er zijn dus twee oplossingen: $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{10 + 8}{2 \cdot 3} = \frac{18}{6} = 3$
en $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{10 - 8}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

VOORBEELD 1.29 Gegeven de vergelijking $7x^2 + x = 10$
Schrijf eerst in de standaard vorm: $7x^2 + x - 10 = 0$
In deze vergelijking geldt: $a = 7$, $b = 1$ en $c = -10$
De discriminant is: $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 7 \cdot -10 = 1 + 280 = 281$
Er zijn dus twee oplossingen: $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{281}}{2 \cdot 7} = \frac{-1 + \sqrt{281}}{14}$
en $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{281}}{2 \cdot 7} = \frac{-1 - \sqrt{281}}{14}$.

VOORBEELD 1.30 Gegeven de vergelijking $10x^2 + 10 = 3x^2 + 3x$
Schrijf eerst in de standaard vorm: $7x^2 - 3x + 10 = 0$
In deze vergelijking geldt: $a = 7$, $b = -3$ en $c = 10$
De discriminant is: $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 10 = 9 - 280 = -271$.
Aangezien $D < 0$ heeft deze vergelijking geen oplossingen.

VOORBEELD 1.31 Gegeven de vergelijking $4x^2 + 12x + 9 = 0$
In deze vergelijking geldt: $a = 4$, $b = 12$ en $c = 9$
De discriminant is: $D = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$
Er is dus één oplossing: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \cdot 4} = -\frac{12}{8} = -1\frac{1}{2}$.

VOORBEELD 1.32 In voorbeeld 1.26 hebben we de vergelijking $(x-3)^2 = 7$ onder de loep genomen. Als inleiding op het kwadraatafsplitsen hebben we de vergelijking opgelost door deze om te zetten in de eerstegraads vergelijkingen $x - 3 = \sqrt{7}$ en $x - 3 = -\sqrt{7}$, met als oplossingen $x = 3 + \sqrt{7}$ en $x = 3 - \sqrt{7}$.
We hebben ook gezien dat de vergelijking herschreven kan worden tot $x^2 - 6x + 2 = 0$. In deze vorm kunnen we vergelijking ook oplossen met de *abc*-formule.
$a = 1$, $b = -6$ en $c = 2$ geeft $D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 36 - 8 = 28$.
Er zijn dus twee oplossingen: $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 + \sqrt{28}}{2}$ en
$x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 - \sqrt{28}}{2}$.
Om te zien dat deze oplossingen gelijk zijn aan de eerder gevonden oplossingen, moeten we de kwadraten uit de wortel halen.
$\sqrt{28} = \sqrt{4 \cdot 7} = 2\sqrt{7}$, dus geldt inderdaad:
$\frac{6 + \sqrt{28}}{2} = \frac{6 + 2\sqrt{7}}{2} = 3 + \sqrt{7}$ en $\frac{6 - \sqrt{28}}{2} = \frac{6 - 2\sqrt{7}}{2} = 3 - \sqrt{7}$

Opmerking De omzetting uit voorbeeld 1.32 passen we alleen toe als het nodig is, zoals hier om de verschillende formules voor de oplossingen te vergelijken. Als *D* geen 'mooi' kwadraat is, laten we de uitkomst van de *abc*-formule meestal staan in de vorm $x = \frac{6 + \sqrt{28}}{2}$ of $x = \frac{6 - \sqrt{28}}{2}$.

Indien gewenst kunnen we de uitkomst nog benaderen met de rekenmachine. Dan maakt het helemaal niet uit in welke vorm de oplossing genoteerd is. Zowel $\frac{6+\sqrt{28}}{2}$ als $3+\sqrt{7}$ is afgerond op 4 cijfers achter de komma gelijk aan 5,6458.
Als het resultaat van de *abc*-formule een wortelvorm is, laten we de controle door het invullen van de oplossingen in de oorspronkelijke vergelijking overigens vaak achterwege. Dit levert namelijk meestal veel en vooral lastig rekenwerk op.

OPGAVE 1.47
Geef een benadering in vier cijfers achter de komma van $\frac{6-\sqrt{28}}{2}$ en benader ter controle ook $3-\sqrt{7}$ met uw rekenmachine.

OPGAVE 1.48
Los de volgende vergelijkingen op met de *abc*-formule.

a $x^2+9x+12=0$
b $x^2+12=x$
c $x^2+4x=4$
d $x^2=4x-4$
e $3x^2+2x+6=5\frac{1}{2}x+5$
f $(x+2)(x+3)=4x$ (*Werk eerst de haakjes weg*!)

Hoewel de *abc*-formule voor alle tweedegraads vergelijkingen gebruikt kan worden, is het goed om altijd eerst te kijken of de vergelijking niet met één van de eerder besproken methoden kan worden opgelost. Dit bespaart zoals gezegd meestal veel rekenwerk en geeft dus minder kans op fouten.

OPGAVE 1.49
Los de volgende vergelijkingen op. Kies zelf de snelste oplossingsmethode.

a $x^2+28=11x$
b $x^2+28=10x$
c $3x^2-4x=2x-3$
d $3x^2-4x=x+2$
e $4x^2+1=5x$
f $4x^2+5=x$
g $(2x+3)^2=9$
h $-(2x+3)^2=12x$

12 Andere types vergelijkingen

Gebroken vergelijking

De vergelijking $\frac{10}{x-3}=x$ is een voorbeeld van een *gebroken vergelijking*, dat is een vergelijking met breuken waarin de variabele x in de noemer van één (of meer) van de termen voorkomt.
De eerste stap bij het oplossen van zo'n vergelijking is het wegwerken van de noemer(s) door alle termen van de vergelijking met deze noemer(s) te vermenigvuldigen. Zo ontstaat een vergelijking die met één van de eerder besproken methoden opgelost kan worden:
$\frac{10}{x-3}=x$ geeft
$10=x(x-3) \Leftrightarrow 10=x^2-3x \Leftrightarrow x^2-3x=10 \Leftrightarrow x^2-3x-10=0$.
Deze vergelijking kunnen we oplossen met de som en productmethode voor ontbinden in factoren:
$x^2-3x-10=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-5)=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=5$.

OPGAVE 1.50
Gegeven de vergelijking $\frac{x^2}{x+3}=1+\frac{9}{x+3}$.

a Los deze vergelijking op op de manier van bovenstaand voorbeeld.

b Controleer uw oplossingen door deze in te vullen in de oorspronkelijke vergelijking. Wat valt u op? Kunt u dit verklaren?

cc BY NC ND

In opgave 1.50 hebt u bij de eerste stap alle termen van de vergelijking vermenigvuldigd met $x+3$. Dit leidt tot een probleem als $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$. Daarom moeten we deze oplossing uitsluiten.

Wortelvergelijking

De vergelijking $x-\sqrt{x-4}=6$ is een voorbeeld van een *wortelvergelijking*. Dit type vergelijkingen lossen we op door eerst de wortel aan één kant van het =-teken te schrijven, en alle andere termen aan de andere kant. Vervolgens worden beide zijden van de vergelijking gekwadrateerd:

$$x-\sqrt{x-4}=6 \Leftrightarrow -\sqrt{x-4}=-x+6 \Leftrightarrow \sqrt{x-4}=x-6\,.$$

Links en rechts kwadrateren geeft:

$$x-4=\left(x-6\right)^2 \Leftrightarrow x-4=x^2-12x+36 \Leftrightarrow x^2-13x+40=0\,.$$

OPGAVE 1.51

a Los de vergelijking $x^2-13x+40=0$ op.
b Ga na of de oplossingen die u bij vraag a gevonden hebt, ook oplossingen zijn van de vergelijking $x-\sqrt{x-4}=6$. Wat valt u op? Kunt u dit verklaren?

In opgave 1.51 hebt u als het goed is gezien dat de vergelijking $x^2-13x+40=0$ meer oplossingen heeft dan de vergelijking $x-\sqrt{x-4}=6$. Bij het kwadrateren verdwijnen mintekens en daardoor heeft de gekwadrateerde vorm een extra oplossing.

Zowel bij gebroken vergelijkingen als bij wortelvergelijkingen kunnen dergelijke 'valse' oplossingen opgespoord worden door de oplossingen in te vullen in de oorspronkelijke vergelijking. Het is al eerder aanbevolen om deze controle zo veel mogelijk uit te voeren bij andere eerste- en tweedegraads vergelijkingen; bij gebroken vergelijkingen en bij wortelvergelijkingen is deze controle *altijd* noodzakelijk.

OPGAVE 1.52

Los op:

a $\dfrac{7x}{x-3}=x$ b $2x+\sqrt{x+2}=2$

Samenvatting

Getallenverzamelingen

$\mathbb{N}$: natuurlijke getallen, 0, 1, 2, 3, 4, etc.
$\mathbb{Z}$: gehele getallen, natuurlijke getallen + negatieve gehele getallen
$\mathbb{Q}$: breuken, ofwel alle getallen die geschreven kunnen worden in de vorm $\dfrac{teller}{noemer}$ waarbij de teller ieder geheel getal kan zijn en de noemer ieder geheel getal behalve 0 kan zijn.
Alle gehele getallen zijn ook rationale getallen.
$\mathbb{R}$: reële getallen, rationale getallen + irrationale getallen.
Irrationale getallen zijn getallen die niet als breuk geschreven kunnen worden, zoals $\sqrt{2}$ en π.
De verzameling van alle reële getallen x waarvoor geldt $3<x\leq 4$ wordt een *interval* genoemd en wordt ook genoteerd als $\left\langle 3,4\right]$.
De verzameling van alle positieve reële getallen wordt in de intervalnotatie genoteerd als $\left\langle 0,\rightarrow\right\rangle$.

Tegengestelde en omgekeerde

Het tegengestelde van 4 is –4, het tegengestelde van –7 is 7.
Het tegengestelde van een getal a wordt genoteerd als $-a$.
Als $a = -10$, dan is $-a$ het positieve getal 10.

Het omgekeerde van $\frac{3}{4}$ is $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.
Het omgekeerde van $-2\frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$ is $-\frac{2}{5}$.
Het omgekeerde van $2 = \frac{2}{1}$ is $\frac{1}{2}$.

Rekenen met negatieve getallen

Optellen van een getal heeft dezelfde uitkomst als aftrekken van het tegengestelde: $3 + (-4) = 3 - 4$.
Aftrekken van een getal heeft dezelfde uitkomst als optellen van het tegengestelde: $3 - (-4) = 3 + 4$.
Een product met een oneven aantal negatieve factoren is negatief:
$3 \cdot (-4) = -12$.
Een product met een even aantal negatieve factoren is positief:
$(-3) \cdot (-4) = 12$.

Rekenen met breuken

Een breuk verandert niet van waarde als we teller en noemer vermenigvuldigen met of delen door hetzelfde getal: $\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100}$. Deze laatste breuk wordt ook geschreven als 0,25.

Let op: $\frac{1}{3} = \frac{100}{300}$, $0,33 = \frac{33}{100} = \frac{99}{300}$. $\frac{1}{3}$ is dus niet gelijk aan 0,33.

Breuken met gelijke noemers tellen we op (trekken we af) door de tellers op te tellen (af te trekken).
Breuken met ongelijke noemers maken we eerst gelijknamig:
$\frac{1}{4} - \frac{1}{7} = \frac{7}{28} - \frac{4}{28} = \frac{7-4}{28} = \frac{3}{28}$.

Breuken vermenigvuldigen we met elkaar door de tellers en de noemers met elkaar te vermenigvuldigen: $1\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{30}{15} = 2$;
$3 \cdot \frac{5}{6} = \frac{3}{1} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$.

Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde:
$6 : \frac{3}{4} = 6 \cdot \frac{4}{3} = \frac{24}{3} = 8$.

Machten en wortels

$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ is de vierde macht van 2.
Let op: $-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$; de vierde macht van –2 noteren we als $(-2)^4$.
$a^1 = a$; $a^0 = 1$; $a^{-1} = \frac{1}{a}$ is het omgekeerde van a.
$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ is de n-de macht van het omgekeerde van a.
$\sqrt{4}$ is het positieve getal waarvan het kwadraat gelijk is aan 4.
Let op: $\sqrt{-4}$ bestaat niet; $\sqrt[3]{-8}$ bestaat wel, want $(-2)^3 = -8$.

Eigenschappen van bewerkingen

Commutatieve eigenschap van de optelling: $a + b = b + a$.
Commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging: $ab = ba$.
Associatieve eigenschap van de optelling: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
Associatieve eigenschap van de vermenigvuldiging: $(ab)c = a(bc)$.

Let op: deze eigenschappen gelden niet voor de aftrekking en de deling.

Distributieve eigenschappen: $(a + b)p = ap + bp$,
$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.
Samennemen van gelijksoortige termen: $3a + 4a = (3 + 4)a = 7a$.

BY NC ND

Let op met bewerkingen als $a-(a-1)(a-2)$:
$(a-1)(a-2)=a\cdot a-2\cdot a-1\cdot a+1\cdot 2=a^2-3a+2$.
Deze termen moeten alle worden afgetrokken van *a*.
Goed is: $a-(a-1)(a-2)=a-(a^2-3a+2)=a-a^2+3a-2=-a^2+4a-2$.
Fout is: $a-(a-1)(a-2)=a-a^2-3a+2=-a^2-2a+2$.

Eigenschappen van machten:
$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$; $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$; $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$; $(ab)^n=a^n\cdot b^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.
Let op: $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b=a^2+2ab+b^2$.

Eigenschappen van wortels: $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
Let op: $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$; $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$.

Volgorde van bewerkingen

De volgorde in bewerkingen zonder haakjes is eerst machtsverheffen, dan vermenigvuldigen en delen en tenslotte optellen en aftrekken. De voorgeschreven volgorde van bewerkingen kan worden aangepast door haakjes te plaatsen. Bewerkingen tussen haakjes moeten we eerst uitvoeren. De vlag van een wortel en de deelstreep van een breuk werken ook als haakjes.

Vergelijkingen

De toegestane stappen bij het oplossen van een vergelijking zijn *links en rechts dezelfde term optellen of aftrekken* en *links en rechts vermenigvuldigen met of delen door hetzelfde getal*.

Eerstegraads vergelijkingen als $3x+4=5x+6$ worden opgelost door deze stappen gericht toe te passen:
$3x+4=5x+6\Leftrightarrow 3x=5x+2\Leftrightarrow -2x=2\Leftrightarrow x=-1$.

De standaardvorm van een *tweedegraads vergelijking* is $ax^2+bx+c=0$.
Als een tweedegraads vergelijking niet in de standaardvorm staat, moeten we deze in de meeste gevallen eerst omwerken tot deze vorm door het toepassen van de toegestane stappen.

Tweedegraads vergelijkingen van de vorm $ax^2+c=0$ kunnen worden opgelost door deze te schrijven als $ax^2=-c\Leftrightarrow x^2=-\frac{c}{a}$. Als $-\frac{c}{a}>0$ volgt dan $x=\sqrt{-\frac{c}{a}}$ of $x=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$.
Tweedegraads vergelijkingen van de vorm $ax^2+bx=0$ worden opgelost door een factor *x* buiten haakjes te halen en deze vervolgens te splitsen in twee eerstegraads vergelijkingen:
$ax^2+bx=0\Leftrightarrow x\cdot(ax+b)=0\Leftrightarrow x=0\vee ax+b=0\Leftrightarrow x=0\vee x=-\frac{b}{a}$.

Tweedegraads vergelijkingen van de vorm $x^2+bx+c=0$ kunnen vaak omgezet worden in $(x+p)(x+q)=0$ met $p+q=b$ en $pq=c$. De oplossingen zijn dan $x=-p$ en $x=-q$.

Als een tweedegraads vergelijking $ax^2+bx+c=0$ niet met één van bovenstaande technieken kan worden opgelost, gebruiken we de *abc*-formule.
Daartoe berekenen we eerst de discriminant $D=b^2-4ac$.
Als $D<0$ heeft de vergelijking geen oplossingen.
Als $D=0$ heeft de vergelijking één oplossing: $x=-\frac{b}{2a}$.

Als $D > 0$ heeft de vergelijking twee oplossingen: $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ en $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

De eerste stap bij het oplossen van een *gebroken vergelijking* is het wegwerken van de variabele in de noemer door alle termen van de vergelijking te vermenigvuldigen met deze noemer. *Wortelvergelijkingen* worden opgelost door de wortel te isoleren en te kwadrateren. Bij beide soorten vergelijkingen is het noodzakelijk om te controleren of de gevonden oplossingen ook oplossing zijn van de oorspronkelijke vergelijking.

ZELFTOETS

1 Geef van de volgende getallen aan of ze behoren tot $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en/of $\mathbb{R}$:
-3, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, 391, 0,17, $\sqrt[3]{10}$, $\frac{1}{2}\pi$

2 Bereken
a $2 + 9 - 6 =$
b $4 - (12 - 8) =$
c $5^2 - 4^2 =$
d $2^3 : 2^2 =$
e $\sqrt{(-7)^2} =$
f $-3 \cdot -7 =$
g $(-2)^5 =$
h $-4 - (-2) =$
i $\left(\frac{2}{3}\right)^4 =$

3 Wat zijn de tegengestelde en het omgekeerde van $\frac{1}{3}$?

4 Bereken
a $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} =$
b $\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{6} =$
c $\frac{2}{7} \cdot \frac{-3}{4} =$
d $\frac{11}{15} : \frac{22}{5} =$
e $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} =$
f $\sqrt{1600} =$

5 Benader $\sqrt{7}$ tot op twee decimalen nauwkeurig.

6 Geef het interval van de verzameling reële getallen x waarvoor geldt
a $2 \le x \le 10$
b $-3 < x < -1$
c $x \ge 2$
d $x < 2$

7 Werk de haakjes weg en vereenvoudig:
a $3(x - 4) + 2x =$
b $(x - 5)(x + 1) + x(x - 3) =$
c $(x - y)(x + y) =$
d $(x - y)^3 =$

8 Los de volgende vergelijkingen op
a $2x + 4 = \frac{1}{2}x - 3$
b $2x^2 = 18$
c $x^2 - 7x + 10 = 0$
d $2x^2 + 6x + 2 = 0$
e $\dfrac{-1}{x+2} - x = 0$
f $x - \sqrt{2x - 1} = 0$

cc BY NC ND

Functies en grafieken

Introductie *67*

Leerkern *67*

1 Wat is een functie? *67*
2 De grafiek van een functie *69*
3 Domein en bereik *75*
4 Een milieuwetenschappelijke toepassing *78*

Samenvatting *83*

Zelftoets *85*



CC BY NC ND

Leereenheid 2

Functies en grafieken

INTRODUCTIE

In deze leereenheid ziet u aan de hand van een aantal voorbeelden wat in de wiskunde onder een *functie* wordt verstaan. Tevens maakt u kennis met de *grafiek* van een functie en de bijbehorende begrippen *invoer*, *uitvoer*, *domein* en *bereik*. In enkele toepassingen ziet u ook hoe er in de milieuwetenschappen met *eenheden* wordt gewerkt.

LEERDOELEN

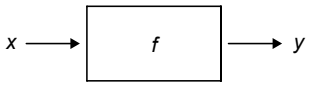
Na bestudering van deze leereenheid

- weet u wat er onder het wiskundige begrip *functie* wordt verstaan
- weet u hoe u een *grafiek* van een functie maakt op basis van een tabel
- kent u de begrippen *domein* en *bereik* van een functie
- weet u hoe u moet omgaan met *eenheden* bij het werken met formules en grafieken.

LEERKERN

1 Wat is een functie?

Een *functie* is een mechanisme dat bij een bepaalde invoer een bepaalde uitvoer oplevert.
In een plaatje ziet dat er zo uit:



FIGUUR 2.1 Schematische voorstelling van een functie

Stellen we, zoals in figuur 2.1, de invoer voor door x en de uitvoer door y, dan wordt de functie wel als volgt genoteerd: $x \to y$. De letters x en y zijn in de wiskunde gebruikelijk, als het gaat om grootheden uit de natuurwetenschappen worden er meestal andere letters gebruikt. In de klassieke mechanica bestuderen we bijvoorbeeld de afgelegde afstand van een bepaald voorwerp (s) als functie van de tijd (t). Dan krijgen we een functie $t \to s$.
In de wiskunde krijgt de functie zelf ook een naam. Meestal, zoals in figuur 2.1, is dit kortweg f, maar ook hier worden andere symbolen gebruikt, zoals g of h.

Vaak kan het verband tussen invoer en uitvoer uitgedrukt worden met behulp van een formule. Zo hoort bij de functie die als uitvoer het dubbele van de invoer oplevert de formule $y = 2x$ en hoort bij de functie die als uitvoer het kwadraat van de invoer oplevert de formule $y = x^2$.

cc BY NC ND

Is zo'n formule gegeven, dan worden functies in het algemeen als volgt genoteerd:

$f : x \to 2x$ of korter $f(x) = 2x$ voor de functie met de formule $y = 2x$
en
$g : x \to x^2$ of korter $g(x) = x^2$ voor de functie met de formule $y = x^2$

Functievoorschrift

$f(x) = 2x$ en $g(x) = x^2$ zijn het *functievoorschrift* van de functies *f* en *g*.

BOX 2.1
Toepassing: Valbeweging

Het concept van een functie wordt hier geïllustreerd aan de hand van het bekende voorbeeld van een vallend voorwerp. Ondermeer het werk van de beroemde wetenschapper Galileo Galilei (1564-1642) heeft aangetoond dat deze versnelde beweging onafhankelijk is van de massa van het voorwerp. Er wordt beweerd dat Galilei voorwerpen van de toren van Pisa naar beneden liet vallen om de valeigenschappen te bestuderen. Het is onwaarschijnlijk dat hij dit experiment daadwerkelijk heeft uitgevoerd. Zeker is dat Galilei bronzen kogels langs een hellende goot naar beneden liet rollen, en op deze manier hun versnelling bestudeerde. Galilei was de eerste die deze versnelde beweging ook wiskundig beschreef en met experimenten motiveerde dat de valhoogte evenredig was met het kwadraat van de tijd. De hier gepresenteerde voorbeelden en opgaven behandelen de huidige wiskundige beschrijving waarbij we – omwille van de mythe – uitgaan van het voorbeeld van een vallende steen van de toren van Pisa.

Bron: Canon van de Natuurkunde (de Lang & Icke, 2009)

VOORBEELD 2.1
Toepassing: Valbeweging

In navolging van Galilei laten we een steen van een toren van 45 meter hoogte vallen.
De hoogte *H* van de steen boven de grond is dan een functie van de tijd *t*.
Voor deze functie geldt (bij benadering) de formule $H(t) = 45 - 5t^2$.
(*H* in meters, *t* in seconden, $H = 0$ op het grondvlak van de toren, $t = 0$ op het moment dat de steen wordt losgelaten).
De hoogte van de steen op $t = 1$, dat is 1 seconde na het moment dat hij op 45 meter hoogte is losgelaten, is dan $H(1) = 45 - 5 \cdot 1^2 = 45 - 5 =$ 40 meter.

OPGAVE 2.1

a Bereken de hoogte van de steen uit voorbeeld 2.1 op $t = 2$ en op $t = 2\frac{1}{2}$.
b Wat kunt u zeggen over de hoogte van deze steen op $t = 4$?

VOORBEELD 2.2
Toepassing: Valbeweging

In plaats van de steen los te laten, zodat hij direct naar de grond valt, kunnen we hem ook omhoog schieten. Dan zal de steen eerst omhoog gaan en pas later naar beneden vallen.
Als een steen vanaf een toren van 45 meter hoog met een snelheid van $12\frac{1}{2}$ meter per seconde omhooggeschoten wordt, dan wordt de hoogte van de steen als functie van de tijd gegeven door $H(t) = 45 + 12\frac{1}{2}t - 5t^2$ ($t = 0$ op het moment dat de steen omhoog wordt geschoten).
In dat geval is de hoogte van de steen 1 seconde nadat hij omhoog geschoten is, gelijk aan $H(1) = 45 + 12\frac{1}{2} \cdot 1 - 5 \cdot 1^2 = 45 + 12\frac{1}{2} - 5 =$ $52\frac{1}{2}$ meter.

OPGAVE 2.2

a Bereken de hoogte van de steen uit voorbeeld 2.2 op $t = \frac{1}{2}$ en op $t = 2$.
b Bereken deze hoogte ook voor $t = 1\frac{1}{2}$ en voor $t = 2\frac{1}{2}$.
c Wat valt u op aan de antwoorden op vraag a?
d En wat valt u op aan de antwoorden op vraag b?

In opgave 2.2d hebt u als het goed is gezien dat de steen op de tijdstippen $t = 0$ en $t = 2\frac{1}{2}$ op dezelfde hoogte is. Op beide tijdstippen geldt $H(t) = 45$. Ook hebt u kunnen zien dat de steen zowel op $t = 1$ als op $t = 1\frac{1}{2}$ op $52\frac{1}{2}$ meter hoogte is. Ook voor $t = \frac{1}{2}$ en $t = 2$ heeft de functie $H(t)$ dezelfde uitvoerwaarde. Verschillende invoerwaarden kunnen dus dezelfde uitvoerwaarde opleveren.
Het omgekeerde is bij een functie niet toegestaan. Een functie is een 'recept' waarmee je, als je de invoerwaarde kent, de uitvoerwaarde kunt bepalen. Eén invoerwaarde kan dus niet verschillende uitvoerwaarden opleveren. Aan deze eis is automatisch voldaan als we een functie met een functievoorschrift beschrijven.

2 De grafiek van een functie

Als we het functievoorschrift van een functie kennen, dan kunnen we bij iedere invoerwaarde de bijbehorende uitvoerwaarde uitrekenen. Een probleem hierbij is dat we op deze manier meestal niet de hele functie in beeld kunnen krijgen: bij de meeste functies zijn er zeer veel invoerwaarden mogelijk. Bovendien is het moeilijk om aan de hand van alleen een tabel met invoer- en uitvoerwaarden een goed beeld te krijgen van het verloop van een functie. Daarom wordt er van een functie vaak een 'plaatje' gemaakt, een *grafiek*.

Grafiek

De grafiek van een functie wordt in drie stappen opgebouwd.
We zullen deze stappen nalopen voor de functie $f(x) = 3 - 2x$.

Stap 1: Invoerwaarden en uitvoerwaarden

Allereerst berekenen we van een aantal invoerwaarden de bijbehorende uitvoerwaarde.
Er geldt bijvoorbeeld

$f(0) = 3 - 2 \cdot 0 = 3$,
$f(1) = 3 - 2 \cdot 1 = 1$,
$f(2) = 3 - 2 \cdot 2 = -1$ en
$f(-1) = 3 - 2 \cdot (-1) = 3 + 2 = 5$.

Het resultaat van deze berekeningen wordt vaak genoteerd in een tabel:

x	0	1	2	–1
$f(x)$	3	1	–1	5

Het resultaat kan ook worden geschreven in de vorm van getallenparen:

(0, 3); (1, 1); (2, –1); (–1, 5)

We noteren dus telkens de invoerwaarde als eerste getal en de bijbehorende uitvoerwaarde als tweede getal.

cc BY NC ND

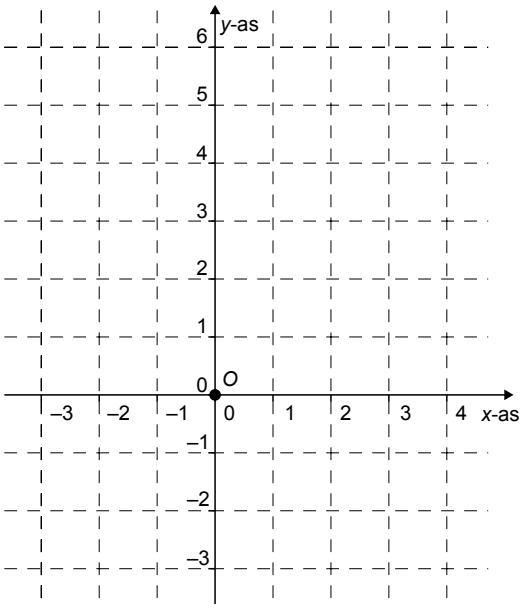
Stap 2: Punten in een assenstelsel

Assenstelsel

Nu we een aantal paren van in- en uitvoerwaarden hebben, gaan we deze intekenen in een *assenstelsel*, dat is een figuur met een horizontale en een verticale getallenlijn, die elkaar loodrecht kruisen.
Voor een functie met invoervariabele x en uitvoervariabele y zetten we de waarden van x uit langs de horizontale as, die dan de x-as genoemd wordt. De waarden van y zetten we uit langs de verticale as, de y-as.

Oorsprong

Het punt waar de assen elkaar snijden noemen we de *oorsprong O*.
In dat punt geldt: $x = 0$ en $y = 0$.
We schrijven hiervoor ook $O(0, 0)$ of $x_O = 0$ en $y_O = 0$.
$x = 0$ en $y = 0$ worden de *coördinaten* van het punt O genoemd.



FIGUUR 2.2 Assenstelsel met oorsprong O

In zo'n assenstelsel geven we het getallenpaar (0, 3) weer door een punt te tekenen op de plaats waar geldt $x = 0$ en $y = 3$. Dit is het punt bij het getal 3 op de y-as.
Om dit punt te onderscheiden van andere punten geven we het een hoofdletter als naam, bijvoorbeeld A. We noteren: $A(0, 3)$ of $x_A = 0$ en $y_A = 3$.

x-coördinaat
y-coördinaat

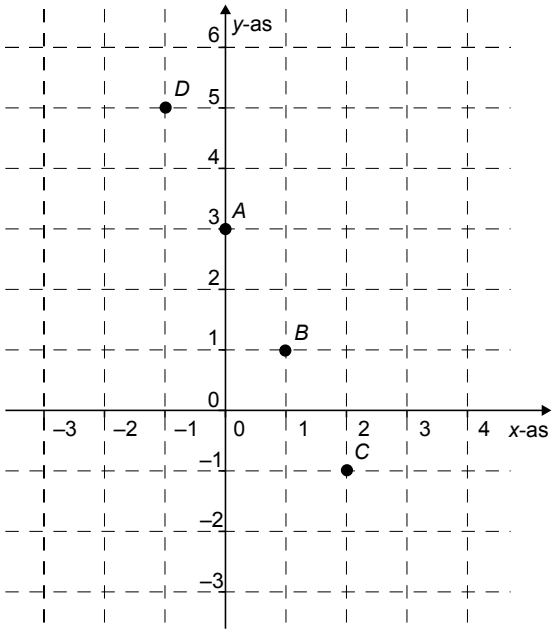
Anders gezegd: de *x-coördinaat* van A is 0 en de *y-coördinaat* van A is 3.

Het getallenpaar (1, 1) geven we weer door een punt te tekenen dat recht boven het getal 1 op de x-as en rechts naast het getal 1 op de y-as ligt.
Als we dit punt B noemen, dan kunnen we schrijven: $B(1, 1)$ of $x_B = 1$ en $y_B = 1$.

Op dezelfde manier wordt het getallenpaar (2, –1) een punt C, dat recht onder het getal 2 op de x-as en rechts naast het getal –1 op de y-as ligt.
We schrijven: $C(2, –1)$ of $x_C = 2$ en $y_C = –1$.

En het getallenpaar (–1, 5) wordt een punt $D(–1, 5)$, dat recht boven het getal –1 op de x-as en links naast het getal 5 op de y-as ligt.

In figuur 2.3 hieronder ziet u een assenstelsel met de punten $A(0, 3)$, $B(1, 1)$, $C(2, -1)$ en $D(-1, 5)$.



FIGUUR 2.3 De punten A, B, C en D in een assenstelsel

OPGAVE 2.3
We bekijken nog steeds de functie $f(x) = 3 - 2x$.
a Bereken $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f\left(-1\frac{1}{2}\right)$ en $f\left(1\frac{1}{4}\right)$.
b Neem figuur 2.3 over op ruitjespapier en teken daarin de punten die bij de invoerwaarden uit vraag a horen.

OPGAVE 2.4
In de figuur van opgave 2.3 kunnen we ook punten tekenen die niets met de functie f te maken hebben, bijvoorbeeld $E(3, 0)$, $F(-1, 2)$ en $G(2, \frac{1}{2})$.
a Teken deze punten.
b Wat valt u op aan de ligging van de punten A, B, C en D enerzijds en de punten E, F en G anderzijds?

Merk op dat het punt $A(0, 3)$ op een andere plaats ligt dan het punt $E(3, 0)$. Ook de punten $(2, -1)$ en $(-1, 2)$ liggen op verschillende plaatsen. Hetzelfde geldt voor de punten $(\frac{1}{2}, 2)$ en $(2, \frac{1}{2})$.
Bij het noteren van de coördinaten van een punt P als een getallenpaar (x_P, y_P) is de volgorde van de twee getallen dus essentieel: eerst de x-coördinaat en daarna de y-coördinaat, of als er sprake is van een functie: eerst de invoerwaarde en daarna de uitvoerwaarde. We noemen (x_P, y_P) daarom een *geordend getallenpaar*.

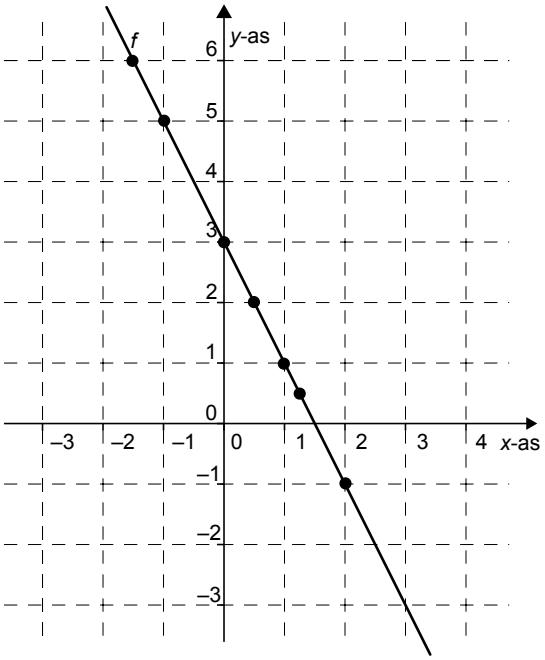
Geordend getallenpaar

Stap 3: De grafiek

In opgave 2.3 zijn slechts 7 punten (x, y) met $y = f(x)$ getekend, maar er zijn er veel meer: bij iedere invoerwaarde x hoort immers een uitvoerwaarde $y = f(x)$ waardoor zo'n punt dus kan worden getekend. Het is onmogelijk om al deze punten los te tekenen, in principe zouden we heel lang door kunnen gaan.

cc BY NC ND

In figuur 2.4 zijn de 7 punten uit figuur 2.3 en opgave 2.3 opnieuw ingetekend. Als we heel veel meer punten zouden intekenen, dan komen die allemaal op een rechte lijn te liggen. Die lijn in in figuur 2.4 ingetekend.



FIGUUR 2.4 De grafiek van de functie $f(x) = 3 - 2x$

OPGAVE 2.5
Gegeven de functie $f(x) = 3 - 2x$.
a Bereken $f\left(\frac{1}{4}\right)$ en controleer in figuur 2.4 dat het bijbehorende punt op de getekende rechte lijn ligt.
b Doe hetzelfde voor een aantal andere invoerwaarden.

Omgekeerd geldt voor alle punten $P(x, y)$ op de rechte lijn in figuur 2.4 dat $f(x) = y$.

OPGAVE 2.6
Gegeven de functie $f(x) = 3 - 2x$.
a Controleer in de figuur dat het punt $(2\frac{1}{2}, -2)$ op de rechte lijn van figuur 2.4 ligt.
b Bereken $f\left(2\frac{1}{2}\right)$ en controleer dat inderdaad geldt $f\left(2\frac{1}{2}\right) = -2$.
c Lees de coördinaten (x, y) van een aantal andere punten op de rechte lijn van figuur 2.4 af en controleer dat telkens geldt: $f(x) = y$.

OPGAVE 2.7
Punt S is het snijpunt van de rechte lijn uit figuur 2.4 en de x-as.
Voor dit snijpunt geldt $y = 0$, ofwel $f(x) = 0$.
a Lees de x-coördinaat van dit snijpunt af in figuur 2.4.
b Bereken $f(x)$ voor uw antwoord van vraag a en controleer dat inderdaad geldt $f(x) = 0$.

De rechte lijn in figuur 2.4 noemen we de *grafiek* van de functie $f(x) = 3 - 2x$.

Voor het tekenen van grafieken zijn veel hulpmiddelen beschikbaar. Er zijn computerprogramma's en websites die u kunt gebruiken. En ook met 'grafische rekenmachines' kunt u grafiekjes tekenen.

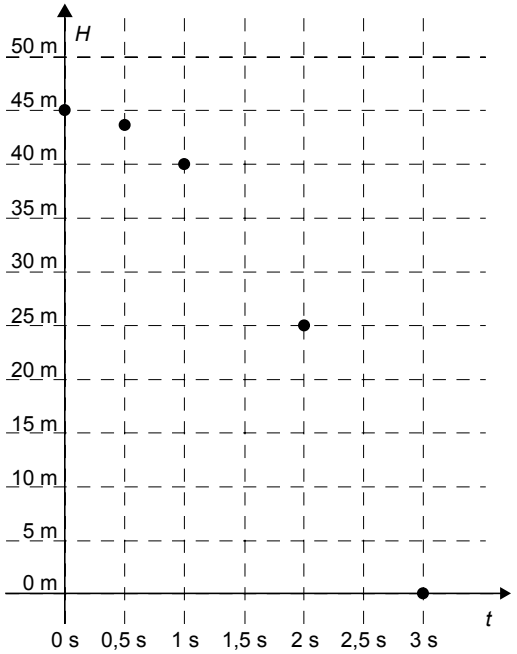
VOORBEELD 2.3
Toepassing: Valbeweging

Als we een steen van 45 meter hoogte laten vallen, dan wordt de hoogte van de steen in meters als functie van de tijd in seconden gegeven door $H(t) = 45 - 5t^2$.

Om een idee te krijgen hoe de grafiek van deze functie loopt, berekenen we eerst een aantal punten op deze grafiek:

Als $t = 0$, dan geldt $H(t) = H(0) = 45 - 5 \cdot 0^2 = 45 - 0 = 45$; punt (0, 45)
Als $t = \frac{1}{2}$, dan geldt $H(t) = H(\frac{1}{2}) = 45 - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 45 - \frac{5}{4} = 43\frac{3}{4}$; punt $(\frac{1}{2}, 43\frac{3}{4})$
Als $t = 1$, dan geldt $H(t) = H(1) = 45 - 5 \cdot 1^2 = 45 - 5 = 40$; punt (1, 40)
Als $t = 2$, dan geldt $H(t) = H(2) = 45 - 5 \cdot 2^2 = 45 - 20 = 25$; punt (2, 25)
Als $t = 3$, dan geldt $H(t) = H(3) = 45 - 5 \cdot 3^2 = 45 - 45 = 0$; punt (3, 0)

In figuur 2.5 zijn deze punten ingetekend in een assenstelsel.
Langs de horizontale as zijn daarbij de invoerwaarden uitgezet: de tijd in seconden. Langs de verticale as zijn de uitvoerwaarden uitgezet: de hoogte in meters.
Elk blokje op de horizontale as correspondeert met een halve seconde.
Elk blokje op de verticale as correspondeert met een afstand van 5 meter.
Op die manier zijn alle gevonden punten duidelijk af te lezen in de grafiek.



FIGUUR 2.5 Punten op de grafiek van $H(t) = 45 - 5t^2$

Voordat we de grafiek verder tekenen, moet eerst opgemerkt worden dat de getekende punten nu niet op een rechte lijn liggen.

Om te zien hoe de grafiek dan wel loopt, zullen we weer een aantal andere punten van de grafiek zelf berekenen.

OPGAVE 2.8

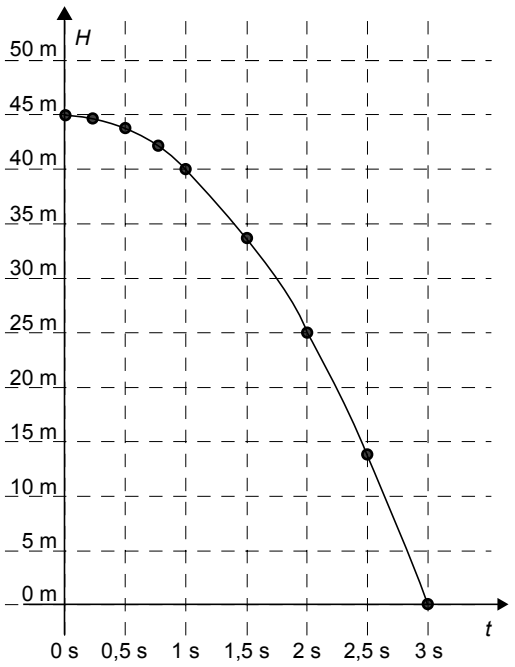
We bekijken nog steeds de functie $H(t) = 45 - 5t^2$.

a Bereken $H(\frac{1}{4})$, $H(\frac{3}{4})$, $H(1\frac{1}{2})$ en $H(2\frac{1}{2})$.

b Neem figuur 2.5 over op ruitjespapier en teken daarin de punten die bij de invoerwaarden uit vraag a horen.

In figuur 2.6 zijn de punten die we in voorbeeld 2.3 en in opgave 2.8 gevonden hebben, handmatig ingetekend en hebben we de curve getekend die ontstaat als we nog veel meer punten in zouden tekenen.

Als we een grafiek op papier willen tekenen, is het natuurlijk niet mogelijk om de coördinaten van duizenden punten uit te rekenen en deze allemaal in te tekenen. Daarom beperken we ons meestal tot het berekenen en tekenen van zo veel punten dat we een goed idee hebben hoe de grafiek loopt. In het vervolg van de cursus zal van een aantal standaardfuncties worden aangegeven hoe de grafiek loopt en waar we op moeten letten bij het tekenen van de grafiek. Op die manier kunnen we grafieken tekenen op grond van een beperkt aantal punten.



FIGUUR 2.6 Grafiek van $H(t) = 45 - 5t^2$

OPGAVE 2.9

We kijken weer naar de steen uit voorbeeld 2.2. Deze wordt vanaf 45 meter hoogte omhooggeschoten met een snelheid van $12\frac{1}{2}$ meter per seconde. De hoogte van de steen (in meters) als functie van de tijd (in seconden) wordt gegeven door de formule $H(t) = 45 + 12\frac{1}{2}t - 5t^2$.
In opgave 2.2 hebt u al een aantal uitvoerwaarden voor deze functie berekend.

a Neem onderstaande tabel over en vul de ontbrekende functiewaarden in.

t	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$
$H(t)$			$52\frac{1}{2}$	$52\frac{1}{2}$		45					

b Teken de punten in de tabel in een assenstelsel. Neem hierbij passende eenheden langs de assen, bijvoorbeeld 1 cm voor 1 seconde langs de horizontale as en 1 cm voor 5 meter langs de verticale as.
c Verbind de getekende punten met een vloeiende lijn om de grafiek af te maken.
d Wat kunt u zeggen over de hoogte van de steen op $t = 5$?

3 Domein en bereik

Bij het bestuderen van functies moeten we ons ook afvragen welke waarden de invoer en de uitvoer kunnen hebben. Kunnen we alle reële getallen nemen als invoer, of zijn er invoerwaarden waarbij de uitvoer geen betekenis heeft of eigenlijk niet berekend kan worden?

VOORBEELD 2.4
T*oepassing: Valbeweging*

In voorbeelden 2.1 en 2.3 hebben we de val van een steen vanaf een toren van 45 meter hoogte beschreven. De hoogte van de steen (in meters) als functie van de tijd (in seconden) werd gegeven door de formule $H(t) = 45 - 5t^2$.
Deze formule geldt uiteraard alleen vanaf het moment dat de steen is losgelaten, dus alleen als $t \geq 0$. Maar nadat de steen de grond geraakt heeft, dat is op $t = 3$, geldt de formule niet meer.
De formule is dus alleen geldig voor $0 \leq t \leq 3$.

OPGAVE 2.10

Als zoals in voorbeeld 2.2 de steen vanaf 45 meter hoogte omhooggeschoten wordt met een snelheid van $12\frac{1}{2}$ meter per seconde, dan wordt de hoogte van de steen (in meters) als functie van de tijd (in seconden) gegeven door de formule $H(t) = 45 + 12\frac{1}{2}t - 5t^2$.
Wat zijn hier de mogelijke invoerwaarden?

Domein

De verzameling van de invoerwaarden van een functie wordt het *domein* van de functie genoemd.

Naast inhoudelijke argumenten zoals hierboven, kunnen er ook rekentechnische argumenten zijn waarom het domein van een functie beperkt wordt.

cc BY NC ND

VOORBEELD 2.5 Gegeven de functie $f(x) = \sqrt{x}$.
We kunnen de wortel nemen uit het getal 0 en uit alle positieve getallen, maar de wortel uit een negatief getal bestaat niet. Het domein van de functie *f* bestaat dus uit alle reële getallen *x* waarvoor geldt $x \geq 0$, ofwel het interval $\left[0, \rightarrow\right\rangle$.

VOORBEELD 2.6 Gegeven de functie $g(x) = 1/x$.
In de noemer van de breuk $1/x$ mogen we alle reële getallen invullen, behalve het getal 0. Delen door 0 is immers niet toegestaan.
Het domein van de functie *g* bestaat dus uit alle reële getallen met uitzondering van 0, ofwel de twee intervallen: $\left\langle \leftarrow, 0\right\rangle$ en $\left\langle 0, \rightarrow\right\rangle$. Dit kunnen we ook aangeven als $\left\langle \leftarrow, 0\right\rangle \cup \left\langle 0, \rightarrow\right\rangle$.

Opmerking:
Vereniging Het verenigingssymbool $\cup$ geeft aan dat het domein bestaat uit alle getallen die in één van beide aangegeven intervallen liggen.

OPGAVE 2.11
Gegeven de functie $f(x) = \sqrt{x-3}$.
a Voor welke waarden van *x* geldt $x - 3 \geq 0$?
b Wat is dus het domein van de functie *f*?
c Geef ook het domein van de functie $g(x) = \sqrt{3-x}$.

OPGAVE 2.12
Gegeven de functie $h(x) = \dfrac{2}{3-x}$.
a Voor welke waarden van *x* bestaat $\dfrac{2}{3-x}$?
b Wat is dus het domein van de functie h?

Het domein van een functie kan ook worden beperkt door expliciet aan te geven welke invoerwaarden wel en niet toegestaan zijn.

VOORBEELD 2.7 Als we in voorbeeld 2.6 als extra eis stellen dat *x* tussen -9 en 9 moet liggen, dan gelden voor de functie $g(x) = 1/x$ de volgende twee eisen:
$x \neq 0$ en $-9 < x < 9$.
Het domein van *g* is dus de verzameling $\left\langle -9, 0\right\rangle \cup \left\langle 0, 9\right\rangle$.

OPGAVE 2.13
Wat wordt het domein van de functie $f(x) = \sqrt{x}$ als we als extra eis stellen dat *x* tussen –9 en 9 moet liggen?

Als er geen sprake is van inhoudelijke, rekentechnische of expliciet aangegeven beperkingen, dan is het domein van de functie de verzameling van de reële getallen, $\mathbb{R}$.

VOORBEELD 2.8 Voor de functie $f(x) = 3 - 2x$ geldt dat alle reële getallen ingevuld mogen worden in de formule. Het domein is dus heel $\mathbb{R}$.

Bereik Het *bereik* van een functie is de verzameling van alle mogelijke uitvoerwaarden bij de invoerwaarden in het domein.

VOORBEELD 2.9
Toepassing: Valbeweging

De hoogte van de steen uit voorbeelden 2.1 en 2.3 wordt gegeven door $H(t) = 45 - 5t^2$.
Als hij wordt losgelaten, bevindt de steen zich op 45 meter hoogte. De hoogte van de steen daalt daarna totdat hij op $t = 3$ de grond bereikt. Er geldt immers $H(3) = 45 - 5 \cdot 3^2 = 0$.
Voor het bereik geldt dus: $0 \le H \le 45$.
Anders gezegd: het bereik is het interval $\left[0, 45\right]$.

OPGAVE 2.14
Voor de steen van voorbeeld 2.2 wordt de hoogte van de steen als functie van de tijd gegeven door $H(t) = 45 + 12\frac{1}{2}t - 5t^2$.
Het domein van deze functie is, zoals we in opgave 2.11 en 2.13 zagen, het interval $\left[0, 4\frac{1}{2}\right]$.
Er geldt: $H(0) = 45$ en $H(4\frac{1}{2}) = 0$.
a Waarom is het bereik van deze functie dan niet het interval $\left[0, 45\right]$?
(Kijk als u het antwoord niet onmiddellijk ziet nog even naar opgave 2.2b.)
b Enig idee wat het bereik wel is?

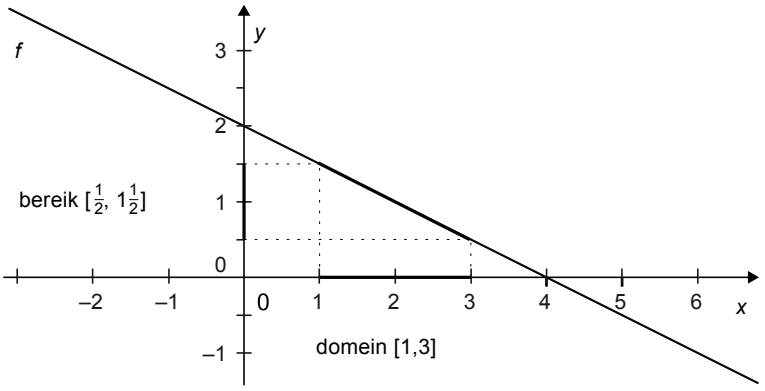
VOORBEELD 2.10

Kijk nog eens naar de functie $f(x) = \sqrt{x}$.
In voorbeeld 2.5 hebben we gezien dat het domein van deze functie bestaat uit alle reële getallen x waarvoor geldt $x \ge 0$, ofwel het interval $\left[0, \rightarrow\right\rangle$.
Aangezien ieder positief getal y de wortel is van een ander positief getal (namelijk van y^2) en ook 0 de wortel is van een getal uit het domein van f (namelijk van zichzelf), bestaat het bereik van f uit alle reële getallen y met $y \ge 0$, ofwel het interval $\left[0, \rightarrow\right\rangle$.

Voor het bepalen van het domein en het bereik van een functie wordt vaak gebruik gemaakt van de grafiek. Het domein wordt daarbij aangegeven op de horizontale as (waar de invoerwaarden op staan); het bereik wordt aangegeven langs de verticale as (waar de uitvoerwaarden op staan).

VOORBEELD 2.11

Voor de functie $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x$ geldt dat alle waarden van x toegestaan zijn als invoerwaarde.
Verder geldt dat ieder getal y de uitvoerwaarde is van het getal $x = 4 - 2y$.
Als we geen beperkingen afspreken, dan is $\mathbb{R}$ het domein van f en is $\mathbb{R}$ ook het bereik van f. Als we het domein van f beperken tot het interval $\left[1, 3\right]$, dan kunnen we het bijbehorende bereik aflezen in figuur 2.7.
We zien dat het bereik het interval $\left[\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right]$ is.



FIGUUR 2.7 Grafiek van $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

OPGAVE 2.15
Kijk nog eens naar de functie $g(x)=\frac{1}{x}$.
a Vul de onderstaande tabel in.

x	1	2	4	6	9	10	12	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
$g(x)$											

b Teken de grafiek van g. Bedenk daarbij dat er ook negatieve invoerwaarden kunnen zijn.
c Bepaal met behulp van de grafiek het bereik van g als het domein beperkt wordt tot het interval $\left[1,9\right]$.
d Wat is het bereik van g als er behalve $x \neq 0$ geen beperkingen gelden voor het domein?
e Bepaal ook het bereik als het domein $\left\langle -9,0\right\rangle \cup \left\langle 0,9\right\rangle$ is (zie voorbeeld 2.7).

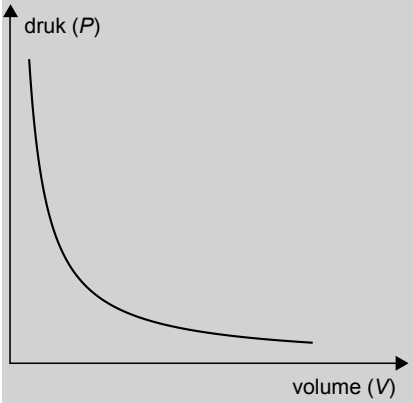
4 Een milieuwetenschappelijke toepassing

In de milieuwetenschappen spelen functies en grafieken een belangrijke rol. Ze zijn een belangrijk instrument om verbanden tussen verschillende grootheden te bepalen en te analyseren.
In deze leereenheid zijn verschillende facetten van functies en grafieken besproken, waaronder de definitie van functie en functievoorschrift, het tekenen van een grafiek, en het functiedomein en -bereik. Deze drie facetten worden in deze paragraaf nog eens geïllustreerd aan de hand van de toepassing van een ideaal gas.

Ideale gaswet

BOX 2.2
T*oepassing: Ideale gaswet*

Bij het samenpersen of uitzetten van gassen zullen volume en druk variëren. Dit proces werd in de vroege jaren van de natuurkunde nog niet goed begrepen. Het is dan ook niet verbazingwekkend dat de Ierse filosoof en scheikundige Robert Boyle (1627-1691) plezier en voldoening voelde toen hij in 1661 ontdekte dat de druk en het volume van een gegeven hoeveelheid lucht op eenduidige wijze met elkaar samenhangen, mits de temperatuur constant gehouden wordt. Hij ontdekte dat, als de gegeven hoeveelheid lucht een volume V_1 innam, dat het dan steeds dezelfde druk P_1 op zijn vat uitoefende. Als het volume veranderde, dan veranderde als reactie ook de druk. Maar als het volume weer werd teruggebracht tot V_1, veranderde de druk ook terug tot P_1. Met andere woorden: iedere mogelijke waarde van het volume V van de lucht ging samen met één en slechts één corresponderende waarde van de druk P. Dit is de essentie van het concept functies. De grafiek van de functie die Boyle vond wordt getoond in figuur 2.8.



FIGUUR 2.8 De relatie tussen druk en volume bij constante temperatuur

Bron: OU Cursus Natuurkunde voor milieuwetenschappen (van Belleghem, 2012)

VOORBEELD 2.12
Toepassing: Ideale gaswet

Een vat van 1 m^3 is gevuld met lucht. Op het vat wordt een zuiger geplaatst. De zuiger wordt langzaam ingedrukt, zodat het volume V van het vat wordt verkleind. Vervolgens wordt de zuiger uitgetrokken, waardoor het volume van het vat wordt vergroot. Op deze manier wordt voor verschillende waarden van het volume de druk P in het vat bepaald. De temperatuur wordt bij deze metingen constant gehouden op 27 °C.

Opmerking

Op dit moment is alleen van belang dat de temperatuur constant gehouden wordt. In paragraaf 2.5 onderzoeken we wat er gebeurt als we de temperatuur ook nog veranderen.

De volgende waarden worden gevonden:

volume (m^3)	*luchtdruk* (bar)
0,25	4,00
0,50	2,00
0,75	1,33
1,00	1,00
1,25	0,80
1,50	0,67
1,75	0,57
2,00	0,50
2,25	0,44
2,50	0,40

OPGAVE 2.16

Het functievoorschrift bij de bovenstaande tabel is nog niet bekend.

a Leg uit dat het verband tussen P en V wel beschreven kan worden als een functie $V \to P$.

Bekijk figuur 2.8.

b Als P stijgt, wat betekent dat voor V? En als P daalt? Geldt dat voor het hele bereik van P?

Bekijk het verband tussen P en V in meer detail.

c Verifieer aan de hand van tenminste 2 invoerwaarden wat er gebeurt met de druk, wanneer het volume verdubbelt. Verifieer aan de hand van 2 andere invoerwaarden wat er gebeurt met de druk als het volume halveert.

d Enig idee wat het functievoorschrift is voor de functie $V \to P$?

Eenheden

In de natuurwetenschappen is het noodzakelijk de *eenheden* te vermelden waarin de grootheden worden uitgedrukt. Zo wordt tijd vaak uitgedrukt in seconden, afstand in meters, druk in pascal, enzovoort. Ook kan een decimaal voorvoegsel worden gebruikt, zoals bij hectopascal, of kilogram.

Om het gebruik van eenheden consistenter te maken wordt over het algemeen het zogenaamde SI-eenhedenstelsel gebruikt.
Bij het tekenen van een grafiek verdient de keuze van de eenheden met hun voorvoegsels en de indeling van de assen speciale aandacht. Deze moeten zo gekozen worden dat het domein, het bereik en de gevonden punten duidelijk in beeld gebracht worden.

BY NC ND

OPGAVE 2.17

In de tabel boven opgave 2.16 zijn de volgende eenheden gekozen: m^3 voor volume, en bar voor de druk.
Het functievoorschrift bij deze tabel wordt, zoals u misschien al vermoedde, gegeven door $P = 1/V$.

a Controleer of deze formule klopt voor alle waarden van V en P in de tabel.

Stel dat we andere eenheden zouden kiezen: volume in deciliters, en druk in hectopascal.

b Vul voor deze keus van eenheden in onderstaande tabel de juiste getalswaarden in.
(1 liter = 1 dm^3 = 0,001 m^3 , 1 bar = 100.000 pascal).

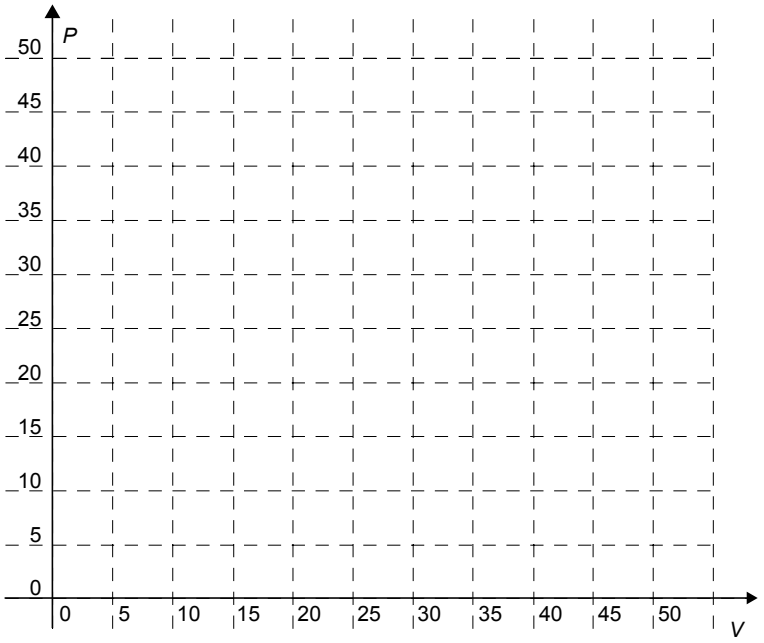
volume (m^3)	*volume* (deciliter)	*luchtdruk* (bar)	*luchtdruk* (hectopascal)
0,25	2500	4,00	4000
0,50		2,00	
0,75		1,33	
1,00		1,00	
1,25		0,80	
1,50		0,67	
1,75		0,57	
2,00		0,50	
2,25		0,44	
2,50		0,40	

c Stel een functievoorschrift op voor de functie $V \to P$ waarbij V gegeven wordt in deciliter en P gegeven wordt in hectopascal.

OPGAVE 2.18

Stel dat we voorgedrukt grafiekpapier hebben met een schaal van 0 – 50 op zowel de *V*- als *P*-as (zie figuur 2.9). Welke eenheden zou u kiezen om de functie goed weer te geven? Vul voor deze eenheden in onderstaande tabel de juiste getalswaarden in.

volume (m^3)	*volume* (...)	*luchtdruk* (bar)	*luchtdruk* (...)
0,25		4,00	
0,50		2,00	
0,75		1,33	
1,00		1,00	
1,25		0,80	
1,50		0,67	
1,75		0,57	
2,00		0,50	
2,25		0,44	
2,50		0,40	



FIGUUR 2.9 Assenstelsel voor de grafiek van *P* als functie van *V*

De eenvoudigste manier om de getallen in opgave 2.18 passend te maken voor de grafiek, is om alle getallen te vermenigvuldigen met 10. De eenheid voor het volume wordt dan 0,1 m^3 = 0,1 × 1000 liter = 100 liter = 1 hectoliter en de eenheid voor de druk wordt 0,1 bar = 1 decibar. Het verband tussen *V* en *P* wordt dan gegeven door de formule $P = 100/V$. Dit is een ander functievoorschrift dan het eerder gevonden $P = 1/V$! Het verschil tussen beide functievoorschriften komt voort uit de keuze van de eenheden voor *P* en *V*. Het verband $P = 1/V$ is namelijk een specifieke vorm van het meer algemene verband $P = a/V$ met *a* een constante. De waarde van *a* hangt ondermeer af van de eenheden die we voor *P* en *V* gekozen hebben. Kiezen we de oorspronkelijke eenheden bar

en m^3, dan geldt $a = 1$. Kiezen we andere eenheden, dan zal ook de waarde van a veranderen. Bij het vermelden van de waarde van constanten die in functievoorschriften staan, is het dus belangrijk de eenheden te vermelden waarin deze waarde is uitgedrukt.

De waarde van a hangt overigens ook af van de temperatuur. Deze relatie zullen we in opgave 3.21 verder bekijken.

OPGAVE 2.19

a Controleer dat in de tabel bij de uitwerking van opgave 2.18 het verband tussen P in decibar en V hectoliter gegeven wordt door $P = 100/V$.

b We drukken nu de druk uit in bar en het volume in liter.

Wat is dan de waarde van de constante a?

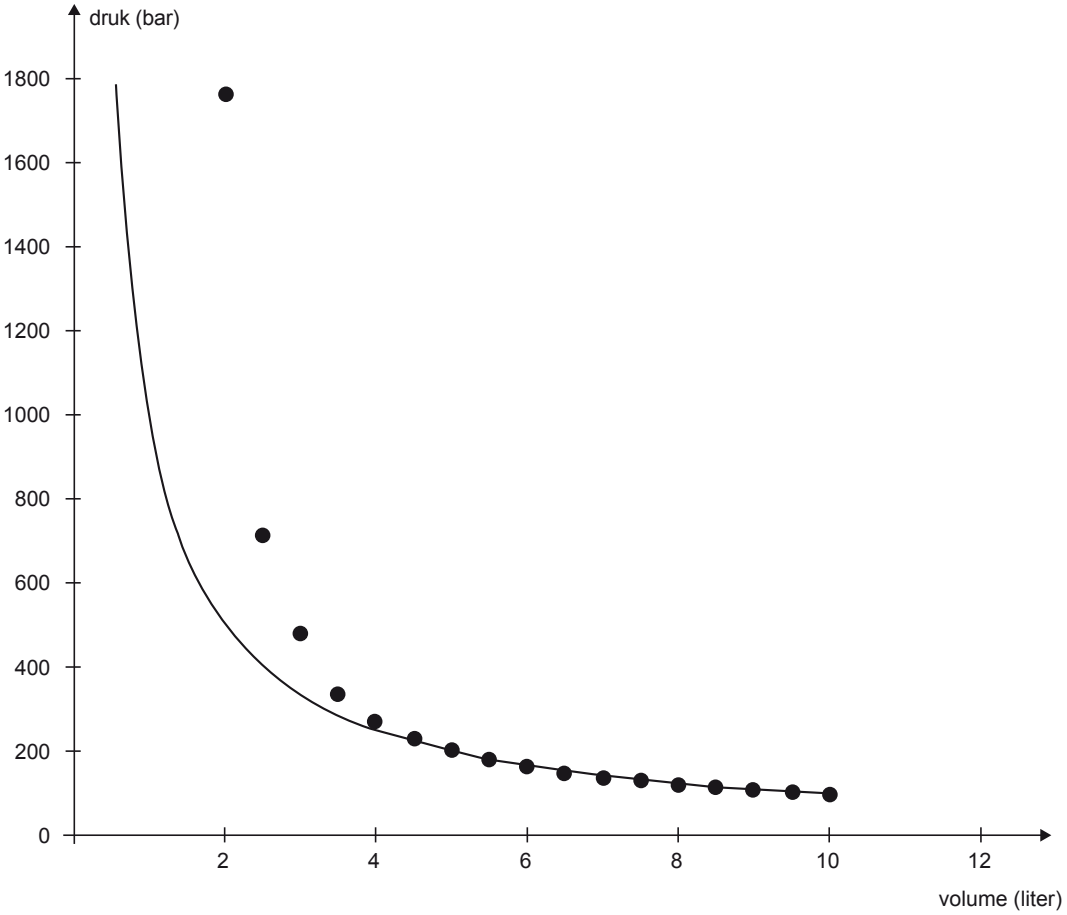
BOX 2.3
Toepassing: Ideale gaswet (vervolg)

Het verband is in feite een vereenvoudigde vorm van de zogenaamde ideale gaswet. Deze ideale gaswet gaat er vanuit dat de individuele gasatomen zich als zeer kleine harde bollen gedragen. De ruimte die de moleculen innemen in het volume V is dan verwaarloosbaar klein. Ook oefenen de moleculen geen krachten op elkaar uit, anders dan de botsingskrachten als ze op elkaar stoten. Deze aannames zijn geldig wanneer het gas voldoende verdund is, dus bij een relatief hoog volume en bijbehorende lage druk.
Wanneer een gas wordt samengeperst, is de ideale gaswet op een gegeven moment dan ook niet meer geldig. Het blijkt in de praktijk dat (bij gegeven volume) de gemeten waarden van de druk hoger zullen zijn dan we op basis van de ideale gaswet zouden verwachten.

Bron: OU Cursus Natuurkunde voor milieuwetenschappen (van Belleghem, 2012)
Aandachtsgebied: Thermodynamica

VOORBEELD 2.13
Toepassing: Ideale gaswet

We bekijken wederom het vat met zuiger van voorbeeld 2.12. De lucht wordt in een hypothetisch experiment onder hoge druk samengeperst tot een volume van 2 liter. De gemeten waarden voor de druk (in bar) zijn weergegeven in figuur 2.10. Ook de ideale gaswet is in deze figuur opgenomen. Het blijkt dat bij volumes kleiner dan 4 liter de gemeten waarden significant (meer dan 5%) afwijken van de verwachte waarden op basis van de ideale gaswet.



FIGUUR 2.10 Het verband tussen druk en volume volgens de ideale gaswet (getekende grafiek) en gemeten waarden (losse punten)

OPGAVE 2.20

Wanneer de druk wordt uitgedrukt in bar en het volume in liter, dan geldt voor een ideaal gas $P = 1000/V$.

a Op welk domein geeft de ideale gaswet – m.a.w. het functievoorschrift $P = 1000/V$ – een goede benadering van het gemeten verband tussen P en V?

b Wat is het bereik van de functie $P = 1000/V$ bij dit domein?

Samenvatting

Functie

Een *functie* is een mechanisme dat bij een bepaalde invoer een bepaalde uitvoer oplevert. Bij iedere invoerwaarde is er precies één uitvoerwaarde, een bepaalde uitvoerwaarde kan wel bij verschillende invoerwaarden horen.

Een functie wordt meestal beschreven door een formule waarmee je de uitvoer kunt uitrekenen bij een gegeven invoer. Zo'n formule wordt het *functievoorschrift* genoemd. De functie die als uitvoer de wortel van de invoerwaarde oplevert, heeft bijvoorbeeld het functievoorschrift $f(x) = \sqrt{x}$.

Als een functie door een formule gegeven wordt, dan kunnen we een tabel maken door de uitvoerwaarden te berekenen van een aantal invoerwaarden. Een functie kan ook worden gegeven door een tabel met invoer- en uitvoerwaarden.

cc BY NC ND

Grafiek

De *grafiek* van een functie ontstaat door de getallenparen uit de tabel weer te geven als punten in een assenstelsel, waarbij de invoer langs de horizontale as en de uitvoer langs de verticale as wordt uitgezet. In de praktijk tekenen we meestal slechts een beperkt aantal punten, maar wel zo veel dat we een goed idee hebben hoe de grafiek verloopt, en verbinden deze punten met een vloeiende lijn.

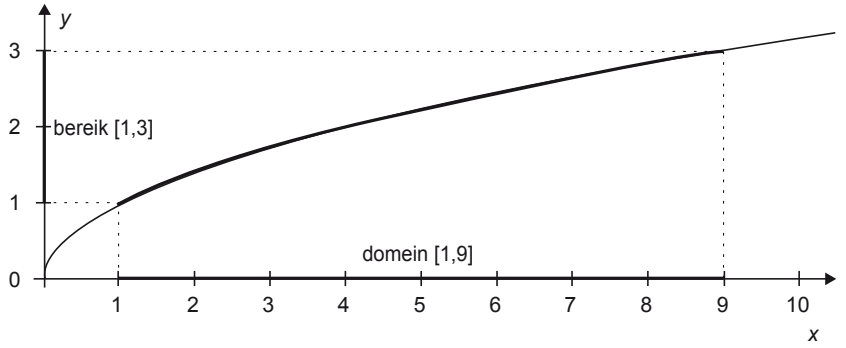
Domein

Het *domein* van een functie is de verzameling van de invoerwaarden van die functie.
Het domein van een functie kan worden beperkt door
– wiskundige voorwaarden (zoals: delen door 0 is niet toegestaan, de wortel uit een negatief getal bestaat niet);
– voorwaarden die volgen uit de context van de functie (in het voorbeeld van de steen die van de toren valt gelden de formules alleen voor de tijd dat de steen in de lucht is);
– expliciet aangegeven voorwaarden.
Als er geen sprake is van één of meer van bovenstaande beperkingen, dan is het domein van de functie de verzameling van de reële getallen, $\mathbb{R}$.

Bereik

Het *bereik* van een functie is de verzameling van alle mogelijke uitvoerwaarden bij de invoerwaarden in het domein. Om het bereik van een functie te bepalen maken we vaak gebruik van de grafiek, waarin we het domein (de toegestane invoerwaarden) langs de horizontale as aangeven en het bereik (de bijbehorende uitvoerwaarden) langs de verticale as.

Voor de functie $f(x)=\sqrt{x}$ geldt bijvoorbeeld dat er geen negatieve invoerwaarden toegestaan zijn, het domein is dus het interval $\left[0,\rightarrow\right\rangle$.
En aangezien voor alle getallen $y \geq 0$ geldt dat y de uitvoerwaarde is van $x=y^2$, is het bereik van f ook het interval $\left[0,\rightarrow\right\rangle$.
In figuur 2.11 ziet u de grafiek van $f(x)=\sqrt{x}$, met daarin aangegeven wat het bereik wordt als het domein beperkt wordt tot het interval $\left[1,9\right]$.



FIGUUR 2.11 De grafiek van $f(x)=\sqrt{x}$

Als een functie het verband aangeeft tussen twee grootheden uit de milieuwetenschappen, dan moet bij beide grootheden duidelijk worden aangegeven in welke *eenheden* gerekend wordt, zowel bij het noteren van formules als bij het tekenen van grafieken.

ZELFTOETS

1 Gegeven de functie $f(x) = 4 - x^2$.
a Wat is het domein van f?
b Wat is de grootste uitvoerwaarde van f?
c Is er een kleinste uitvoerwaarde?
d Wat is dus het bereik van f?

2 Gegeven de functie $g(x) = 2x + 1$.
a Vul de onderstaande tabel in.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	$\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$
$g(x)$											

b Teken de punten die bij de tabel horen in een assenstelsel en teken de lijn door deze punten.
c Waarom is deze lijn de grafiek van de functie g?

3 We bekijken nog opnieuw de functies $f(x) = 4 - x^2$ en $g(x) = 2x + 1$.
a Bereken $f(-3)$ en $f(1)$ en controleer dat geldt: $f(-3) = g(-3)$ en $f(1) = g(1)$.
b Geef het bereik van g als het domein beperkt wordt tot het interval $[-3,1]$.
c Geef ook het bereik van f als het domein beperkt wordt tot het interval $[-3,1]$.

4 Bekijk alle rechthoeken met een oppervlakte van 24 cm².
Als we de hoogte van zo'n rechthoek in cm h noemen en de breedte in cm b, dan geldt dus $h \cdot b = 24$.
Als we nu de breedte van zo'n rechthoek weten, dan kunnen we de hoogte berekenen met de formule $h = 24/b$.
De hoogte h is dus een functie van de breedte b.

a Welke invoerwaarden zijn er mogelijk voor deze functie $b \to h$?
Wat is dus het domein?
b Bereken de hoogte bij de volgende breedtes:
$b = 1$; $b = 2$; $b = 3$ $b = 4$; $b = 6$; $b = 8$; $b = 12$; $b = 18$; $b = 24$.
c Teken de punten die bij vraag b horen in een assenstelsel.
Hoe loopt de grafiek tussen deze punten?
d Hoe loopt de grafiek links van het punt (1, 24), dat is bijvoorbeeld voor $b = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{10}$ en $b = \frac{1}{100}$?
e En hoe loopt de grafiek rechts van het punt (24, 1), dat is bijvoorbeeld voor $b = 48$ en $b = 480$?
f Geef het bereik van de functie $b \to h$.

Een A4-blad (staand) heeft de afmetingen breedte = 21 cm en hoogte = 29,7 cm.

g Bepaal het domein en het bereik van de functie $b \to h$ als verder gegeven wordt dat de rechthoek op een A4-blad getekend moet kunnen worden.
h Welke afmetingen heeft een vierkant van 24 cm²?

cc BY NC ND

Eerstegraads functies en rechte lijnen

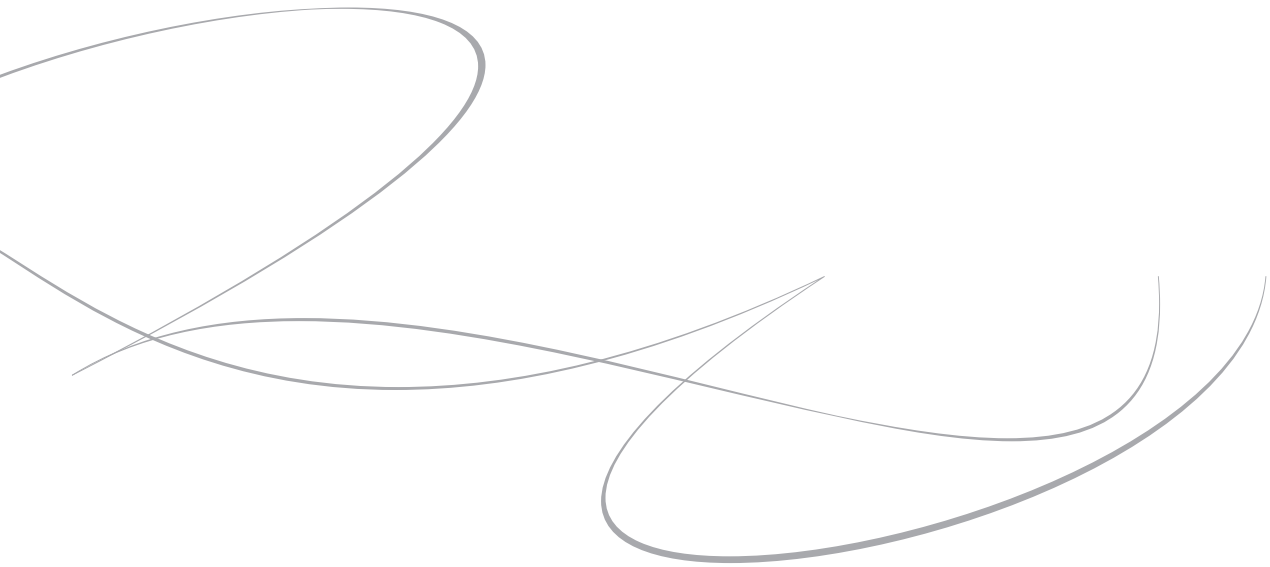
Introductie *87*

Leerkern *88*

1 De grafiek van een eerstegraads functie *88*
2 Van grafiek naar functievoorschrift *90*
3 De richtingscoëfficiënt nader bekeken *94*
4 Evenredige grootheden *97*
5 Snijpunten van grafieken *99*
6 Eerstegraads ongelijkheden *102*
7 Meer over rechte lijnen *105*

Samenvatting *110*

Zelftoets *112*



CC BY NC ND

Leereenheid 3

Eerstegraads functies en rechte lijnen

INTRODUCTIE

Er bestaat een verscheidenheid aan mogelijke verbanden tussen milieuwetenschappelijke grootheden. Hier bekijken we een vrij eenvoudig verband: het lineaire verband. Zo'n lineair verband wordt beschreven met *eerstegraads functies* en grafisch weergegeven door een *rechte lijn*.
In deze leereenheid vindt u een aantal voorbeelden zoals nulde-orde chemische reacties, de beweging van voertuigen met constante snelheid, het energieverbruik in huis, de ideale gaswet, en de opbouw van druk in de aardkorst.
In leereenheid 2 zijn enkele eerstegraads functies al de revue gepasseerd. In deze leereenheid worden de eigenschappen van dergelijke functies op een rijtje gezet. Daarbij bespreken we onder meer de standaardvorm van een eerstegraads functie, de richtingscoëfficiënt en *evenredige* grootheden. Vervolgens bespreken we enkele aspecten van rechte lijnen, zoals de *vergelijking van een rechte lijn* en het berekenen van *snijpunten* van rechte lijnen. Ten slotte bekijken we het opstellen en oplossen van *eerstegraads ongelijkheden*.

LEERDOELEN

Na bestudering van deze leereenheid
- weet u wat er onder het begrip *eerstegraads functie* wordt verstaan
- weet u dat de grafiek van een eerstegraads functie een *rechte lijn* is
- kent u enkele belangrijke kenmerken van een eerstegraads functie, zoals de *richtingscoëfficiënt* en het *snijpunt met de y-as*
- kent u de *standaardvorm* van het functievoorschrift van een eerstegraads functie
- kunt u op basis van de grafiek het functievoorschrift bepalen
- kunt u herkennen wanneer twee grootheden *recht evenredig* zijn
- weet u dat een rechte lijn ook beschreven kan worden zonder een directe koppeling aan een eerstegraads functie
- kent u diverse vormen van de *vergelijking van een rechte lijn* en kunt u deze in elkaar omzetten
- kent u de bijzondere vorm van de vergelijkingen van *horizontale en verticale rechte lijnen*
- kunt u de *snijpunten* bepalen van rechte lijnen in het algemeen en van grafieken van eerstegraads functies in het bijzonder
- kunt u *eerstegraads ongelijkheden* zowel grafisch als algebraïsch oplossen.

BY NC ND

LEERKERN

1 De grafiek van een eerstegraads functie

Eerstegraads functie

Een functie met een functievoorschrift van de vorm $f(x) = ax + b$ is een *eerstegraads functie*.

Graad

Met *graad* wordt hier bedoeld: de hoogste macht waarin de invoervariabele x voorkomt.
Omdat $x = x^1$, is de graad van deze functie 1.

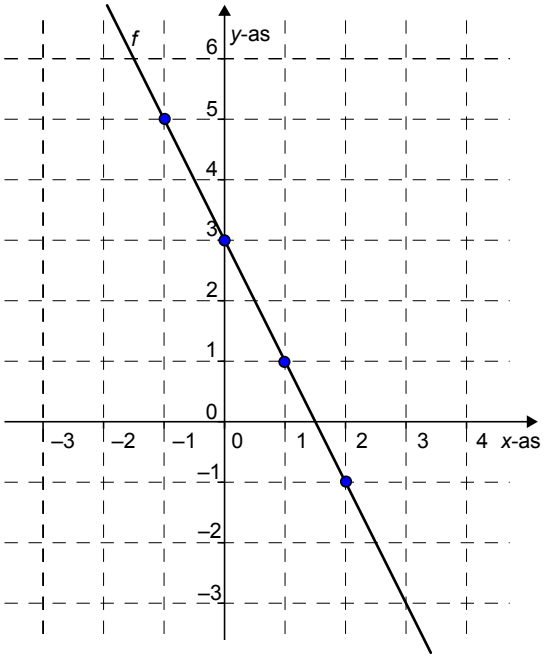
VOORBEELD 3.1

Met $a = -2$ en $b = 3$ krijgen we de functie $f(x) = -2x + 3$ ofwel $f(x) = 3 - 2x$.
Met $a = 2$ en $b = 1$ krijgen we $g(x) = 2x + 1$.
Met $a = -1$ en $b = 4$ krijgen we $h(x) = -x + 4$, ofwel $h(x) = 4 - x$.
Met $a = 0$ en $b = 4$ krijgen we $k(x) = 0 \cdot x + 4$, ofwel $k(x) = 4$.

De grafiek van $f(x) = -2x + 3$ hebben we al stap voor stap getekend in paragraaf 1.2.
Eerst hebben we een aantal punten van de grafiek berekend:

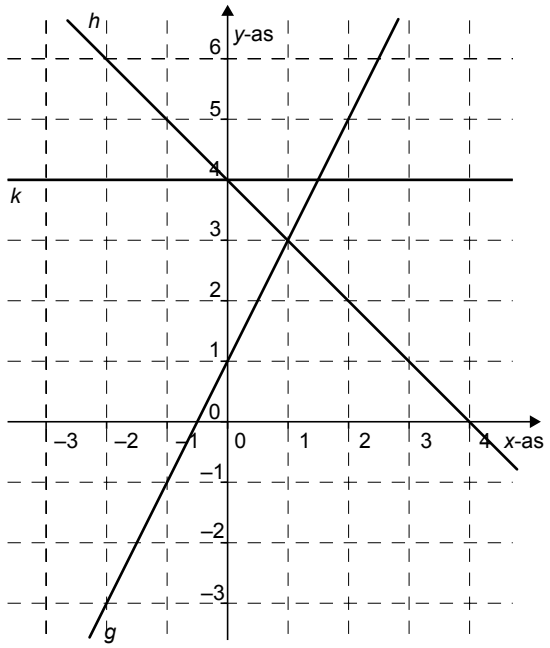
x	-1	0	1	2
$f(x)$	$-2 \cdot -1 + 3 = 5$	$-2 \cdot 0 + 3 = 3$	$-2 \cdot 1 + 3 = 1$	$-2 \cdot 2 + 3 = -1$

Vervolgens zijn de punten uit de tabel getekend in een assenstelsel, zie figuur 3.1. Deze punten liggen op een rechte lijn. Als we meer punten van deze grafiek zouden tekenen, dan komen deze alle op deze rechte lijn te liggen en omgekeerd liggen alle punten op deze lijn op de grafiek van *f*.



FIGUUR 3.1 Grafiek van de functie $f(x) = -2x + 3$

De grafieken van de andere drie functies uit voorbeeld 3.1 ziet u in figuur 3.2.



FIGUUR 3.2 Grafieken van $g(x) = 2x + 1$, $h(x) = 4 - x$ en $k(x) = 4$

OPGAVE 3.1

a Bereken $g(0)$, $g(2)$ en $g(3\frac{1}{4})$ en controleer dat de bijbehorende punten op de in figuur 3.2 getekende grafiek van *g* liggen.
b Doe hetzelfde voor $h(0)$, $h(2)$ en $h(3\frac{1}{4})$.
c Wat valt u op aan de uitvoerwaarden van de functie *k*?

OPGAVE 3.2

Het snijpunt van de grafieken van *g* en *h* kunnen we aflezen in de grafiek: (1, 3).
a Controleer dat dit punt inderdaad op beide grafieken ligt door $g(1)$ en $h(1)$ te berekenen.
b Lees het snijpunt van de grafieken van *g* en *k* af in figuur 3.2.
c Controleer op de manier van vraag a dat dit punt inderdaad op de grafiek van *g* ligt.

In de grafieken van figuren 3.1 en 3.2 kunt u enkele belangrijke kenmerken zien van de rechte lijn als grafiek van een eerstegraads functie:
– De grafiek van de functie $f(x) = ax + b$ is een rechte lijn.
De waarde van *a* geeft de 'richting' van de lijn aan. *a* heet dan ook de *richtingscoëfficiënt* van de rechte lijn.

Richtingscoëfficiënt

Stijgen

– Als *a* positief is, dan *stijgt* de grafiek (dat wil zeggen dat $f(x)$ toeneemt als *x* toeneemt);

Dalen

– als *a* negatief is, dan *daalt* de grafiek van *f* (dat wil zeggen dat $f(x)$ afneemt als *x* toeneemt);
– als $a = 0$, dan is de grafiek een horizontale lijn;
– als twee eerstegraads functies dezelfde richtingscoëfficiënt *a* in hun formule hebben, dan zijn hun grafieken twee evenwijdige rechte lijnen;
– hoe groter *a*, hoe steiler de grafiek.
– De grafiek snijdt de verticale as in het punt *P* met *x*-coördinaat $x_P = 0$ en *y*-coördinaat $y_P = b$.

BY NC ND

OPGAVE 3.3
Van welke functies in voorbeeld 3.1 is de grafiek stijgend?
En van welke is de grafiek dalend?

OPGAVE 3.4
Welk van de grafieken in voorbeeld 3.1 loopt het steilst?
En welke grafieken lopen evenwijdig?

Lineaire functie

Omdat de grafiek van een eerstegraads functie $f(x) = ax + b$ een rechte lijn is wordt zo'n functie ook wel een *lineaire functie* genoemd.
Functies als $f(x) = 5$ en $k(x) = 4$ zijn strikt genomen geen eerstegraads functies, want er staat geen eerstegraads term in het functievoorschrift. Met enig formalisme zouden we dit nuldegraads functies kunnen noemen: omdat $x^0 = 1$ kunnen we schrijven $f(x) = 5 \cdot x^0$ en $k(x) = 4 \cdot x^0$. Deze *constante functies* zijn wel lineaire functies: de grafiek is een horizontale rechte lijn.

Vergelijking van de grafiek van f

Als we, zoals gebruikelijk bij wiskundige functies zonder context, de uitvoervariabele y noemen, kunnen we de formule $f(x) = -2x + 3$ ook schrijven als $y = -2x + 3$. Deze laatste vorm wordt de *vergelijking* van de grafiek van *f* genoemd.
In opgave 3.1 hebt u kunnen zien dat alle punten op de rechte lijn van figuur 3.2 voldoen aan deze vergelijking, dat wil zeggen dat er een ware bewering ontstaat als we de x-coördinaat en de y-coördinaat van een punt op die lijn invullen in de vergelijking.
Hoewel er formeel een verschil bestaat tussen de formule $f(x) = -2x + 3$ (het functievoorschrift van een functie) en de formule $y = -2x + 3$ (de vergelijking van de grafiek van die functie) worden deze formules in de praktijk door elkaar heen gebruikt.

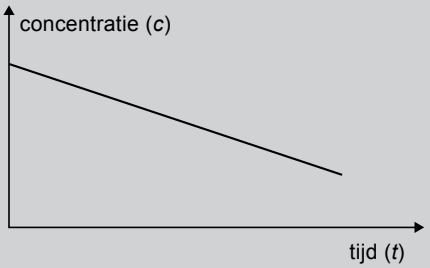
OPGAVE 3.5
De rechte lijnen in figuur 3.2 hebben als vergelijkingen: $y = 2x + 1$ (grafiek van *g*), $y = 4 - x$ (grafiek van *h*) en $y = 4$ (grafiek van *k*).
a Lees de coördinaten van enkele punten op de grafiek van *g* af en controleer dat deze voldoen aan de vergelijking $y = 2x + 1$.
b Lees de coördinaten van enkele punten op de grafiek van *h* af en controleer dat deze voldoen aan de vergelijking $y = 4 - x$.
c Wat kunt u zeggen over de *y*-coördinaten van de punten die op de grafiek van *k* liggen?

2 Van grafiek naar functievoorschrift

In de Milieuwetenschappen weten we vaak op grond van meetresultaten en soms ook op grond van theoretische overwegingen wat voor verband er tussen twee variabelen bestaat, maar daarmee hebben we nog geen functievoorschrift. In zo'n geval kunnen we beschikbare metingen weergeven als punten in een assenstel en kijken we daarna of we op grond van deze figuur het functievoorschrift kunnen bepalen.

BOX 3.1
Toepassing: Nulde-orde chemische reacties

Een toepassing van lineaire functies is het beschrijven van zogenaamde nulde-orde chemische reacties. Bij een chemische reactie wordt bijvoorbeeld een chemische stof A ontleed in twee componenten B en C. Dit wordt genoteerd als $A \rightarrow B + C$. De snelheid van de reactie hangt in principe af van de concentratie c van stof A: hoe hoger de concentratie van A, des te sneller zal de reactie over het algemeen verlopen. Bij een nulde-orde reactie is deze reactiesnelheid echter constant en dus juist onafhankelijk van A. In dat geval verandert de concentratie van de uitgangsstof A lineair met de tijd. Andere typen reacties – bijvoorbeeld eerste-orde en tweede-orde reacties – worden met andere typen functies beschreven. Hier komen we later op terug.



FIGUUR 3.3 Verloop van de concentratie tegen de tijd voor een nulde-orde chemische reactie

Bron: OU Cursus Scheikunde voor milieuwetenschappen 1 (Holtkamp & van Wijnen, 2012).

VOORBEELD 3.2
Toepassing: Nulde-orde chemische reactie

Een voorbeeld van een nulde-orde reactie is de ontleding van ammoniak aan een platinadraad tot stikstof en waterstof:

$$2\,NH_3 \xrightarrow[\text{katalysator}]{\text{Pt als}} N_2 + 3\,H_2$$

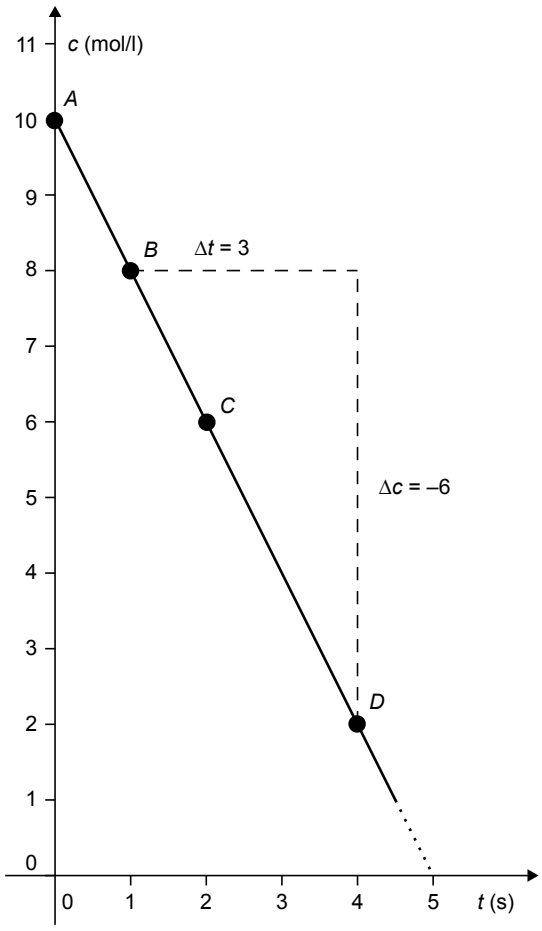
Voor deze reactie beschrijft de functie f de ammoniakconcentratie c (in mol per liter) als functie van de tijd t (in seconden). Aan de hand van een experiment zijn de volgende waarden bekend:

t (*s*)	0	1	2	4
c (*mol/l*)	10	8	6	2

Omdat we weten dat f een lineaire functie is, kunnen we op basis van deze tabel de grafiek tekenen.
In figuur 3.4 ziet u de vier punten $A(0, 10)$, $B(1, 8)$, $C(2, 6)$ en $D(4, 2)$, alsmede de rechte lijn door deze vier punten.
De vraag is nu hoe we op grond van de tabel en de grafiek een formule voor de functie f kunnen opstellen. Daartoe onderzoeken we hoe de waarde van de uitvoervariabele c verandert als gevolg van een verandering van de invoervariabele t:

Tussen $t = 0$ en $t = 1$ neemt de concentratie af van $c = 10$ tot $c = 8$, tussen $t = 0$ en $t = 2$ neemt de concentratie af van $c = 10$ tot $c = 6$ en van $t = 1$ tot $t = 4$ neemt de concentratie af van $c = 8$ tot $c = 2$.

Algemener geldt: als t toeneemt met 1, dan neemt c af met 2; als t toeneemt met 2, dan neemt c af met 4 en als t toeneemt met 3, dan neemt c af met 6. Welke twee punten op de grafiek we ook nemen en hoe groot de toename van t tussen deze twee punten ook is, de afname van c is altijd twee keer zo groot als de toename van t.



FIGUUR 3.4 Grafiek van de functie *f* uit voorbeeld 3.2

Om deze conclusie in een formule te kunnen gieten, voeren we eerst wat notatie in.
Gegeven twee punten van de grafiek, bijvoorbeeld *A* en *B*. De toename van *t* noteren we als Δt, de toename van *c* noteren we als Δc.

Δ is de Griekse hoofdletter Delta.

Er geldt dus: $\Delta t = t_B - t_A$ en $\Delta c = c_B - c_A$.

afname = negatieve toename

Voor de punten *A* en *B* in figuur 3.4 geldt dan: $\Delta t = t_B - t_A = 1 - 0 = 1$ en $\Delta c = c_B - c_A = 8 - 10 = -2$ en voor de punten *B* en *D* geldt zoals aangegeven in figuur 3.4: $\Delta t = t_D - t_B = 4 - 1 = 3$ en $\Delta c = c_D - c_B = 2 - 8 = -6$.
Hoewel de waarden van Δt en Δc niet op voorhand vastliggen (we kunnen de punten waarmee we deze toenames berekenen vrij kiezen), ligt hun verhouding voor alle punten op de grafiek van figuur 3.4 wel vast. Welk tweetal punten we ook nemen, er geldt altijd $\Delta c = -2 \cdot \Delta t$, ofwel

$$\frac{\Delta c}{\Delta t} = -2$$

Nu we geconstateerd hebben dat de verhouding tussen de toename van *t* en de toename van *c* tussen twee punten van de grafiek een vast getal is, in ons voorbeeld –2, kunnen we ook een vergelijking voor de grafiek opstellen.
Neem hiertoe een willekeurig punt *P*(*t*, *c*) op de grafiek en neem als vast punt *A*(0, 10).

Als we van A naar P bewegen, dan geldt $\Delta c = c_P - c_A = c - 10$ en $\Delta t = t_P - t_A = t - 0 = t$.
Uit $\Delta c = -2 \cdot \Delta t$ volgt dan $c - 10 = -2 \cdot t$ ofwel $c = -2t + 10$.
De vergelijking van de rechte lijn in figuur 3.4 is dus $c = -2t + 10$.
Het bijbehorende functievoorschrift is $f(t) = -2t + 10$.

OPGAVE 3.6

De grafiek van figuur 3.4 gaat onder meer door de punten $A(0, 10)$, $B(1, 8)$, $C(2, 6)$ en $D(4, 2)$.
Hierboven is beredeneerd dat bij deze grafiek het functievoorschrift $f(t) = -2t + 10$ hoort.

a Bereken $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ en $f(4)$ en controleer zo dat de punten A, B, C en D inderdaad op de grafiek van f liggen.

b Lees de coördinaten af van twee andere punten op de grafiek van figuur 3.4 en controleer op de manier van vraag a dat ook deze punten op de grafiek van f liggen.

OPGAVE 3.7

We bekijken nog steeds de nulde-orde chemische reactie uit voorbeeld 3.2.
We hebben inmiddels gezien dat de concentratie op tijdstip t gegeven wordt door $f(t) = -2t + 10$.

a Wat is de concentratie op $t = 3$? En op $t = 5$?

b Wat kunt u zeggen over de concentratie op $t = 6$?

c Is de grafiek stijgend of dalend? Wat is hiervan de scheikundige interpretatie?

d Wat is het domein van de functie? En wat is het bereik?

Merk op dat de richtingscoëfficiënt van de grafiek van $f(t) = -2t + 10$ (a in de formule $f(t) = at + b$) gelijk is aan $\Delta c/\Delta t$ en dat het voor de uitkomst van $\Delta c/\Delta t$ niet uitmaakt welk tweetal punten op de grafiek we gebruiken om deze verhouding te berekenen.
Verder hadden we in dit voorbeeld de waarde van b ook direct kunnen aflezen uit de grafiek. Enerzijds geldt namelijk dat de grafiek door het punt (0, 10) gaat, dus $f(0) = 10$. Anderzijds geldt $f(0) = a \cdot 0 + b = 0 + b = b$.
Dit kunnen we samennemen tot $b = 10$.

De hierboven besproken techniek kunnen we toepassen voor iedere lineaire functie. De cruciale stap hierbij is de bepaling van de richtingscoëfficiënt a. Deze wordt berekend met de coördinaten van twee punten op de grafiek.

Richtingscoëfficiënt bepalen.

De richtingscoëfficiënt a van de rechte lijn met vergelijking $y = ax + b$ door de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ is gelijk aan

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

VOORBEELD 3.3

We gaan een vergelijking opstellen voor de rechte lijn l die door de punten $A(2,2)$ en $B(4,5)$ gaat. We gaan daarbij op zoek naar een vergelijking van de vorm $y = ax + b$.

De richtingscoëfficiënt a berekenen we met de formule

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-2}{4-2} = \frac{3}{2} = 1\tfrac{1}{2}$$

BY NC ND

De waarde van b kunnen we nu op twee manieren vinden:
– Ga uit van de vergelijking $y = ax + b$. We weten dat $a = 1\frac{1}{2}$ en dat het getallenpaar $x = 2$ en $y = 2$ een oplossing is van de vergelijking. Er moet dus gelden: $2 = 1\frac{1}{2} \cdot 2 + b \Leftrightarrow 2 = 3 + b \Leftrightarrow b = -1$.
– Teken de rechte lijn door de punten $A(2,2)$ en $B(4,5)$ in een assenstelsel en kijk waar deze lijn de y-as snijdt. Omdat y met 3 toeneemt als x met 2 toeneemt, neemt y ook 3 af als x afneemt met 2. Zo zien we dat de rechte lijn ook door het punt $(0,-1)$ gaat.
Op beide manieren vinden we dat $b = -1$, de vergelijking van lijn l is dus $y = 1\frac{1}{2}x - 1$.

OPGAVE 3.8
Controleer dat het punt $B(4,5)$ ook op de rechte lijn met vergelijking $y = 1\frac{1}{2}x - 1$ ligt.

OPGAVE 3.9
Bereken eerst de richtingscoëfficiënten en stel vervolgens een vergelijking op voor de rechte lijnen door de punten:
a (0, 3) en (2, 4) b (0,3) en (6, 0) c (–2, –2) en (2, 6)

OPGAVE 3.10
De rechte lijn l gaat door de punten (4, 4) en (8, –2).
a Teken lijn l in een assenstelsel.
b Stel een vergelijking op voor lijn l.

OPGAVE 3.11
Van de lineaire functie f is gegeven: $f(12) = 20$ en $f(16) = 30$.
Stel een functievoorschrift op voor f.

Opmerking

Een rechte lijn ligt vast als we twee punten van die lijn kennen. We kunnen daarom de grafiek van een lineaire functie tekenen zodra we twee punten van die grafiek kennen. Om een nauwkeuriger grafiek te maken is het raadzaam om nog één of twee punten te tekenen.

3 De richtingscoëfficiënt nader bekeken

De richtingscoëfficiënt is niet alleen een abstracte parameter in de formule $y = ax + b$, in toepassingen heeft hij vaak ook een concrete betekenis. In deze paragraaf bespreken we het voorbeeld van de beweging van voertuigen met constante snelheid.

BOX 3.2
Toepassing: Beweging van voertuigen

Als toepassing van eerstegraads functies bekijken we de beweging van een voertuig met een constante snelheid. Zijn positie verandert dan lineair met de tijd. Dit kan met een eerstegraads functie worden beschreven. Andere vormen van beweging – met versnelling of vertraging – worden met andere typen functies beschreven. Hier komen we later op terug.

Bron: OU cursus Natuurkunde voor milieuwetenschappen (van Belleghem, 2012)
Aandachtsgebied: Klassieke mechanica, Mobiliteit

VOORBEELD 3.4
Toepassing: Beweging van voertuigen

Een hogesnelheidstrein rijdt vanaf 12.00 uur ($t = 0$) gedurende 20 minuten met een constante snelheid. Om 12.10 uur ($t = 10$) passeert de trein kilometerpaal 60, om 12.15 uur ($t = 15$) passeert de trein kilometerpaal 85.
A, de afstand (in kilometers) van de trein tot kilometerpaal 0 is hier een eerstegraads functie van de tijd t. Voor deze functie geldt: $A(10) = 60$ en $A(15) = 85$.
Om het functievoorschrift te bepalen berekenen we eerst

$$a = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{85 - 60}{15 - 10} = \frac{25}{5} = 5$$

In de formule $A = at + b$ kunnen we nu invullen: $A = 60$, $a = 5$ en $t = 10$.
Dit geeft $60 = 5 \cdot 10 + b$, ofwel $60 = 50 + b$. Hieruit volgt $b = 10$.
Het functievoorschrift is dus $A = 5t + 10$.
Nu kunnen we uitrekenen waar de trein zich bevindt op diverse tijdtippen:

Op $t = 0$ geldt $A = 5 \cdot 0 + 10 = 10$
Op $t = 1$ geldt $A = 5 \cdot 1 + 10 = 15$
Op $t = 2$ geldt $A = 5 \cdot 2 + 10 = 20$
Op $t = 3$ geldt $A = 5 \cdot 3 + 10 = 25$
Op $t = 4$ geldt $A = 5 \cdot 4 + 10 = 30$
Op $t = 5$ geldt $A = 5 \cdot 5 + 10 = 35$

Merk op dat de trein rijdt met een snelheid van 5 km per minuut.
De richtingscoëfficiënt is in dit voorbeeld dus niets anders dan de snelheid van de trein!
De richtingscoëfficiënt geeft ook precies de afstand die wordt afgelegd in één minuut.

Algemener geformuleerd:
De richtingscoëfficiënt van de grafiek van een lineaire functie $t \to A$ geeft aan met hoeveel eenheden de uitvoer A toeneemt als de invoer t toeneemt met één eenheid.

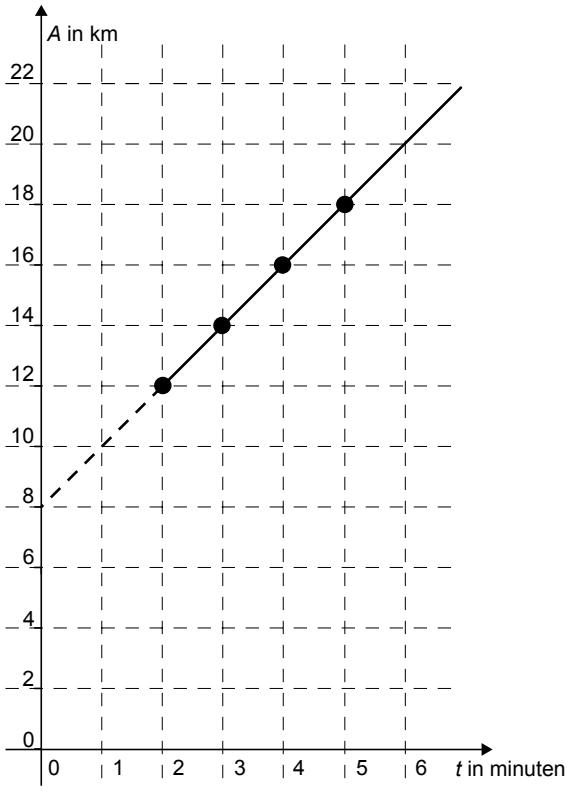
OPGAVE 3.12
a Bij welke kilometerpaal is de trein uit voorbeeld 3.4 op $t = 20$?
b Teken de grafiek van de functie $t \to A$.
c Geef het domein en het bereik van deze functie.
Let daarbij op de hierboven gegeven beperkingen voor het domein.

Als we van een eerstegraads functie één punt en de richtingscoëfficiënt kennen, dan kunnen we de grafiek ook tekenen zonder eerst de formule op te stellen. De richtingscoëfficiënt geeft immers aan met hoeveel eenheden de uitvoer verandert als de invoer met één eenheid toeneemt. Zo kunnen we ook zonder functievoorschrift een aantal andere punten van de grafiek bepalen en vervolgens de grafiek tekenen.

BY NC ND

VOORBEELD 3.5
Toepassing: Beweging van voertuigen

Een auto rijdt met een constante snelheid van 120 km/h over de snelweg. Twee minuten nadat hij de snelweg is opgereden (op $t = 2$ minuten) passeert de auto kilometerpaal 12.
A, de afstand (in km) van de auto tot kilometerpaal 0 is een eerstegraads functie van de tijd t (in minuten). Uit bovenstaande volgt dat de grafiek van deze functie door het punt (2, 12) gaat.
Omdat de auto met een snelheid van 2 kilometer per minuut rijdt, kunnen we gemakkelijk andere punten van de grafiek vinden.
Eén minuut na $t = 2$ passeert de auto kilometerpaal 14; twee minuten na $t = 2$ passeert de auto kilometerpaal 16; drie minuten na $t = 2$ passeert de auto kilometerpaal 18; etc.
De grafiek van de functie $t \to A$ gaat dus ook door de punten (3, 14); (4, 16) en (5, 18). Het is de rechte lijn die door deze punten gaat. De grafiek van deze functie is zodoende de rechte lijn door het punt (2, 12) met richtingscoëfficiënt 2.



FIGUUR 3.5 De rechte lijn door (2, 12) met richtingscoëfficiënt 2.
Let op: de afstand tussen twee dwarsstreepjes langs de verticale as is 2 km.

OPGAVE 3.13
Bekijk de grafiek in figuur 3.5.
a Waarom zou het eerste deel van de grafiek gestreept getekend zijn?
b Stel een functievoorschrift op voor A als functie van t.

OPGAVE 3.14
De grafiek van een functie f gaat door het punt $(-2, -5)$.
De richtingscoëfficiënt van de grafiek is 2.
a Teken de grafiek van de functie f.
b Stel met behulp van deze grafiek een functievoorschrift op voor f.

OPGAVE 3.15
De grafiek van een functie g gaat door het punt $(-2, 4)$.
De richtingscoëfficiënt van de grafiek is $-\frac{1}{2}$.
a Teken de grafiek van de functie g.
b Stel met behulp van deze grafiek een functievoorschrift op voor g.

4 Evenredige grootheden

Als in de formule $f(x) = ax + b$ de waarde van b gelijk is aan 0, dan ontstaat er een bijzondere vorm van een eerstegraads functie. Het functievoorschrift is dan $f(x) = ax$ en de grafiek van de functie f gaat door de oorsprong (0, 0).
Wanneer het verband tussen twee grootheden met een dergelijke functie wordt beschreven, spreken we van evenredige grootheden. Hieronder leest u over enkele toepassingen waarin dergelijke verbanden en functies een rol spelen.

BOX 3.3
Toepassing: Lithostatische druk en geothermische gradiënt

In de geologie komen we evenredige grootheden tegen bij het beschrijven van druk en temperatuur in de aardkorst. Inzicht in druk en temperatuur is nodig om geologische processen in de aardkorst – zoals de vervorming van gesteenten en mineralen – te beschrijven. De druk wordt wel lithostatische druk genoemd: de druk die op een bepaald punt in de ondergrond heerst als gevolg van het gewicht van erboven gelegen gesteentemateriaal. M.b.t. de temperatuur wordt gesproken van de geothermische gradiënt: de toename van de temperatuur met de diepte in de aardkorst. Het precieze verloop van de druk en temperatuur is complex en afhankelijk van de geologische situatie ter plekke, maar bij benadering is het verloop lineair.

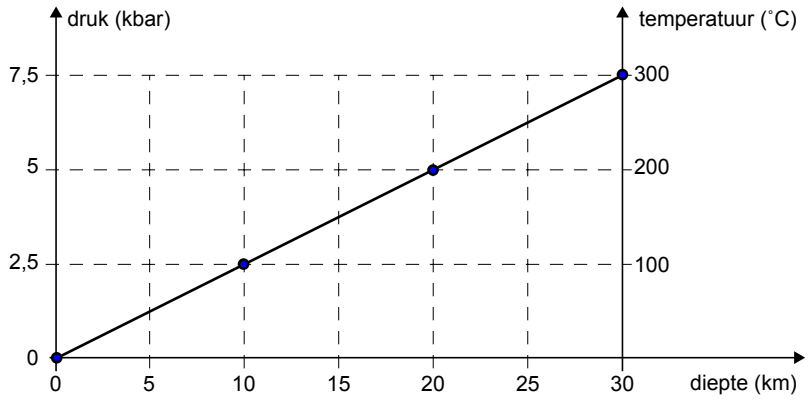
Bron: OU cursus Geologie rondom Plaattektoniek (Leinders, 1989)
Aandachtsgebied: Geologie

VOORBEELD 3.6
Toepassing: Lithostatische druk en geothermische gradiënt

Op een bepaalde plaats zijn metingen gedaan door boringen in de aardkorst tot 30 km diepte. Door deze boringen zijn de volgende gegevens bekend:

diepte d (km)	0	10	20	30
druk P (kbar)	0	2,5	5	7,5
temperatuur T (°C)	0	100	200	300

Deze gegevens zijn verwerkt in onderstaande grafiek, waarin de druk en de temperatuur op twee verschillende verticale assen zijn weergegeven. Voor elke waarde van de diepte op de horizontale as, leest u de waarde van de druk af op de linker as en de waarde van de temperatuur op de rechter as.



FIGUUR 3.6 De lithostatische druk en geothermische gradiënt in de aardkorst

OPGAVE 3.16

a Wat is volgens figuur 3.6 de druk op 15 km diepte? En wat is de temperatuur?
b Zijn de functies voor druk en temperatuur in figuur 3.6 stijgend of dalend? Wat is hiervan de geologische interpretatie?
c Bereken de richtingscoëfficiënten van beide grafieken. Wat is hiervan de geologische interpretatie?
d Wat is het domein van de functies in figuur 3.6? En wat is het bereik?
e Leidt de functievoorschriften af.

In figuur 3.6 gaat de grafiek van beide functies door de oorsprong (0, 0). Omdat de grafiek de verticale as snijdt in het punt (0, 0), geldt voor de standaardvorm $f(x) = ax + b$ dat b gelijk is aan 0, dus dat het functievoorschrift de vorm $f(x) = ax$ heeft.
Voor de temperatuur als functie van de diepte geldt hier $T = 10d$.
Voor de druk als functie van de diepte geldt hier $P = 0,25d$.

Recht evenredig
Evenredigheidsfactor

We zeggen dat de grootheden in deze voorbeelden *recht evenredig* zijn:
– de temperatuur is recht evenredig met de diepte met *evenredigheids-factor* 10,
– de druk is recht evenredig met de diepte met evenredigheidsfactor 0,25.

BOX 3.4
Toepassing: Energieverlies in huis

Een andere toepassing van lineaire functies is het beschrijven van energieverlies in huis. Er zijn in hoofdlijnen twee processen in energieverlies in huis: transmissie van warmte via muren, ramen en dak, en ventilatie door natuurlijke kieren en gaten en/of een ventilatiesysteem. Hier focussen we op de eerste: transmissie.

De totale transmissie van warmte Q via een muur (of raam of dak) van oppervlakte A wordt gegeven door de formule

$$Q = A \cdot \frac{\Delta T}{R}$$

Hierin is:
ΔT het verschil in buiten- en binnentemperatuur (°C)
R de totale thermische weerstand van de muur (m^2 °C/W)
A de oppervlakte (m^2).
Zonder in details te treden nemen we aan dat de totale waarde van de fractie A/R van een gemiddeld vrijstaand huis zo'n 200 W/°C bedraagt.

Bron: OU cursus Energy Analysis (Blok, 2006), OU cursus Natuurkunde voor milieuwetenschappen (van Belleghem, 2012), MacKay (2009)
Aandachtsgebied: Energiegebruik, Thermodynamica

OPGAVE 3.17

Als we in box 3.4 Q opvatten als een functie van het verschil tussen de binnentemperatuur en de buitentemperatuur (ΔT), dan volgt dat Q en ΔT recht evenredig zijn.

a Wat is dan de evenredigheidsconstante?

b Geef een functievoorschrift voor Q als functie van ΔT.

c In welke eenheid wordt de grootheid Q aangegeven?

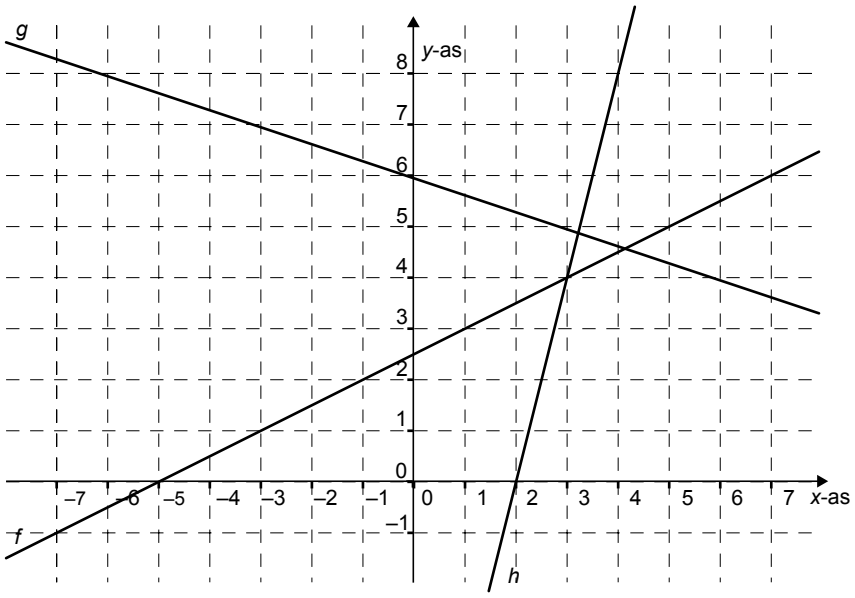
5 Snijpunten van grafieken

Bij eerstegraads functies is er vrijwel altijd één snijpunt, verderop in de cursus komen we ook functies tegen waarbij er meer snijpunten mogelijk zijn.

Bij het werken met functies is de vraag vaak voor welke invoerwaarde we een bepaalde uitvoerwaarde krijgen, of voor welke invoerwaarde twee functies dezelfde uitvoerwaarde geven. Het antwoord op dergelijke vragen vinden we door te kijken naar het snijpunt van een grafiek met een bepaalde horizontale lijn, of naar het snijpunt van twee grafieken. In deze paragraaf bespreken we het berekenen van de coördinaten van dergelijke snijpunten voor grafieken van eerstegraads functies. Dit doen we door het opstellen en oplossen van eerstegraads vergelijkingen. De techniek voor het oplossen van dergelijke vergelijkingen is besproken in leereenheid 1.

VOORBEELD 3.7

In figuur 3.7 ziet u de grafieken van de functies $f(x) = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$, $g(x) = -\frac{1}{3}x + 6$ en $h(x) = 4x - 8$.



FIGUUR 3.7 Drie lineaire functies

Het snijpunt van de grafieken van f en h is gemakkelijk af te lezen in figuur 3.7: (3, 4).
Dit kunnen we controleren door te berekenen:
$f(3) = \frac{1}{2} \cdot 3 + 2\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 4$ en $h(3) = 4 \cdot 3 - 8 = 12 - 8 = 4$.

De snijpunten van de grafiek van g met de grafiek van f en met de grafiek van h zijn niet zo gemakkelijk af te lezen in de grafiek. Om deze snijpunten te bepalen stellen we eerst vergelijkingen op.

cc BY NC ND

Voor het snijpunt van de grafieken van *f* en *g* zoeken we een invoerwaarde *x* waarvoor de uitvoerwaarden van beide functies gelijk zijn. Er geldt dus: $f(x) = g(x)$.
Als we in deze formule de functievoorschriften van *f* en *g* invullen, dan ontstaat de eerstegraads vergelijking

$$\tfrac{1}{2}x + 2\tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{3}x + 6$$

Voor het snijpunt van de grafieken van *g* en *h* zoeken we de invoerwaarde *x* waarvoor geldt $g(x) = h(x)$. Invullen van de functievoorschriften van *g* en *h* geeft dan de eerstegraads vergelijking

$$-\tfrac{1}{3}x + 6 = 4x - 8\,.$$

OPGAVE 3.18
Gegeven de functies *f*, *g* en *h* uit voorbeeld 3.7.
a Los de vergelijking $f(x) = g(x)$ op.
Controleer uw antwoord door $f(x)$ en $g(x)$ te berekenen voor de gevonden waarde van *x*.
b Los de vergelijking $g(x) = h(x)$ op.
Controleer uw antwoord door $g(x)$ en $h(x)$ te berekenen voor de gevonden waarde van *x*.

VOORBEELD 3.7 *(vervolg)*

Het snijpunt van de grafiek van *f* met de *x*-as is ook gemakkelijk af te lezen: dat is het punt (–5, 0).
Dit kunnen we controleren door te berekenen:
$f(-5) = \tfrac{1}{2}\cdot(-5) + 2\tfrac{1}{2} = -2\tfrac{1}{2} + 2\tfrac{1}{2} = 0$.

Het snijpunt van de grafiek van *g* met de *x*-as is niet af te lezen in de grafiek. Om dit snijpunt te vinden, moeten we de waarde van *x* vinden waarvoor geldt $g(x) = 0$.
Dit leidt tot de eerstegraads vergelijking $-\tfrac{1}{3}x + 6 = 0$.

OPGAVE 3.19
Los de vergelijking $g(x) = 0$ op en controleer uw antwoord door $g(x)$ uit te rekenen voor de gevonden waarde van *x*.

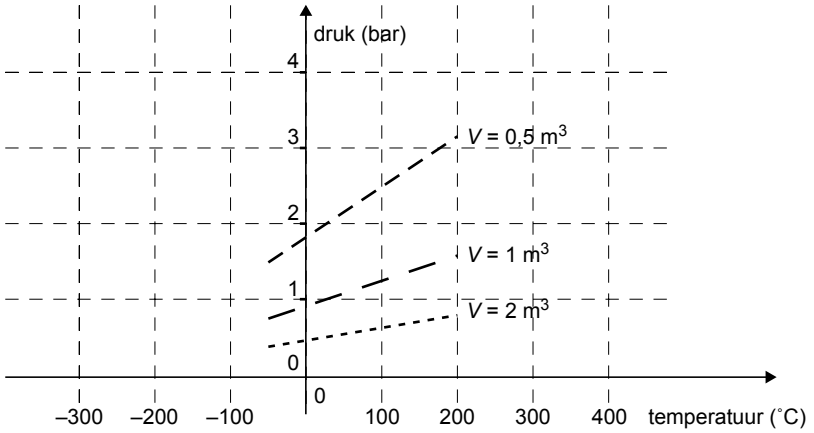
OPGAVE 3.20
In deze opgave bekijken we de functie $h(x) = 4x - 8$.
a Los op: $h(x) = 0$.
b Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van *h* met de lijn $y = 5$.
c Controleer uw antwoorden op de manier van opgave 3.18.
d Hoe kunt u uw antwoorden controleren in figuur 3.7?

BOX 3.5
Toepassing: De ideale gaswet en het absolute nulpunt

In paragraaf 2.4 hebben we al uitgebreid stilgestaan bij de ideale gaswet bij een constante temperatuur.
Boyle onderzocht ook het verband tussen druk en volume van een hoeveelheid gas bij verschillende, constante temperaturen. Telkens vond hij dat de relatie $P \cdot V$ = constant gold, maar de waarde van de constante was afhankelijk van de temperatuur. Uitgebreidere proeven, onder andere door Gay-Lussac, toonden aan dat er tussen de waarde van de constante en de temperatuur een lineair verband bestond. Figuur 3.8 geeft enige resultaten van zulke metingen. Het bleek dat bij constant volume de druk-temperatuur-grafieken rechte lijnen waren. Maar bovendien bleek nog een ander belangrijk feit: bij extrapolatie naar druk nul bleek deze druk altijd bij dezelfde temperatuur op te treden,

onafhankelijk van de hoeveelheid gas en van het soort gas! Deze temperatuur moest wel een zeer bijzondere waarde zijn. Omdat een gas met negatieve druk niet voorstelbaar is, moest dit de laagst mogelijke temperatuur, het *absolute nulpunt* zijn!

Bron: OU Cursus Natuurkunde (Swithenby, 1987)
Aandachtsgebied: Thermodynamica



FIGUUR 3.8 Druk als functie van de temperatuur bij gelijkblijvend volume voor drie volumes

Opmerking 1

Extrapoleren = verlengen van de grafiek tot buiten het domein van de metingen waarop de grafiek gebaseerd is. Bij het maken van berekeningen nemen we dan aan dat het functievoorschrift ook buiten dit domein geldig blijft. In dit geval gaat het om temperaturen buiten het domein waarin de proeven uitgevoerd zijn, dus buiten het interval $-50 \leq T \leq 200$.

Opmerking 2

De eenheid voor temperatuur is niet graden Celcius of graden Fahrenheit, maar kelvin (K, dus zonder graden). Deze is gebaseerd op het hier besproken absolute nulpunt.

VOORBEELD 3.8
Toepassing: De ideale gaswet en het absolute nulpunt

We bekijken weer het vat van voorbeeld 2.12. Het vat wordt telkens in verschillende situaties geprepareerd met constante volumes van respectievelijk 1, ½, en 2 m^3. Bij elke situatie wordt voor verschillende waarden van de temperatuur (in het domein van –50 tot 200 graden Celsius) de druk gemeten. Zie figuur 3.8.

OPGAVE 3.21
In box 3.5 hebben we gezien dat het product $P \cdot V$ bij gelijkblijvende temperatuur constant is. De waarde van deze constante is een lineaire functie van de temperatuur. Gegeven de standaardvorm van lineaire functies moet dus gelden: $P \cdot V = aT + b$, met *a* en *b* nog onbekende constanten.
Voor de temperatuur $T = 0°C$ zijn voor drie situaties de waarden voor de druk gegeven:

volume (in m^3)	1	2	3
druk (bar)	0,910	0,455	0,303

a Verifieer dat de waarde van het product $P \cdot V$ constant is. Hoe groot is deze constante?
Voor de temperatuur $T = 27°C$ was het verband tussen *P* en *V* al bekend. Er gold exact $P = 1/V$.
b Toon aan dat uit bovenstaande volgt dat in $P \cdot V = aT + b$ geldt:
$a = \frac{1}{300}$ en $b = \frac{273}{300}$.

Opmerking
Als we zoals in de tabel de waarde van a afronden op drie cijfers achter de komma, krijgen we een te grote afrondingsfout.

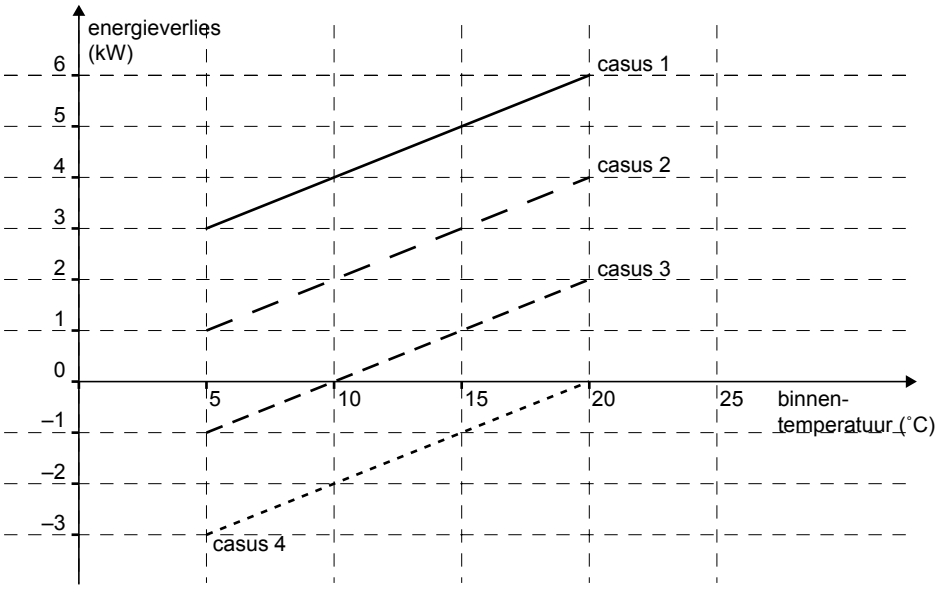
c Geef het functievoorschrift voor de functie $T \to P$ als $V = 1\,m^3$.
d Geef dit functievoorschrift ook voor het geval dat $V = 2\,m^3$.
e Bij welke temperatuur is de druk voor beide situaties gelijk? En bij welke waarde van de druk treedt deze situatie op?
f Verifieer dat ook voor $V = 0,5\,m^3$ de situatie het bij e gevonden getallenpaar (*P*, *T*) aan het bijbehorende functievoorschrift $T \to P$ voldoet.
g Wat is de fysische interpretatie van het bij e gevonden getallenpaar?

6 Eerstegraads ongelijkheden

In deze paragraaf bespreken we hoe eerstegraads ongelijkheden tot stand komen en laten we zien hoe deze zowel grafisch (met behulp van de grafiek) als algebraïsch (met alleen een berekening) kunnen worden opgelost. Als introductie komen we terug op de toepassing *Energieverlies in huis*, die we aan het eind van paragraaf 4 besproken hebben (zie box 3.4).

VOORBEELD 3.9
Toepassing: Energieverlies in huis

Op basis van de informatie in box 3.4 kunnen we bij iedere waarde van de buitentemperatuur een functie maken die het energieverlies geeft als functie van de binnentemperatuur T_{in}. In figuur 3.9 zijn de grafieken van deze functies getekend voor vier mogelijke buitentemperaturen T_{uit}.



FIGUUR 3.9 Verband tussen energieverlies van een huis Q als functie van de binnentemperatuur T_{in} voor een aantal buitentemperaturen T_{uit}

OPGAVE 3.22

Bekijk de grafieken in figuur 3.9.

a Het domein is voor alle functies hetzelfde. Wat is dit domein?

b Ook de richtingscoëfficiënt is voor alle functie dezelfde. Wat is de waarde van deze coëfficiënt?

c Het bereik is voor alle functies verschillend. Wat is, bijvoorbeeld, het bereik van de functie van casus 1?

d De functies van casus 3 en 4 snijden de horizontale as bij verschillende waarden van de binnentemperatuur. Wat is de fysische interpretatie van deze waarde?

e Bepaal de buitentemperatuur voor casus 3 en 4.

f Bepaal het functievoorschrift voor casus 3.

g Het is buiten 0 °C als u besluit de thermostaat een graadje hoger te zetten. Hoeveel extra energieverlies levert dat op? Hoeveel spaarlampen van 6 W kunnen daar op branden?

VOORBEELD 3.9 *(vervolg)*

Bij de derde casus is de waarde van Q voor een deel van de grafiek positief en voor een ander deel negatief. In opgave 3.22f hebben we het functievoorschrift voor Q als functie van T_{in} gevonden: $Q = 0,2T_{in} - 2$. De vraag 'voor welke waarden van T_{in} is het energieverlies positief?' leidt dan tot de *ongelijkheid* $0,2T_{in} - 2 > 0$.

Ongelijkheid

De oplossing van deze ongelijkheid kunnen we direct aflezen in de grafiek:

Voor $T_{in} = 10$ geldt $Q = 0$; voor $T_{in} > 10$ geldt $Q > 0$.

OPGAVE 3.23

Voor welke waarden van T_{in} geldt in casus 3 dat $Q < 0$?

Wat is de natuurkundige interpretatie van een negatief energieverlies?

Wat is in de derde casus de buitentemperatuur?

De algemene oplossingsmethode voor een ongelijkheid van de vorm $f(x) < g(x)$, $f(x) \le g(x)$, $f(x) > g(x)$ of $f(x) \ge g(x)$ is gebaseerd op dezelfde overwegingen als in voorbeeld 3.9.

cc BY NC ND

De eerste stap van de oplossing is het oplossen van de vergelijking $f(x) = g(x)$, waarmee de snijpunten van de grafieken van *f* en *g* bekend zijn.

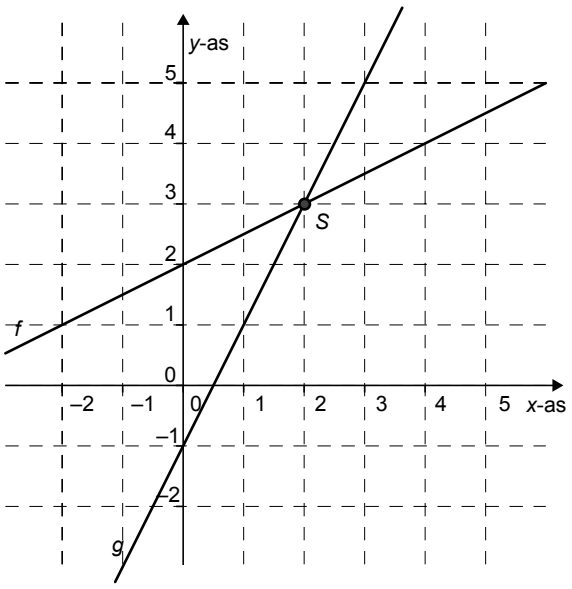
De tweede stap is het tekenen van de grafieken van *f* en *g*, met daarin die snijpunten.

De derde stap is dan om in de grafiek te kijken waar *f* kleiner (of groter) is dan *g*.

VOORBEELD 3.10 Los op: $\frac{1}{2}x + 2 > 2x - 1$.

Stap 1:
Los op: $\frac{1}{2}x + 2 = 2x - 1 \Leftrightarrow x + 4 = 4x - 2 \Leftrightarrow -3x = -6 \Leftrightarrow x = 2$.
Controle: $\frac{1}{2} \cdot 2 + 2 = 3$ en $2 \cdot 2 - 1 = 3$.

Stap 2:
Teken de grafieken van de functies $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ en $g(x) = 2x - 1$ in één figuur.
Merk op dat we van beide grafieken al direct twee punten weten:
De grafiek van *f* gaat door het snijpunt *S*(2, 3) en door het punt (0, 2); de grafiek van *g* gaat het snijpunt *S*(2, 3) en door het punt (0, –1).



FIGUUR 3.10 De grafieken van $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ en $g(x) = 2x - 1$ met snijpunt *S*(2, 3)

Stap 3:
Links van het snijpunt ligt de grafiek van *f* boven die van *g*. Voor $x < 2$ geldt dus $f(x) > g(x)$.
Rechts van het snijpunt ligt de grafiek van *f* onder die van *g*. Voor $x > 2$ geldt dus $f(x) < g(x)$.
De oplossingen van de ongelijkheid $\frac{1}{2}x + 2 > 2x - 1$ zijn dus de waarden van *x* met $x < 2$, ofwel het interval $\langle \leftarrow, 2 \rangle$.

OPGAVE 3.24
Los de ongelijkheid $3x-4 \geq 4x-3$ op met de methode van voorbeeld 3.10.
Dat wil zeggen:
a Los de vergelijking $3x-4=4x-3$ op.
b Teken de grafieken van de functies $f(x)=3x-4$ en $g(x)=4x-3$ in één assenstelsel en markeer het gevonden snijpunt in deze figuur.
c Lees de oplossingen van de ongelijkheid af in de figuur.
NB: De x-waarde van het snijpunt is nu ook een oplossing van de ongelijkheid.

OPGAVE 3.25
Los de volgende ongelijkheden op de manier van voorbeeld 3.10 op:
a $3x-2<x+4$
b $2x+5 \geq 18x-20$

Het oplossen van ongelijkheden met behulp van grafieken wordt *grafisch* oplossen van ongelijkheden genoemd. Eerstegraads ongelijkheden kunnen ook *algebraïsch* worden opgelost, dat wil zeggen alleen met een berekening. De stappen daarbij zijn exact dezelfde stappen die we nemen bij het oplossen van een eerstegraads vergelijking. Er is alleen een valkuil: als we links en rechts met een negatief getal vermenigvuldigen of door een negatief getal delen, dan 'klapt' het 'teken' van de ongelijkheid 'om'.

Kijk maar eens naar de ongelijkheid $-4x>8$.
Links door –4 delen geeft x, rechts door –4 delen geeft –2.
De oplossing van de ongelijkheid is echter $x<-2$ en niet $x>-2$.
Dit kunt u controleren door zowel enkele getallen groter dan –2 als enkele getallen kleiner dan –2 in te vullen in de ongelijkheid $-4x>8$.
Alleen getallen kleiner dan –2 maken de ongelijkheid waar.

VOORBEELD 3.11
Gegeven de ongelijkheid $3x-4 \geq 4x-3$
Links en rechts 4 optellen geeft: $3x \geq 4x+1$
Links en rechts $4x$ aftrekken geeft: $-x \geq 1$
Als we nu links en rechts delen door of, wat op hetzelfde neerkomt, vermenigvuldigen met –1, moeten we ook de richting van het ongelijkheidsteken omklappen.
Dit geeft: $x \leq -1$
Precies de oplossing die u als het goed is in opgave 3.24 gevonden heeft.

OPGAVE 3.26
Los de ongelijkheden uit voorbeeld 3.10 en opgave 3.25 ook algebraïsch op.

7 Meer over rechte lijnen

We hebben gezien dat de grafiek van een eerstegraads functie een rechte lijn is. Voor alle punten op deze rechte lijn geldt dat $y=f(x)$, ofwel $y=ax+b$.
Dit is een voorbeeld van een *eerstegraads vergelijking in twee variabelen*.

De meest algemene vorm van een eerstegraads vergelijking in twee variabelen is $mx+ny=c$.
Beide vormen kunnen we in elkaar overzetten door het toepassen van de toegestane stappen die voor alle vergelijkingen gelden.

cc BY NC ND

VOORBEELD 3.12 De vergelijking $y = -2x + 3$ herschrijven we door links en rechts van het =-teken de term $2x$ op te tellen. Zo krijgen we $2x + y = 3$.
Dit is een vergelijking van de vorm $mx + ny = c$ met $m = 2$, $n = 1$ en $c = 3$.

VOORBEELD 3.13 De vergelijking $2x + 3y = 6$ herschrijven we door de toegestane stappen als volgt toe te passen:

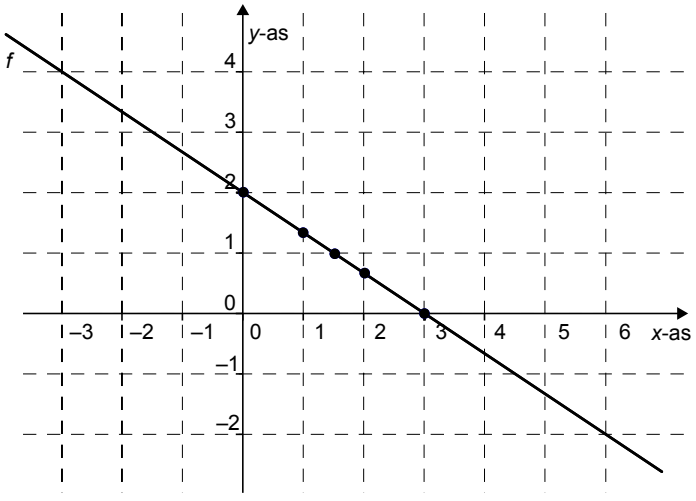
De vergelijking was: $2x + 3y = 6$
Links en rechts $2x$ aftrekken geeft: $3y = 6 - 2x$

Links en rechts door 3 delen geeft dan: $y = \frac{6 - 2x}{3}$ ofwel $y = 2 - \frac{2}{3}x$

Dit is een vergelijking van de vorm $y = ax + b$ met $a = -\frac{2}{3}$ en $b = 2$.

Tussen eerstegraads vergelijkingen in één variabele en eerstegraads vergelijkingen in twee variabelen zit een belangrijk verschil. Een vergelijking als $2x + 3 = 6$ heeft maar één oplossing (namelijk $x = 1\frac{1}{2}$), terwijl een vergelijking als $2x + 3y = 6$ heel veel oplossingen heeft. We kunnen deze vergelijking immers omwerken naar $y = 2 - \frac{2}{3}x$ en deze vergelijking kunnen we opvatten als het functievoorschrift van de functie $f(x) = 2 - \frac{2}{3}x$. Zo kunnen we bij iedere waarde van x een bijbehorende waarde van y vinden die samen een oplossing van de vergelijking vormen.

Net als bij functies noteren we de oplossingen als geordende getallenparen (x, y). Op die manier vinden we dat de paren (0, 2), (1, $1\frac{1}{3}$), ($1\frac{1}{2}$, 1), (2, $\frac{2}{3}$) en (3, 0) allemaal oplossingen zijn van de vergelijking $2x + 3y = 6$. Maar er zijn nog veel meer oplossingen. Voor iedere waarde van x is er immers een passende y-waarde. Om toch een beeld te krijgen van alle oplossingen, kunnen we de gevonden oplossingen tekenen als punten in een assenstelsel en dan kijken we of we een patroon herkennen. Zo krijgen we uiteraard de grafiek van de functie $f(x) = 2 - \frac{2}{3}x$ en daarvan weten we al dat het een rechte lijn is.



FIGUUR 3.11 De grafiek van de functie $f(x) = 2 - \frac{2}{3}x$, ofwel de rechte lijn met vergelijking $2x + 3y = 6$

Alle oplossingen van de vergelijking $2x + 3y = 6$ liggen op de rechte lijn in figuur 3.11 en omgekeerd zijn alle punten op de rechte lijn in figuur 3.11 een oplossing van de vergelijking $2x + 3y = 6$.

OPGAVE 3.27

Gegeven de vergelijking $2x + 3y = 6$ en de functie $f(x) = 2 - \frac{2}{3}x$.

a Bereken nog een aantal oplossingen van de vergelijking $2x + 3y = 6$ door $f(x)$ uit te rekenen voor een aantal waarden van x. Neem daarbij ook negatieve waarden van x.

b Controleer dat de bijbehorende punten op de rechte lijn in figuur 3.11 liggen.

c Ga na dat het punt $(6, -2)$ op de rechte lijn in figuur 3.11 ligt.

d Controleer dat het getallenpaar $(6, -2)$ een oplossing is van de vergelijking $2x + 3y = 6$ door $x = 6$ en $y = -2$ in te vullen in deze vergelijking.

OPGAVE 3.28

Gegeven de vergelijking $2x + 5y = 15$.

a Vul $x = 0$ in in de vergelijking. Welke waarde van y hoort hier bij?

b Vul $y = 0$ in in de vergelijking. Welke waarde van x hoort hier bij?

c Zet de vergelijking om in de vorm $y = ax + b$.

d Bereken nog enkele oplossingen van deze vergelijking.

e Teken de gevonden oplossingen in als punten in een assenstelsel en teken daarin de lijn met vergelijking $2x + 5y = 15$.

Bovenstaande redenering kunnen we toepassen op vrijwel iedere vergelijking van de vorm $mx + ny = c$. Op de manier van voorbeeld 3.13 volgt:

$$mx + ny = c \Leftrightarrow ny = c - mx \Leftrightarrow y = \frac{c - mx}{n} \Leftrightarrow y = \frac{c}{n} - \frac{mx}{n} \Leftrightarrow y = -\frac{m}{n}x + \frac{c}{n}$$

Zo zien we dat we de vergelijking $mx + ny = c$ kunnen opvatten als het functievoorschrift van de functie $f(x) = -\frac{m}{n}x + \frac{c}{n}$. De grafiek van deze functie is, zoals we gezien hebben, een rechte lijn.

De uitdrukking $mx + ny = c$ is zodoende de vergelijking van een rechte lijn, namelijk van de grafiek van de functie $f(x) = -\frac{m}{n}x + \frac{c}{n}$.

Twee bijzondere rechte lijnen krijgen we als we $m = 0$ of $n = 0$ invullen in de formule $mx + ny = c$.

Met $m = 0$ vinden we $0 \cdot x + ny = c \Leftrightarrow ny = c \Leftrightarrow y = \frac{c}{n}$.

Voor een oplossing van deze vergelijking geldt dat x alle mogelijke waarden kan hebben, alleen y ligt vast. Punten die hieraan voldoen liggen naast elkaar in een assenstelsel. De oplossingen vormen dus de *horizontale rechte lijn* met vergelijking $y = \frac{c}{n}$. Dit is de grafiek van de constante functie $f(x) = \frac{c}{n}$.

Horizontale rechte lijn

Als bovendien $c = 0$ krijgen we de vergelijking $y = 0$. Dit is de vergelijking van de x-as.

Vergelijking x-as: y = 0

$n = 0$ geeft $mx + 0 \cdot y = c \Leftrightarrow mx = c \Leftrightarrow x = \frac{c}{m}$.

Voor een oplossing van deze vergelijking geldt dat y alle mogelijke waarden kan hebben, alleen x ligt vast. Punten die hieraan voldoen liggen recht onder en boven elkaar in een assenstelsel. De oplossingen vormen dus de *verticale rechte lijn* met vergelijking $x = \frac{c}{m}$.

Verticale rechte lijn

Als bovendien $c = 0$ krijgen we de vergelijking $x = 0$.

Vergelijking y-as: x = 0

Dit is de vergelijking van de y-as.

Verticale rechte lijnen zijn de enige rechte lijnen die niet kunnen worden opgevat als het functievoorschrift van een functie $x \to y$. Voor de punten op de lijn $x = c$ is maar één x-waarde mogelijk maar zijn alle y-waarden toegestaan.

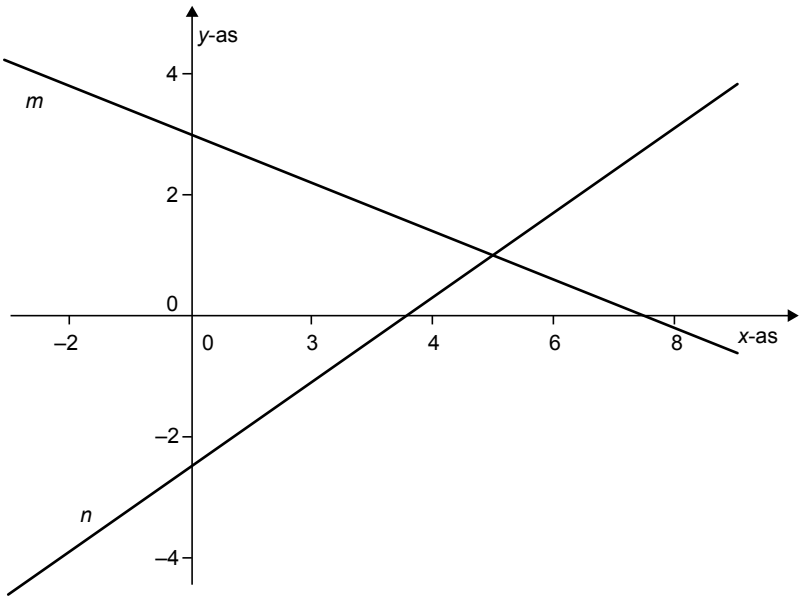
CC BY NC ND

OPGAVE 3.29
Gegeven de vergelijking $x = 4$.
a Noteer 4 punten die aan deze vergelijking voldoen (*x*-waarde én *y*-waarde) en teken deze in een assenstelsel. Teken ook de rechte lijn door deze punten.
b Doe hetzelfde voor de vergelijking $y = 2$.

OPGAVE 3.30
Waarom kan de vergelijking $mx + ny = c$ niet in de vorm $y = -\frac{m}{n}x + \frac{c}{n}$ geschreven worden als $n = 0$?

Het snijpunt van twee rechte lijnen waarvan de vergelijking niet in de vorm van een functievoorschrift staat, kan op verschillende manieren bepaald worden.

VOORBEELD 3.14 In figuur 3.12 ziet u de rechte lijnen *m* en *n* met vergelijkingen $2x + 5y = 15$ resp. $7x - 10y = 25$.



FIGUUR 3.12 De lijnen *m en n* met vergelijkingen $2x + 5y = 15$ respectievelijk $7x - 10y = 25$

Om de coördinaten van het snijpunt te vinden, moeten we de waarden van *x* en *y* vinden die aan beide vergelijkingen voldoen.
Stelsel vergelijkingen We zoeken dus de oplossing van het *stelsel vergelijkingen*

$$\begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ 7x - 10y = 25 \end{cases}$$

Eén methode om het stelsel uit voorbeeld 3.14 op te lossen begint met het omwerken van de beide vergelijkingen tot de vorm $y = ax + b$.

Dit geeft $\begin{cases} y = -\frac{2}{5}x + 3 \\ y = \frac{7}{10}x - 2\frac{1}{2} \end{cases}$

Hieruit volgt dat $-\frac{2}{5}x+3$ gelijk moet zijn aan $\frac{7}{10}x-2\frac{1}{2}$.
Nu kunnen we de waarde van x berekenen door de vergelijking $-\frac{2}{5}x+3=\frac{7}{10}x-2\frac{1}{2}$ op te lossen.
Vervolgens vinden we de waarde van y door de gevonden waarde van x in te vullen in één van de vergelijkingen.

Voor stelsels vergelijkingen van de vorm

$$\begin{cases} 2x+5y=15 \\ 7x-10y=25 \end{cases}$$

Eliminatiemethode

is de *eliminatiemethode* vaak sneller.
Om deze methode toe te kunnen passen bij dit stelsel vermenigvuldigen we alle termen van de bovenste vergelijking met 2.

Zo krijgen we

$$\begin{cases} 4x+10y=30 \\ 7x-10y=25 \end{cases}$$

Tel nu de beide vergelijkingen bij elkaar op, dan krijgen we $(4x+7x)+(10y-10y)=(30+25)$.
We houden dan over: $11x=55$. Door deze actie hebben we de variabele *y geëlimineerd*.
Nu volgt $x=5$ en uit $2x+5y=15$ volgt dan
$2\cdot 5+5y=15 \Leftrightarrow 10+5y=15 \Leftrightarrow 5y=5 \Leftrightarrow y=1$.
Het snijpunt van de lijnen *m* en *n* uit voorbeeld 3.14 is dus het punt (5, 1).

OPGAVE 3.31
Controleer dat het getallenpaar (5, 1) inderdaad een oplossing is van de beide vergelijkingen uit voorbeeld 3.14.

OPGAVE 3.32
Het stelsel

$$\begin{cases} 2x+5y=15 \\ 7x-10y=25 \end{cases}$$

kan ook worden opgelost door de bovenste vergelijking te vermenigvuldigen met 7 en de onderste met 2. De resulterende vergelijkingen moeten term voor term van elkaar worden afgetrokken om de variabele x te elimineren.
Los het stelsel ook op deze manier op.

OPGAVE 3.33
Los op met de eliminatiemethode:

a $\begin{cases} -2x+3y=5 \\ 4x+5y=8 \end{cases}$ b $\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 3x+2y=13 \end{cases}$

OPGAVE 3.34
Gegeven de stelsels vergelijkingen (i) $\begin{cases} -2x+3y=-6 \\ 4x-6y=24 \end{cases}$ en (ii) $\begin{cases} -2x+3y=-6 \\ 4x-6y=12 \end{cases}$

a Ga na dat de eliminatiemethode niet werkt voor deze stelsels.
b Schrijf alle vergelijkingen in deze stelsels in de vorm $y=ax+b$.
c Hoeveel oplossingen heeft stelsel (i)?
En hoeveel oplossingen heeft stelsel (ii)?

Strijdig stelsel

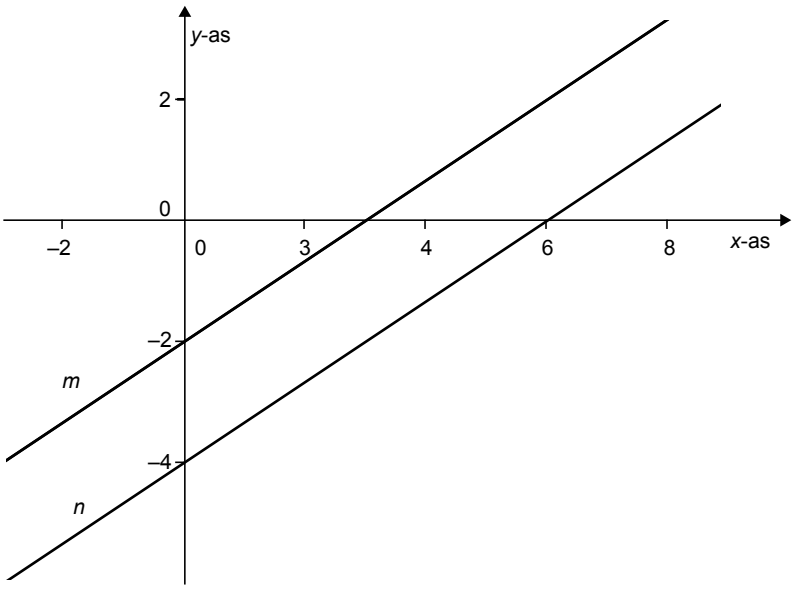
Het stelsel $\begin{cases} -2x+3y=-6 \\ 4x-6y=24 \end{cases}$ is een voorbeeld van een *strijdig stelsel*.

Aan het antwoord van opgave 3.34b kunt u zien dat de rechte lijnen met de vergelijkingen $-2x+3y=-6$ en $4x-6y=24$ beide dezelfde richtingscoëfficiënt hebben, maar dat de eerste door het punt (0, –2) gaat, terwijl de tweede door het punt (0, –4) gaat. Deze twee rechte lijnen hebben dus geen snijpunt (zie figuur 3.13).

Identiek stelsel

Het stelsel $\begin{cases} -2x+3y=-6 \\ 4x-6y=12 \end{cases}$ is een voorbeeld van een *identiek stelsel*.

In opgave 3.34b hebt u als het goed is gezien dat hier in wezen twee keer dezelfde vergelijking staat. Alle punten op de rechte lijn met deze vergelijking zijn oplossing van dit stelsel.



FIGUUR 3.13 m is de lijn met vergelijking $-2x+3y=-6$ ofwel $4x-6y=12$; n is de lijn met vergelijking $4x-6y=24$

Samenvatting

Eerstegraads functies

Een functie met een functievoorschrift van de vorm $f(x)=ax+b$ heet een *eerstegraads functie*.
De grafiek van zo'n functie is een rechte lijn, daarom worden eerstegraads functies ook *lineaire* functies genoemd.

De richtingscoëfficiënt

De *richtingscoëfficiënt a* geeft de richting van de grafiek aan.
De grootte van a geeft aan hoe steil de grafiek loopt; als $a>0$ is de grafiek stijgend en als $a<0$ is de grafiek dalend. De grafiek snijdt de y-as in het punt $(0, b)$.
Als de richtingscoëfficiënt van twee eerstegraads functies gelijk is, dan lopen hun grafieken *evenwijdig*. In de formule $y=ax+b$ kan a ook gezien worden als het aantal eenheden waarmee de uitvoervariabele y toeneemt als de invoervariabele x met één eenheid toeneemt. Als $a<0$ neemt de uitvoervariabele af als de invoervariabele toeneemt (afname = negatieve toename).

Constante functies

Als $a = 0$ heeft de functie een functievoorschrift van de vorm $f(x) = b$. Deze *constante functie* is formeel geen eerstegraads functie, maar wel een lineaire functie: de grafiek is een horizontale rechte lijn.

Evenredige grootheden

Als $b = 0$, dan geldt $f(x) = ax$ en $f(0) = 0$, dus gaat de grafiek door de oorsprong (0, 0).
Grootheden waarvan het verband wordt beschreven met een functie van de vorm $f(x) = ax$ heten *recht evenredig* met *evenredigheidsfactor a*.

Opstellen van een functievoorschrift

Als we twee punten op de grafiek van een eerstegraads functie kennen, zeg $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$, kunnen we de richtingscoëfficiënt berekenen met de formule

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Het maakt daarbij niet uit welke twee punten op de grafiek we nemen.
Voor het bepalen van de constante b uit de formule $f(x) = ax + b$ zijn er twee mogelijkheden:
– Lees het snijpunt met de y-as af; b is de y-coördinaat van dit snijpunt.
– Vul a en de coördinaten van één van de punten A of B in in de formule $y = ax + b$ en bereken vervolgens b.

Snijpunten

De snijpunten van de grafieken van twee functies f en g bepalen we door het gelijkstellen van de functievoorschriften. Zo krijgen we de vergelijking $f(x) = g(x)$. Als f en g beide eerstegraads functies zijn, is dit een *eerstegraads vergelijking*. De oplossing van deze vergelijking is de x-coördinaat van het snijpunt. De y-coördinaat van het snijpunt vinden we door $f(x)$ en/of $g(x)$ te berekenen voor de gevonden waarde van x.
Het snijpunt van de grafiek van een functie f met een horizontale rechte lijn $y = p$ bepalen we door de vergelijking $f(x) = p$ op te lossen.

Eerstegraads ongelijkheden

Een *ongelijkheid* als $-\frac{2}{5}x + 3 \le 1\frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3}$ kunnen we op twee manieren oplossen.
De *grafische* methode bestaat uit 3 stappen:
Stap 1: Los de vergelijking $-\frac{2}{5}x + 3 = 1\frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3}$ op
(*oplossing:* $x = 2\frac{1}{2}$ *)*
Stap 2: Teken de grafieken van de functies $f(x) = -\frac{2}{5}x + 3$ en $g(x) = 1\frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3}$ in één figuur
Stap 3: Lees de oplossingen af uit de grafieken
(de grafiek van f ligt rechts van $x = 2\frac{1}{2}$ *onder de grafiek van g, dus oplossing* $x \ge 2\frac{1}{2}$ *).*

Algebraïsche methode

Bij de *algebraïsche* methode gebruiken we dezelfde stappen als bij het oplossen van de vergelijking $-\frac{2}{5}x + 3 = 1\frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3}$. Als we daarbij delen door of vermenigvuldigen met een negatief getal klapt het teken van de ongelijkheid om:
$-\frac{2}{5}x + 3 \le 1\frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3} \Leftrightarrow -6x + 45 \le 20x - 20 \Leftrightarrow -26x \le -65 \Leftrightarrow x \ge 2\frac{1}{2}$.

De vergelijking van een rechte lijn

De formule $mx + ny = c$ is een *eerstegraads vergelijking in twee variabelen*.
De oplossingen van de vergelijking $mx + ny = c$ zijn getallenparen (x, y).
Als we deze tekenen als punten in een assenstelsel, dan liggen deze punten alle op één rechte lijn.
Omgekeerd zijn alle punten op deze lijn een oplossing van de vergelijking.

cc BY NC ND

Als $m = 0$ loopt deze lijn *horizontaal*. We kunnen de vergelijking dan schrijven als $y = \frac{c}{n}$.
Als $n = 0$ loopt deze lijn *verticaal*. Dan kunnen we de vergelijking schrijven als $x = \frac{c}{m}$.
Als $n \neq 0$ kunnen we de vergelijking $mx + ny = c$ schrijven in de vorm $y = ax + b$ met $a = -\frac{m}{n}$ en $b = \frac{c}{n}$. Dit is de vergelijking van de grafiek van de functie $f(x) = ax + b$.

Het snijpunt van twee rechte lijnen waarvan de vergelijking in de vorm $mx + ny = c$ staat kunnen we bepalen door een *stelsel van twee vergelijkingen in twee variabelen* op te lossen. Dit kan door beide vergelijkingen om te schrijven tot de vorm $y = ax + b$ en vervolgens de uitdrukkingen rechts van het =-teken aan elkaar gelijk te stellen, maar meestal werkt de *eliminatiemethode* sneller.

ZELFTOETS

1 Bereken van de volgende functies de uitvoerwaarden voor $x = 1$, $x = 3$ en $x = -1$ en teken de grafieken van deze functies in één figuur.
a $f(x) = 2x - 1$
b $g(x) = 4 - \frac{1}{2}x$
c $h(x) = 2$

2 a Lees de coördinaten van het snijpunt $S(x_S, y_S)$ van de functies *f* en *g* uit opgave 1 af.
b Controleer dat geldt $f(x_S) = g(x_S) = y_S$.
c Lees ook de snijpunten van de grafieken van *f* en *h* en van de grafieken van *g* en *h* af en controleer de gevonden coördinaten op de manier van vraag b.
d Bepaal het snijpunt van de grafiek van *g* met de *x*-as door het opstellen en oplossen van een vergelijking.

3 Stel een functievoorschrift op voor de functies met de volgende rechte lijnen als grafiek:
a door (0, 3) met richtingscoëfficiënt $-\frac{2}{3}$;
b door (0, 3) en (6, 0);
c door (2, 1) en (5, 7);
d door (–1, 1) en (4, $4\frac{1}{2}$);
e door (3, 2) met richtingscoëfficiënt 3;
f door (3, 2) met richtingscoëfficiënt $-\frac{2}{3}$.

4 a Van welke functies in opgave 1 en 3 is de grafiek stijgend?
En van welke is de grafiek dalend?
b Hoe kunnen de antwoorden op bovenstaande vragen afgeleid worden uit de functievoorschriften?
c Welk van de grafieken in opgave 1 en 3 loopt het steilst?

5 Gegeven de functies $f(x) = \frac{1}{4}x + 7$ en $g(x) = 2x - 14$.
a Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van *f* en *g*.
b Los op: $f(x) - g(x) = 28$.

6 Gebruik de grafieken die u in opgave 1 gemaakt heeft om de volgende ongelijkheden grafisch op te lossen:
a $2x - 1 > 4 - \frac{1}{2}x$
b $4 - \frac{1}{2}x \leq 2$

7 Los algebraïsch op:
a $x+3>7x-5$
b $\frac{1}{3}x-7\leq\frac{1}{2}x+5$
c $5(x+4)\geq 3x+25$

8 Gegevens zijn de rechte lijnen met vergelijkingen $2x+5y=15$ en $4x-3y=4$. Het snijpunt kan worden gevonden door beide vergelijkingen eerst in de vorm $y=ax+b$ te schrijven.
a Werk beide vergelijkingen om tot deze vorm.
b Bepaal het snijpunt.

9 De vergelijking van een rechte lijn kan ook worden gevonden door het opstellen en oplossen van een stelsel vergelijkingen. Voor de rechte lijn door de punten (2, 5) en (4, –1) gaat dit als volgt:
– De vorm van de vergelijking is $y=ax+b$.
– Omdat het punt (2, 5) op de lijn ligt, moet gelden: $5=a\cdot 2+b$.
– Omdat het punt (4, –1) op de lijn ligt, moet ook gelden: $-1=a\cdot 4+b$.
– Zo krijgen we het stelsel $\begin{cases}2a+b=5\\4a+b=-1\end{cases}$

Bepaal de waarden van a en b door dit stelsel op te lossen.
Controleer dat de punten (2, 5) en (4, –1) inderdaad voldoen aan de vergelijking die u zo krijgt.

10 Gegeven de punten $A(2, 3)$, $B(3, -2)$ en $C(3, 3)$.
a Stel een vergelijking op voor de rechte lijn door de punten A en B.
b Stel ook een vergelijking op voor de rechte lijn door de punten A en C en van de rechte lijn door de punten B en C.
c Wat is er speciaal aan de rechte lijnen uit vraag b? Wat kunt u zeggen over de richtingscoëfficiënt van elk van deze lijnen?

cc BY NC ND

Tweedegraads functies

Introductie 115

Leerkern *115*

1 De parabool $y = x^2$ *115*
2 De grafiek van een tweedegraads functie *117*
3 Domein en bereik *120*
4 Snijpunten van een rechte lijn en een parabool *123*
5 Snijpunten van twee parabolen *125*
6 Tweedegraads ongelijkheden *128*

Samenvatting *132*

Zelftoets *133*

CC BY NC ND

Leereenheid 4

Tweedegraads functies

INTRODUCTIE

In leereenheid 2 hebt u kennisgemaakt met de functies $H(t) = 45 - 5t^2$ en $H(t) = 45 + 12\frac{1}{2}t - 5t^2$. Omdat de hoogste macht waarin de invoervariabele t voorkomt hier 2 is, heten deze functies *tweedegraads functies.* In de milieuwetenschappen komen we functies van deze vorm vaak tegen. In deze leereenheid zullen we de wiskundige kenmerken van deze functies bespreken en meer voorbeelden geven van toepassingen van dergelijke functies. Daarbij zullen we zien dat de grafiek van een tweedegraads functie een *parabool* is die gekenmerkt wordt door de *top* en de *symmetrieas*.
Verder zullen we laten zien hoe *tweedegraads vergelijkingen* gebruikt worden bij het bepalen van de symmetrieas van een parabool en bij het bepalen van *snijpunten* van twee parabolen en van een parabool en een rechte lijn. Tot slot besteden we aandacht aan het grafisch oplossen van *tweedegraads ongelijkheden*.

LEERDOELEN

Na bestudering van deze leereenheid
- weet u wat er onder het begrip *tweedegraads functie* wordt verstaan
- kent u de *standaardvorm* van het functievoorschrift van een tweedegraads functie
- weet u dat de grafiek van een tweedegraads functie een *parabool* is
- kent u enkele belangrijke kenmerken van een parabool, zoals de *top*, de *symmetrieas* en het onderscheid tussen *berg-* en *dalparabolen*
- kunt u de symmetrieas en de top van een parabool berekenen door het opstellen en oplossen van een *tweedegraads vergelijking*
- kunt u aangeven wat het *domein* en het *bereik* van een tweedegraads functie is
- kunt u met behulp van tweedegraads vergelijkingen ook nagaan of een parabool *snijpunten* heeft met een rechte lijn of met een andere parabool en kunt u als er snijpunten zijn de coördinaten van deze snijpunten berekenen
- kunt u *tweedegraads ongelijkheden* grafisch oplossen.

LEERKERN

1 De parabool $y = x^2$

Tweedegraads functie

Een *tweedegraads functie* is een functie met een functievoorschrift in de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$.
De graad van een functie is de hoogste macht van de invoervariabele in het functievoorschrift, in dit geval twee.

CC BY NC ND

De eenvoudigste tweedegraads functie is die met $a = 1$, $b = 0$ en $c = 0$, dat is de functie $f(x) = x^2$.
Om de grafiek van deze functie te tekenen, bepalen we eerst een aantal punten:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

OPGAVE 4.1
Teken deze punten in een assenstelsel.
Liggen deze punten op een rechte lijn?
Enig idee welke vorm de grafiek van de functie f heeft?

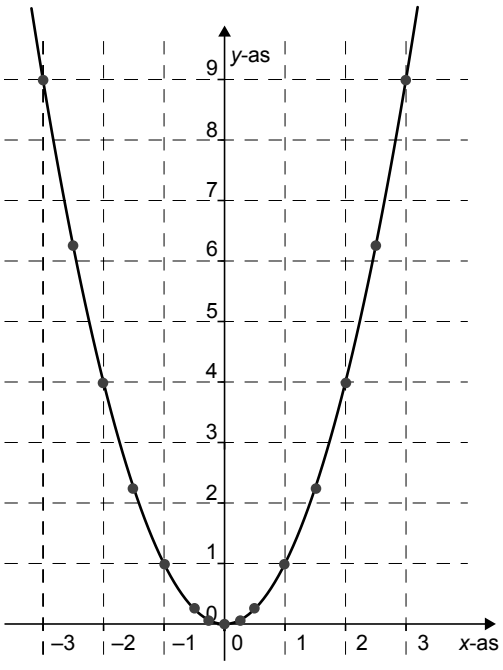
Om de grafiek nauwkeuriger te tekenen, kunnen we de y-waarden van een aantal tussengelegen punten uitrekenen.

OPGAVE 4.2
Vul de volgende tabel in en teken de corresponderende punten in de figuur die u bij opgave 4.1 gemaakt hebt.

x	$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
$f(x)$								

Parabool

In figuur 4.1 zijn de punten uit opgave 4.1 en 4.2 ingetekend in een assenstelsel. Vervolgens zouden we nog veel meer punten kunnen berekenen en intekenen. Het resultaat is dan een kromme lijn. De grafiek van de functie f wordt een *parabool* genoemd.



FIGUUR 4.1 Grafiek van $f(x) = x^2$

Naast de paraboolvorm kunnen we in figuur 4.1 nog de volgende kenmerken van de grafiek van $f(x) = x^2$ herkennen:
– Als het punt (a, b) op de grafiek ligt, dan ligt ook het punt $(-a, b)$ op de grafiek.

Symmetrieas

De grafiek heeft dus de y-as als *symmetrieas*.
– De laagste uitvoerwaarde is 0. Deze wordt bereikt in het punt van de grafiek dat op de symmetrieas ligt, dat is de oorsprong $(0, 0)$.

Top

Dit punt heet de *top* van de parabool.
– Bij elke positieve uitvoerwaarde y horen twee invoerwaarden, namelijk $x = \sqrt{y}$ en $x = -\sqrt{y}$;
– Bij $y = 0$ hoort maar één invoerwaarde, namelijk $x = 0$; er zijn geen negatieve uitvoerwaarden.
– Het domein van f is $\mathbb{R}$. Het bereik is het interval $\left[0, \rightarrow\right\rangle$, ofwel 0 en alle positieve reële getallen.

2 De grafiek van een tweedegraads functie

De grafiek van een willekeurige tweedegraads functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ is altijd een parabool. Deze kan worden geconstrueerd door de parabool $y = x^2$ te verschuiven, uit te rekken, in te krimpen of te spiegelen. Om dit in te zien, bekijken we eerst de grafieken van enkele functies.

OPGAVE 4.3

Bereken enkele punten en teken de grafieken van de volgende functies:

a $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
b $f(x) = -3x^2$
c $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$
d $f(x) = (x - 3)^2$
e $f(x) = -(x - 2)^2 + 2$

Voor tweedegraadsfuncties en parabolen gelden de volgende eigenschappen:
– De grafiek van de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ is een parabool.
– Met $b = 0$ en $c = 0$ krijgen we een parabool met een vergelijking van de vorm $y = ax^2$. Deze ontstaat uit de parabool $y = x^2$ door deze verticaal uit te rekken of in te krimpen. Als $a < 0$ wordt de parabool ook nog gespiegeld in de x-as. De top van de parabool $y = ax^2$ is de oorsprong $(0, 0)$. De symmetrieas is de y-as. Als $a > 0$ is de top het laagste punt van de parabool, als $a < 0$ is de top het hoogste punt.
– Met $b = 0$ en $c \neq 0$ krijgen we een parabool met een vergelijking van de vorm $y = ax^2 + c$. Deze ontstaat uit de parabool $y = ax^2$ door deze verticaal te verschuiven. Als $c > 0$ is de verschuiving omhoog, als $c < 0$ is de verschuiving omlaag. De top van de parabool $y = ax^2 + c$ is het punt $(0, c)$. De symmetrieas is de y-as.
– Een parabool met een vergelijking van de vorm $y = a(x - p)^2$ ontstaat uit de parabool $y = ax^2$ door deze horizontaal te verschuiven. Als $p > 0$ is de verschuiving naar rechts, als $p < 0$ is de verschuiving naar links. De top van de parabool $y = a(x - p)^2$ is het punt $(p, 0)$. De symmetrieas is de lijn $x = p$.

CC BY NC ND

OPGAVE 4.4
In opgave 4.3e hebben we de grafiek getekend van de functie $f(x) = -(x-2)^2 + 2$.
a Hoe wordt deze grafiek verkregen door verschuiving, spiegeling en schaling van de grafiek van $f(x) = x^2$?
b Schrijf het functievoorschrift van deze functie in de standaardvorm.

Het voorschrift van een willekeurige tweedegraads functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ kan geschreven worden in de vorm:

$$f(x) = a(x-p)^2 + q \text{ met } p = -\frac{b}{2a} \text{ en } q = c - \frac{b^2}{4a}.$$

OPGAVE 4.5
Controleer dat $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$ gelijk is aan $ax^2 + bx + c$.
Begin met het wegwerken van de haakjes in $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Voor de grafieken van alle tweedegraads functies geldt:
– De grafiek is een parabool.
– De grafiek heeft een verticale symmetrieas. Deze verdeelt de parabool in twee ´takken´ die elkaars spiegelbeeld zijn in de symmetrieas. Het punt van de grafiek op de symmetrieas heet de top van de parabool.
– Als $a > 0$ is de top het laagste punt van de grafiek. We spreken dan van een *dalparabool*.
Dalparabool
– Als $a < 0$ is de top het hoogste punt van de grafiek. Dan spreken we van een *bergparabool*.
Bergparabool

Bij het tekenen van de grafiek van een tweedegraads functie moeten we deze kenmerken altijd duidelijk laten uitkomen. Bovendien moeten we om de kromming van de parabool goed weer te geven, naast de top minimaal vier andere punten tekenen, bij voorkeur aan weerszijden van de symmetrieas.

OPGAVE 4.6
Gegeven de functie $f(x) = 2x^2 - 4x - 2$.
a Vul in:

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$						

b Kunt u op grond van de tabelwaarden vinden wat de symmetrieas van de grafiek van f is?

Als we ´zomaar´ beginnen met het berekenen van wat punten van de grafiek, lopen we het gevaar dat we de symmetrieas – en dus de top – niet vinden. Daarom gaan we altijd eerst gericht op zoek naar de symmetrieas. Dit kunnen we doen door twee punten van de grafiek te zoeken die dezelfde uitvoerwaarde hebben. De symmetrieas ligt dan halverwege deze twee punten.
Om deze punten te vinden zoeken we allereerst een uitvoerwaarde die in het bereik van de functie ligt. Deze is makkelijk gevonden: $f(0) = c$.
Een tweede punt dat op gelijke hoogte ligt vinden we door vervolgens op te lossen: $f(x) = c$.
De symmetrieas ligt dan halverwege $x = 0$ en de andere oplossing van deze vergelijking.

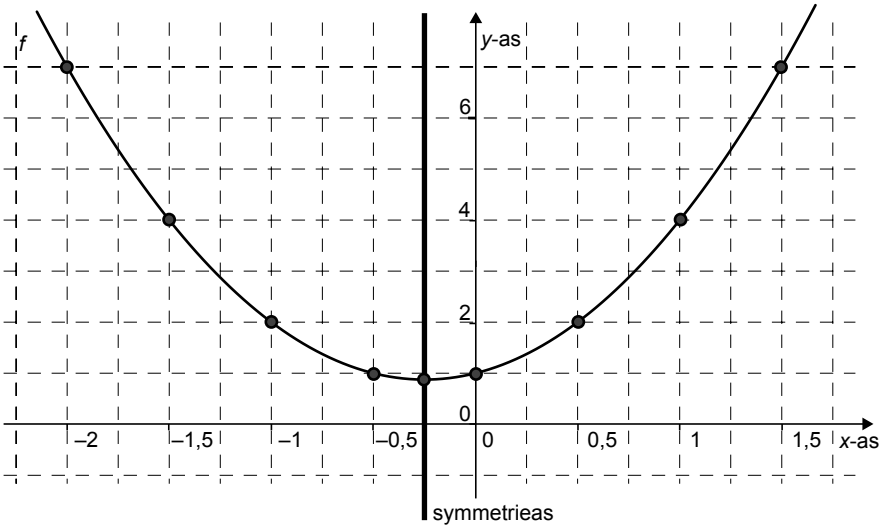
Symmetrieas

VOORBEELD 4.1
Symmetrieas zoeken

Gegeven de functie $f(x) = 2x^2 + x + 1$
Los op: $f(x) = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + x = 0$
Merk op dat de constante term verdwijnt uit de vergelijking. We kunnen dus een factor x buiten haakjes halen. Dit geeft: $x(2x+1) = 0$
Splits de vergelijking: $x = 0$ of $2x + 1 = 0$.
De eerste vergelijking levert de oplossing die we al kenden, namelijk $x = 0$.
De tweede vergelijking geeft: $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

De symmetrieas ligt dus halverwege de punten $(0,1)$ en $\left(-\frac{1}{2},1\right)$, dat is de lijn $x = -\frac{1}{4}$.

De top van de parabool vinden we dan door te berekenen:
$f(-\frac{1}{4}) = 2 \cdot \frac{1}{16} + \left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = \frac{7}{8}$.
Andere punten vinden we door te berekenen:
$f(1) = 2 + 1 + 1 = 4$, dus ook $f(-1\frac{1}{2}) = 4$
$f(-1) = 2 - 1 + 1 = 2$, dus ook $f(\frac{1}{2}) = 2$
Het resultaat van al deze berekeningen is weergegeven in figuur 4.2.



FIGUUR 4.2 Grafiek van $f(x) = 2x^2 + x + 1$
Let op de schaalverdelingen langs de assen.

In opgave 4.5 hebben we gezien dat het functievoorschrift van een willekeurige tweedegraads functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ geschreven kan worden als $f(x) = a((x-p)^2 + q$ met $p = -\frac{b}{2a}$ en $q = c - \frac{b^2}{4a}$.

In opgave 4.3 hebben we gezien dat de grafiek van de functie $f(x) = (x-3)^2$ de verticale lijn $x = 3$ als symmetrieas heeft.
Dit geldt algemeen: de vergelijking van de symmetrieas van de grafiek van de functie $f(x) = ax^2 + b + c$ wordt gegeven door $x = -\frac{b}{2a}$.

Vergelijking symmetrieas:
$x = -\frac{b}{2a}$

Deze formule mag u uiteraard gebruiken als u snel de vergelijking van de symmetrieas van een parabool wilt vinden. Voor het tekenen van de grafiek heeft de methode van voorbeeld 4.1 niet alleen het voordeel dat daarmee duidelijk is dat de gevonden lijn inderdaad de symmetrieas is, bovendien krijgt u en passant de coördinaten van een aantal punten van de grafiek.

OPGAVE 4.7
Gegeven de functie $f(x) = -2x^2 - 5x + 6$.
a Bepaal op de manier van voorbeeld 4.1 de symmetrieas van de grafiek van f.
b Geef de coördinaten van de top en van vier andere punten van de grafiek van f.
c Teken de grafiek van f in een assenstelsel.
d Bepaal het bereik van f als het domein $\mathbb{R}$ is.

OPGAVE 4.8
Beantwoord de vragen van opgave 4.7 ook voor de functies $g(x) = x^2 - 3x + 2$ en $h(x) = 4x - x^2$.

OPGAVE 4.9
Bekijk de grafieken van de functies $f(x) = x^2$ (figuur 4.1), $f(x) = -3x^2$ (opgave 4.3b), $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ (opgave 4.3c) en $f(x) = -(x-2)^2 + 2$ (opgave 4.3e).
a Wat is de waarde van a voor deze functies?
b Van welke van deze functies is de grafiek een bergparabool?
c Welke vorm heeft de grafiek van de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ als $a = 0$?

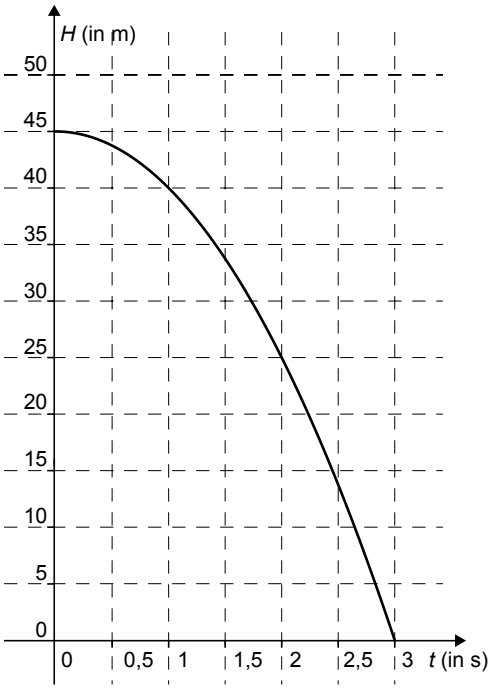
3 Domein en bereik

In de milieuwetenschappen is het domein van een functie meestal niet heel $\mathbb{R}$. Vaak is het domein een beperkt interval. In de voorbeelden hieronder ziet u welke consequenties dit heeft voor het bepalen van de symmetrieas en het bereik van een tweedegraads functie.

VOORBEELD 4.2
Toepassing: Valbeweging

In voorbeelden 1.1 en 1.3 hebben we de val van een steen vanaf een toren van 45 meter hoogte bekeken.
De hoogte in meters (H) als functie van de tijd in seconden (t) werd gegeven door de formule $H(t) = 45 - 5t^2$. Deze formule was alleen geldig voor $0 \le t \le 3$. Hieronder ziet u nogmaals de grafiek van deze functie.

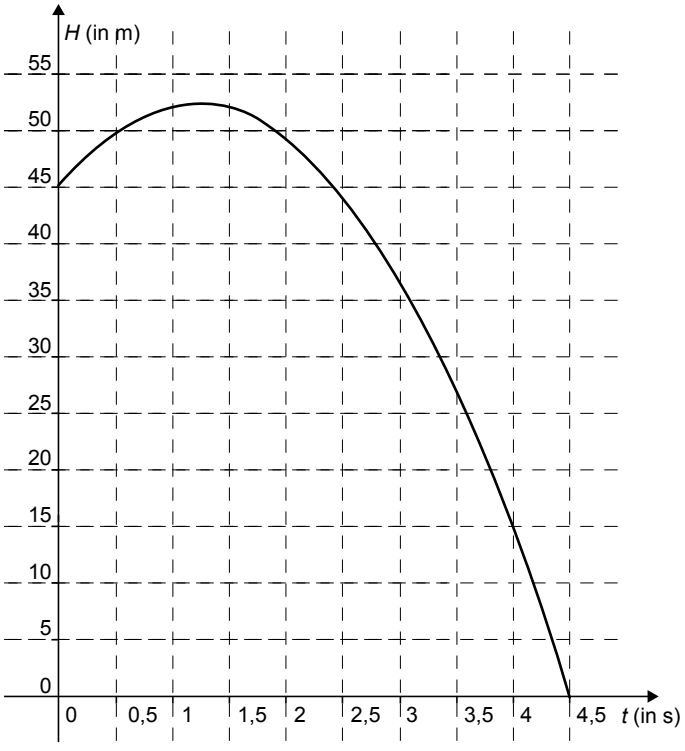
Hoewel de functie $H(t) = 45 - 5t^2$ een tweedegraads functie is, zien we geen symmetrie in deze grafiek. Dit komt door de beperking van het domein tot het interval $0 \le t \le 3$.
De grafiek van H is nu zelf geen volledige parabool, maar is wel een deel van de parabool die ontstaat als we toestaan dat het domein van de functie heel $\mathbb{R}$ is.
De vergelijking van deze parabool kan geschreven worden als $H = -5t^2 + 45$. We krijgen deze vergelijking door in de algemene vorm $ax^2 + bx + c$ in te vullen: $a = -5$, $b = 0$ en $c = 45$.
De vergelijking van de symmetrieas is: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot (-5)} = 0$.
Aangezien dit een bergparabool is, is de top het hoogste punt. Zo kunnen we het bereik van de functie H aflezen uit de grafiek: het hoogste punt is de top (0, 45) en het laagste punt is $H(3) = 0$.
Het bereik is dus het interval $0 \le H \le 45$.



FIGUUR 4.3 Nogmaals de grafiek van $H(t) = 45 - 5t^2$

VOORBEELD 4.3
Toepassing: Valbeweging

In voorbeeld 1.2 hebben we gekeken naar de hoogte van de steen als functie van de tijd als we deze met een snelheid van $12\frac{1}{2}$ meter per seconde omhoogschieten vanaf de toren van 45 meter hoogte. In dat geval werd de hoogte in meters (H) als functie van de tijd in seconden (t) gegeven door de formule $H(t) = 45 + 12\frac{1}{2}t - 5t^2$.



FIGUUR 4.4 Grafiek van $H(t) = 45 + 12\frac{1}{2}t - 5t^2$

cc BY NC ND

Een fout die bij het bepalen van de maximale waarde van een dergelijke functie vaak gemaakt wordt, is dat alleen gekeken wordt naar het beginpunt en het eindpunt van het domein. Uit figuur 4.4 wordt echter duidelijk dat we zo de top van de grafiek missen.
Bij het bepalen van de top trekken we ons weer even niets aan van het feit dat we hier te maken hebben met een tweedegraads functie met een beperkt domein, we gaan gewoon te werk zoals in voorbeeld 4.1.

OPGAVE 4.10

a Bepaal de symmetrieas van de grafiek van de functie $H(t) = 45 + 12\frac{1}{2}t - 5t^2$ op de manier van voorbeeld 4.1.
b Bereken ook de waarde van H in de top.
c Wat is het bereik van de functie H als we $\mathbb{R}$ als domein nemen?
d En wat zijn het domein en het bereik van deze functie als we ons weer aan de beperkingen houden die uit de hierboven beschreven toepassing volgen?

OPGAVE 4.11

In figuur 4.2 hebben we de grafiek van de functie $f(x) = 2x^2 + x + 1$ getekend en in opgave 4.7 hebben we de grafiek van de functie $f(x) = -2x^2 - 5x + 6$ getekend.
a Geef het bereik van deze twee functies als het domein heel $\mathbb{R}$ is.
b Geef ook het bereik van deze functies als het domein beperkt wordt tot het interval $[-1,1]$.

BOX 4.1
Toepassing: Energieverbruik voertuigen

Een milieuwetenschappelijke toepassing van *tweedegraads functies* is het beschrijven van het energieverbruik van voertuigen in relatie tot luchtweerstand. Dit energieverbruik komt tot stand omdat het voertuig (bijvoorbeeld een auto) continu stilstaande lucht in beweging moet brengen (de lucht gaat 'wervelen'). In een tijdsinterval met lengte t gaat dit ruwweg om een pakket van volume Avt, met A de oppervlakte van het vooraanzicht van de auto en v de snelheid van de auto. De massa van dit luchtpakket $m_{lucht} = \rho \cdot Avt$ met ρ de luchtdichtheid. (ρ is de Griekse letter rho.)
Dit pakket lucht wervelt ruwweg met een snelheid v. De bewegingsenergie die deze massa in het tijdsinterval van de auto 'mee krijgt' is dus $\frac{1}{2} \cdot m_{lucht} \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v \cdot t \cdot v^2$.
Per tijdseenheid is het energieverbruik als gevolg van de luchtweerstand dan $\left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v \cdot t \cdot v^2\right) / t = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^3$, dus evenredig aan de derde macht van de snelheid.

Nu zijn we natuurlijk vooral geïnteresseerd in het energieverbruik *per eenheid afstand*. Aangezien de tijd die een voertuig nodig heeft om een bepaalde afstand af te leggen omgekeerd evenredig is aan de snelheid, wordt het verbruik nog gedeeld door v. Het totale energieverbruik E_{lucht} als gevolg van luchtweerstand *per eenheid afstand* is dus:
$E_{lucht} = \left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^3\right) / v = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$, dus evenredig aan het kwadraat van de snelheid.

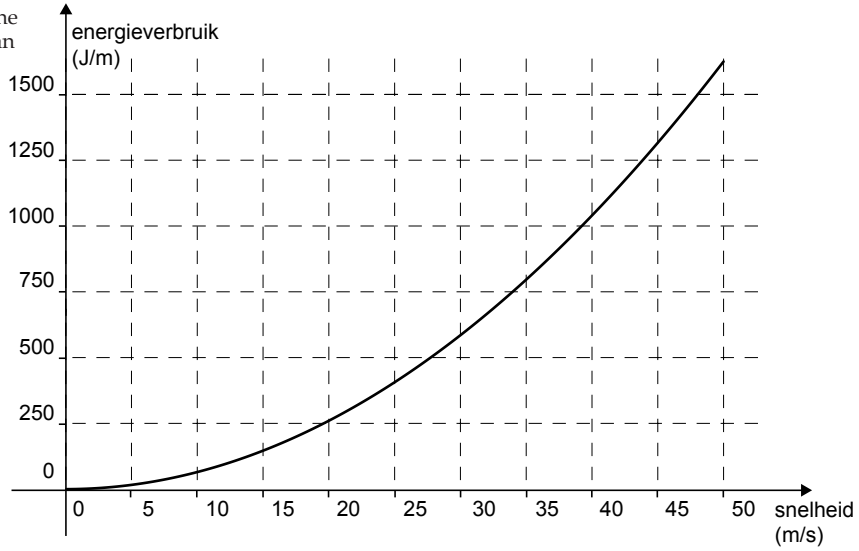
Bron: OU cursus Natuurkunde voor milieuwetenschappen (van Belleghem, 2012), MacKay (2009)
Aandachtsgebied: Energiegebruik, Mobiliteit

VOORBEELD 4.4
Toepassing: Energiegebruik voertuigen

We bekijken een middenklasse auto met een effectief vooraanzicht A van zo'n 1 m^2. Op zeeniveau is de luchtdichtheid ρ ongeveer 1,3 kg/m^3. De auto rijdt maximaal 180 km/uur = 50 m/s.

Effectief voor-aanzicht = het daadwerkelijke vooraanzicht gecorrigeerd voor de aerodynamische eigenschappen van de auto.

We gaan er voor het gemak van uit dat het energiegebruik van deze auto uitsluitend door de luchtweerstand wordt bepaald. Het energieverbruik *per eenheid afstand* als functie van de snelheid ziet er dan als volgt uit:



FIGUUR 4.5 Het energieverbruik per eenheid afstand E_{lucht} als gevolg van luchtweerstand in J/m als functie van de rijsnelheid v in m/s.

OPGAVE 4.12

Figuur 4.5 is een zogenaamde halve parabool.

a Leg uit waarom deze benaming gekozen is.

b Wat is het domein en wat is het bereik van deze functie?

c Wat is de symmetrieas van de bijbehorende hele parabool?

In box 4.1 is aangegeven dat het energiegebruik per eenheid afstand als gevolg van de luchtweerstand gegeven wordt door $E_{lucht} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$.

d Laat zien dat hieruit volgt dat het energieverbruik in J/m als functie van de snelheid in m/s in voorbeeld 4.4 gegeven wordt door $E_{lucht} = 0,65v^2$. Laat daarbij ook zien dat de eenheid van E_{lucht} inderdaad J/m is.

Een automobilist rijdt voor een afspraak een afstand van 80 km met 30 m/s met de auto van voorbeeld 4.4. Deze snelheid is 108 km/h.

e Wat is het totale energieverbruik in joule?

Neem aan dat de motor van deze auto met één liter benzine 9 megajoule aan effectieve energie kan produceren.

f Hoeveel liter benzine is er dan nodig voor bovenstaande rit?

Bij een volgende afspraak heeft de automobilist alle tijd van de wereld en besluit zijn gemiddelde snelheid te halveren.

g Met welke factor neemt de reistijd toe? En het energieverbruik?

Een andere automobilist is juist laat voor zijn afspraak en rijdt 10% sneller.

h Met hoeveel procent neemt zijn energieverbruik toe?

4 Snijpunten van een rechte lijn en een parabool

Om de snijpunten te bepalen van een rechte lijn en een parabool, stellen we net als bij het bepalen van het snijpunt van de grafieken van twee eerstegraads functies een vergelijking op door de vergelijkingen van de rechte lijn en de parabool te combineren. Zo ontstaat een tweedegraads vergelijking die we kunnen oplossen met de in leereenheid 1 besproken technieken.

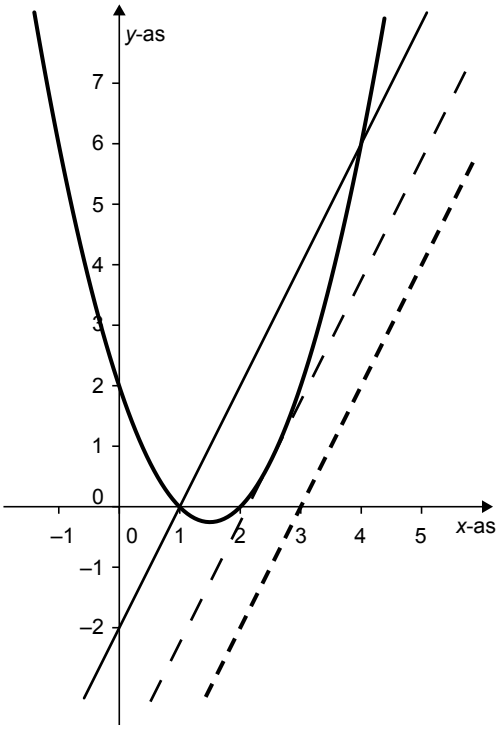
cc BY NC ND

VOORBEELD 4.5

Gegeven de functies $f(x) = 2x - 2$ en $g(x) = x^2 - 3x + 2$.
Om de snijpunten van de grafieken te bepalen lossen we op:
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x - 2 = x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$
Omdat $f(1) = g(1) = 0$ en $f(4) = g(4) = 6$ zijn de snijpunten (1, 0) en (4, 6).

Aangezien de vergelijkingen die ontstaan bij het berekenen van de snijpunten van een rechte lijn en een parabool tweedegraads vergelijkingen zijn, zijn er weer drie mogelijkheden voor het aantal oplossingen:
– De vergelijking heeft geen oplossingen, dus er zijn geen snijpunten.
– De vergelijking heeft één oplossing, dan raken de rechte lijn en de parabool elkaar.
– De vergelijking heeft twee oplossingen, dan zijn er twee snijpunten.

In de figuur hieronder is dit geïllustreerd voor de parabool $y = x^2 - 3x + 2$ en de rechte lijnen $y = 2x - 6$, $y = 2x - 4\frac{1}{4}$ en $y = 2x - 2$.



FIGUUR 4.6

OPGAVE 4.13
In voorbeeld 4.5 is de vergelijking $2x-2=x^2-3x+2$ al opgelost.
Los ook op:
a $2x-6=x^2-3x+2$
b $2x-4\frac{1}{4}=x^2-3x+2$

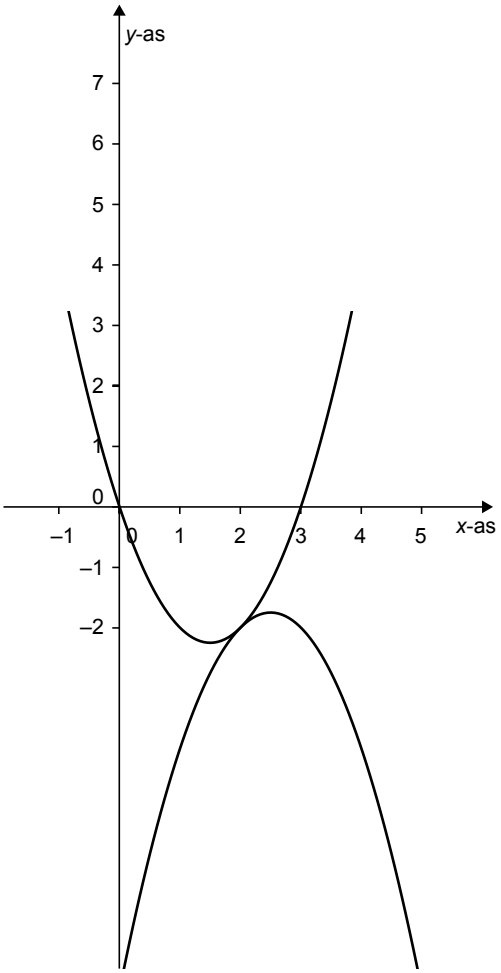
OPGAVE 4.14
Geef de vergelijking van elk van de rechte lijnen in figuur 4.6 en geef indien aanwezig de coördinaten van de snijpunten van de lijn met de parabool $y=x^2-3x+2$.

OPGAVE 4.15
Bepaal door het opstellen en oplossen van een vergelijking of de grafieken van de volgende functies snijpunten hebben en zo ja, bereken de coördinaten van deze snijpunten.
a $f(x)=3x^2+5x-4$ en $g(x)=3x+1$
b $f(x)=3x-2x^2$ en $g(x)=2x$
c $f(x)=5-6x-9x^2$ en $g(x)=12x+14$
d $f(x)=(x-3)(2x+5)$ en $g(x)=x-20$

OPGAVE 4.16
Een regendruppel valt onder invloed van de luchtweerstand met een constante snelheid.
Stel dat een regendruppel zich op $t=0$ op 100 meter hoogte bevindt en dat deze valt met een snelheid van 5 meter per seconde.
a Stel het functievoorschrift op voor H_R de hoogte van de regendruppel in meters, als functie van de tijd in seconden.
b Op welk tijdstip raakt de regendruppel de grond?
Stel verder dat er op hetzelfde tijdstip een steen op een hoogte van 80 meter wordt omhooggeschoten met een snelheid van 20 meter per seconde. De hoogte van de steen (in meters) als functie van de tijd (in seconden) wordt dan gegeven door $H_S(t)=80+20t-5t^2$.
c Welk object valt eerder op de grond, de steen of de regendruppel?
d Op welk(e) tijdstip(en) bevinden de regendruppel en de steen zich op gelijke hoogte?

5 Snijpunten van twee parabolen

Voor de snijpunten van twee parabolen zijn er ook weer drie mogelijkheden: geen snijpunten, één snijpunt, waarin de parabolen elkaar raken of twee snijpunten.
In figuur 4.7 ziet u de parabolen $y=x^2-3x$ en $y=-x^2+5x-8$
De parabolen raken elkaar in het punt $(2,-2)$.



FIGUUR 4.7

OPGAVE 4.17
Controleer dat de parabolen het punt $(2,-2)$ als enige gemeenschappelijke punt hebben door de vergelijking $x^2-3x=-x^2+5x-8$ op te lossen.

Als we de dalparabool naar beneden schuiven of de bergparabool naar boven, dan zijn er twee snijpunten. Schuiven we de dalparabool naar beneden of de bergparabool naar boven, dan zijn er geen snijpunten.

OPGAVE 4.18
Controleer deze uitspraken door de volgende vergelijkingen op te lossen:
a $x^2-3x-8=-x^2+5x-8$ (dalparabool naar beneden verschoven)
b $x^2-3x=-x^2+5x-10$ (bergparabool naar beneden verschoven)

OPGAVE 4.19

Bepaal door het opstellen en oplossen van een vergelijking of de grafieken van de volgende functies snijpunten hebben en zo ja, bereken de coördinaten van deze snijpunten.

a $f(x) = 3x^2 + 5x - 4$ en $g(x) = x^2 + 2x + 1$

b $f(x) = 3x - 2x^2$ en $g(x) = x^2$

c $f(x) = 5 - 6x - 9x^2$ en $g(x) = 10 - 6x - 9x^2$

d $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en $g(x) = (x-2)^2$

In onderstaande toepassing spelen vergelijkingen van de vorm $ax^2 + c = 0$ een belangrijke rol.

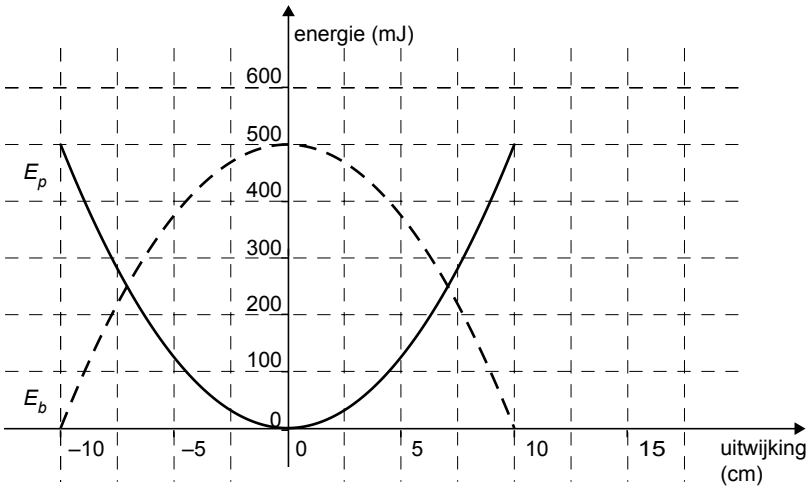
BOX 4.2
Toepassing: Harmonische trilling

Een andere, meer natuurkundige toepassing van *tweedegraads functies* is het beschrijven van de zogenaamde *harmonische trillingen*. Een eenvoudige voor te stellen trilling is bijvoorbeeld die van een lichaam opgehangen aan een spiraalveer. In rust hangt het lichaam stil op zijn evenwichtspunt. Bij uitwijking wordt het lichaam door de veerkracht altijd naar dit rustpunt teruggetrokken. Als deze veerkracht precies rechtevenredig is met de afstand vanuit het rustpunt, dan spreken we van een harmonische trilling. De energie E_{tot} van het lichaam is de som van zijn bewegingsenergie E_b en zijn potentiële energie E_p. Zonder verdere energieverliezen (bijvoorbeeld door demping) is de totale energie constant.
De potentiële energie wordt gegeven door de formule: $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$
Hierin is x de uitwijking vanuit het evenwichtspunt, en k de zogenaamde veerconstante. Zowel E_p als E_b zijn dus tweedegraads functies van x.

Bron: OU cursus Natuurkunde (Swithenby, 1987)
Aandachtsgebied: Klassieke mechanica, Trillingen

VOORBEELD 4.6
Toepassing: Harmonische trilling

We beschouwen een gewone spiraalveer. Aan het uiteinde van de veer wordt een lichaam bevestigd dat in trilling wordt gebracht. In figuur 4.8 ziet u voor deze harmonische trilling de grafieken van de potentiële en de bewegingsenergie in millijoule als functie van de uitwijking in centimeter ten opzichte van de evenwichtsstand.



FIGUUR 4.8 Potentiële en bewegingsenergie als functie van de uitwijking

OPGAVE 4.20

Als het lichaam van voorbeeld 4.6 de maximale uitwijking heeft, dan is de snelheid van het lichaam, en dus de bewegingsenergie, gelijk aan 0.

a Wat is de maximale uitwijking van het lichaam?

b Hoe groot is de potentiële energie bij deze maximale uitwijking?

Wat is het functievoorschrift van de potentiële energie E_p als functie van de uitwijking x?

In box 4.2 is aangegeven dat de potentiële energie gegeven wordt door $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$.

c Gebruik dit en uw antwoord van b om de waarde van de veerconstante k te vinden.

Welke eenheid heeft k?

En hoe groot is k als we deze uitdrukken in de SI-eenheid N/m?

De totale energie van het lichaam is constant. Uit de figuur blijkt: $E_{tot} = E_p + E_b = 500$ mJ.

d Wat is het functievoorschrift van de bewegingsenergie E_b als functie van de uitwijking x?

e Welke van de curven is een bergparabool? En welke een dalparabool?

f Waar ligt de symmetrieas van beide parabolen? Wat is de fysische interpretatie hiervan?

g Bepaal de top van de grafiek van de functie E_b. Wat is de fysische interpretatie van deze top?

h Geef het domein en het bereik van beide functies.

De uitwijking waarbij de bewegingsenergie gelijk is aan de potentiële energie kunnen we op twee manieren vinden:

i Los op $E_b = E_p$.

j Los op $E_b = 250$ mJ en $E_p = 250$ mJ.

6 Tweedegraads ongelijkheden

Tweedegraads ongelijkheden

Er is geen eenvoudige algebraïsche methode voor het oplossen van *tweedegraads ongelijkheden*, daarom raden wij u aan om deze ongelijkheden altijd op te lossen met de hieronder besproken grafische methode. We passen daarbij dezelfde stappen toe als bij het grafisch oplossen van een eerstegraads ongelijkheid.

Zie leereenheid 2 paragraaf 6.

VOORBEELD 4.7

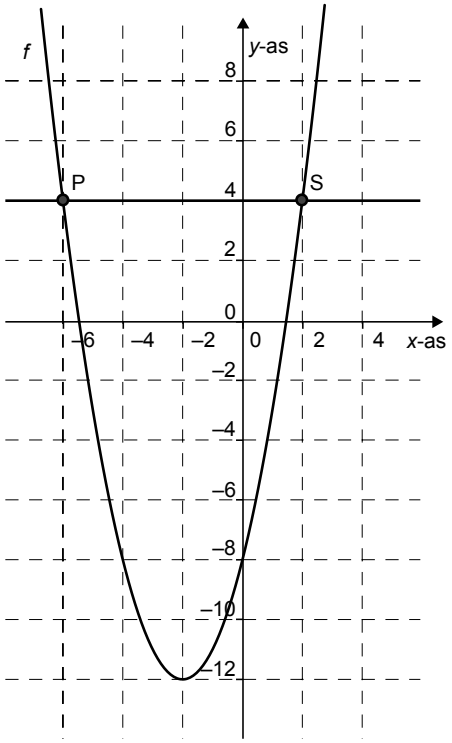
Los op: $x^2 + 4x - 8 > 4$.

Stap 1:

De vergelijking $x^2 + 4x - 8 = 4$ heeft oplossingen $x = 2$ en $x = -6$.

Stap 2:

Hieronder ziet u de grafieken van $f(x) = x^2 + 4x - 8$ en $g(x) = 4$. De snijpunten van deze grafieken zijn $S(2,4)$ en $P(-6,4)$.



FIGUUR 4.9 $f(x) = x^2 + 4x - 8$ en $g(x) = 4$ met snijpunten $S(2,4)$ en $P(-6,4)$.

Stap 3:
Tussen de beide snijpunten geldt $f(x) < g(x)$; links van P en rechts van S geldt $f(x) > g(x)$.
De oplossingen van de ongelijkheid $x^2 + 4x - 8 > 4$ zijn dus de waarden van x waarvoor geldt $x < -6$ of $x > 2$, ofwel de verzameling $\langle \leftarrow, -6 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$.

OPGAVE 4.21
Los de ongelijkheid $2x^2 - 2x + 3 \leq x + 2$ op met de methode van voorbeeld 4.7. Dat wil zeggen:
a Los de vergelijking $2x^2 - 2x + 3 = x + 2$ op.
b Teken de grafieken van de functies $f(x) = 2x^2 - 2x + 3$ en $g(x) = x + 2$ in één assenstelsel en markeer de gevonden snijpunten in deze figuur.
c Lees de oplossingen van de ongelijkheid af in de figuur.
NB De x-waarden van de snijpunten zijn nu ook een oplossing van de ongelijkheid.

OPGAVE 4.22

Los de volgende ongelijkheden op:

a $x^2 + 4x + 4 \leq 0$

b $x^2 + 4x + 4 \leq 3x + 6$

c $x^2 + 4x + 4 \leq x - 4$

d $x^2 + 4x + 4 \leq 4 - x^2$ (de methode van voorbeeld 4.7 werkt ook met twee parabolen)

e $x^2 + 4x + 4 \leq x^2 - 6x + 9$

f $x^2 + 4x + 4 \leq -(x+1)^2 + 1$ (werk eerst de haakjes weg)

BOX 4.3
Toepassing: Energieverbruik voertuigen (vervolg)

In Box 4.1 bekeken we het energiegebruik van voertuigen in relatie tot de luchtweerstand. Natuurlijk is de luchtweerstand niet de enige factor in het energieverbruik: ook de rolweerstand speelt een rol. Deze weerstand komt voort uit, bijvoorbeeld, de continue vervorming en slijtage van de wielen of banden en de energie die nodig is om het lawaai van rollende wielen op de ondergrond te produceren. Het meest eenvoudige model van rolweerstand gaat ervan uit dat deze weerstandskracht gelijk is aan de massa van het voertuig $m_{voertuig}$ vermenigvuldigd met een rolweerstand-constante C_{rol}. Deze constante hangt af van het type banden en ondergrond, maar is verder onafhankelijk van de snelheid.

Het energieverbruik per eenheid afstand als gevolg van de rolweerstand E_{rol} blijkt eenvoudigweg gelijk te zijn aan bovengenoemde weerstandskracht.

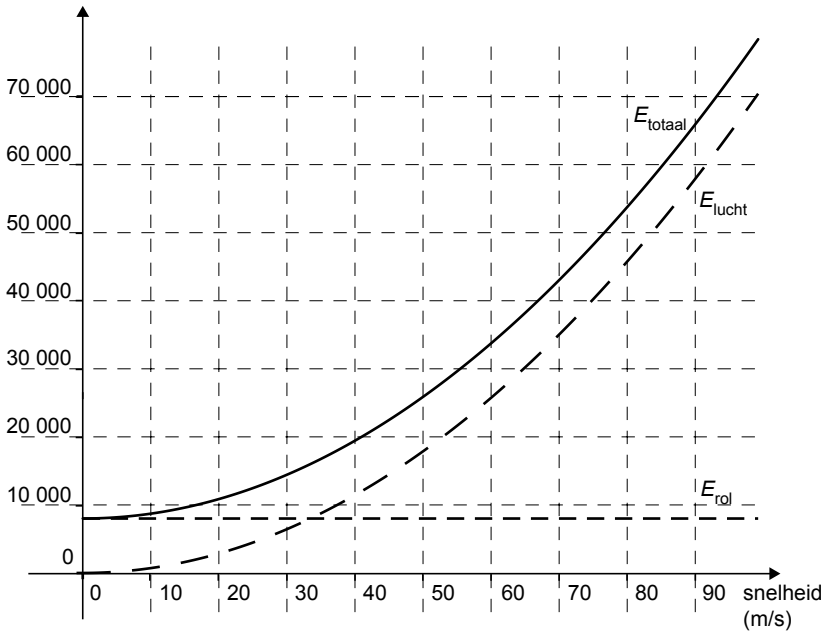
$$E_{rol} = C_{rol} \cdot m_{voertuig}$$

Bron: OU cursus Natuurkunde voor milieuwetenschappen (van Belleghem, 2012), MacKay (2009)

Aandachtsgebied: Energiegebruik, Mobiliteit

VOORBEELD 4.8
Toepassing: Energiegebruik voertuigen

We bekijken nu geen middenklasse auto (voorbeeld 4.4), maar een trein. Deze heeft een groter effectief vooraanzicht, zo'n 11 m^2. Een gemiddelde trein weegt zo'n 400 000 kg en heeft een C_{rol} van 0,02 N/kg. Voor de luchtdichtheid ρ nemen we wederom 1,3 kg/m^3.
Het energieverbruik per eenheid afstand als functie van de snelheid is geplot in figuur 4.10.
We onderscheiden het energieverbruik als gevolg van luchtweerstand en rolweerstand, en het totale energieverbruik (de beide componenten opgeteld).



FIGUUR 4.10 Het energieverbruik in J/m van een trein als gevolg van luchtweerstand en rolweerstand, als functie van de rijsnelheid v in m/s.

Gebruikte waarden: ρ = 1,3 kg/m^3, A = 11 m^2, m = 400.000 kg, C_{rol} = 0,02 N/kg..

OPGAVE 4.23

Uit de figuur blijkt duidelijk dat bij hoge snelheden de luchtweerstand veel groter is dan de rolweerstand (zij is 'dominant'). Bij lage snelheden is dit precies andersom: dan is de rolweerstand 'dominant'.

a Laat zien dat het energiegebruik als gevolg van de rolweerstand gelijk is aan 8000 J/m.

Laat daarbij ook zien dat de eenheden kloppen!

In box 4.1 hebben we gezien dat het energiegebruik als gevolg van de luchtweerstand gegeven wordt door $E_{lucht} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$.

b Laat zien dat in voorbeeld 4.8 geldt: $E_{lucht} = 7{,}15v^2$.

c Bereken bij welke snelheid de luchtweerstand en rolweerstand precies gelijk zijn.

Geef het antwoord zowel in m/s als in km/uur.

d Op welk interval is de luchtweerstand groter dan de rolweerstand? En op welk interval is de rolweerstand groter?

Neem aan dat de luchtweerstand dominant genoemd wordt als deze meer dan 4 keer zo groot is als de rolweerstand.

e Op welk interval is de luchtweerstand dominant?

Treinontwerpers krijgen de opdracht het energieverbruik van nieuwe treinen zo laag mogelijk te houden. Zij hebben hiervoor 4 opties: 1) het gewicht van de trein verlagen, 2) de wielen anders slijpen, 3) de aerodynamica van de trein verbeteren, en 4) een lagere rijsnelheid adviseren.

f Een goederentrein rijdt gemiddeld zo'n 80 km/uur. Welke opties zouden de treinontwerpers als eerste onderzoeken bij het ontwerpen van een dergelijke trein?

g Een hogesnelheidstrein rijdt gemiddeld zo'n 200 km/uur. Welke opties zijn dan het meest effectief?

CC BY NC ND

Samenvatting

Tweedegraads functie, top en symmetrieas

Een functie met een functievoorschrift van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$ heet een *tweedegraads functie*.

Parabool

– De grafiek van een tweedegraads functie is een *parabool.*
– Als $a > 0$ dan heeft de grafiek een laagste punt en zijn de takken van de parabool naar boven gericht. Zo'n parabool heet een *dalparabool.*
– Als $a < 0$ dan heeft de grafiek een hoogste punt en zijn de takken van de parabool naar beneden gericht. Zo'n parabool heet een *bergparabool.*
– Zowel het laagste punt van een dalparabool als het hoogste punt van een bergparabool wordt de *top* van de parabool genoemd. De twee takken van een parabool zijn elkaars spiegelbeeld in de verticale lijn die door de top loopt. Deze lijn heet de *symmetrieas* van de parabool.

Als we de grafiek van een tweedegraads functie zonder hulp van een computerprogramma willen tekenen, dan moeten we eerst op zoek gaan naar de symmetrieas en de top.
De *symmetrieas* van de grafiek van de tweedegraads functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ vinden we door twee punten te zoeken met dezelfde uitvoerwaarde. De symmetrieas ligt dan halverwege deze twee punten.
De symmetrieas is $x = -\frac{b}{2a}$.

Domein en bereik

Bij een tweedegraads functie zijn alle waarden van x mogelijk als invoerwaarden. Als er geen beperkingen worden opgelegd door de toepassing waar we de functie bij gebruiken of door een afspraak, dan is het domein $\mathbb{R}$.
In dat geval wordt het bereik begrensd door de uitvoerwaarde van de top. Of dit de grootste dan wel de kleinste waarde is van het bereik hangt af van het teken van a:
Als $a > 0$ is de uitvoerwaarde van de top de kleinste waarde van het bereik;
als $a < 0$ is de uitvoerwaarde van de top de grootste waarde van het bereik.

Als het domein van een tweedegraads functie beperkt wordt, dan moeten we voor het bepalen van het bijbehorende bereik niet alleen kijken naar de eindpunten van het domein, maar ook naar de top. Als deze in het domein ligt, ligt daar de hoogste of laagste y-waarde.

Snijpunten

De x-coördinaten van de snijpunten van de grafieken van twee functies f en g vinden we door het opstellen en oplossen van de *vergelijking* $f(x) = g(x)$. Als f en/of g een tweedegraads functie is, dan is dit een tweedegraads vergelijking, die – zoals in appendix A is besproken – geen, één of twee oplossingen kan hebben. In dat geval kunnen er dus geen, één of twee snijpunten zijn.

ZELFTOETS

1 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ en $g(x) = -3x^2 + 4x - 1$.
a Bepaal de coördinaten van de toppen van f en g.
b Geef het bereik van f als het domein wordt beperkt tot het interval $\left[0,2\right]$.
c Geef het bereik van g als het domein wordt beperkt tot het interval $\left[0,\rightarrow\right\rangle$, dat wil zeggen als we alleen maar $x = 0$ en alle positieve getallen toestaan als invoerwaarden.
d Bereken de x-coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g.

2 Gegeven de functie $h(x) = 5 + x - \frac{1}{4}x^2$.
a Is de grafiek van h een bergparabool of een dalparabool?
b Bereken $h(0)$ en $h(4)$.
c Bepaal het bereik van h als we geen beperkingen opleggen aan het domein.
d Bepaal het bereik van h als het domein wordt beperkt tot het interval $\left[0,3\frac{1}{2}\right]$.
(Maak hierbij indien nodig een schets van de grafiek.)

3 Teken de grafiek van de functie $k(x) = x^2 - 5x$.
(Denk aan de symmetrieas en de top!)

4 Teken de grafiek van de functie $F(t) = 2t^2 - 5t + 3$.

5 Van een functie f is gegeven: $f(0) = 3$, $f(1) = 5$ en $f(3) = 3$.
a Teken de punten (0, 3), (1, 5) en (3, 3) in een assenstelsel.
b Waarom kan de functie f geen eerstegraads functie zijn?
Neem in het vervolg van deze opgave aan dat f een tweedegraads functie is.
c Is de grafiek van f een bergparabool of een dalparabool?
d Wat is de symmetrieas van de grafiek van f en hoe groot is dus $f(2)$?

6 Gegeven de functie $f(x) = 3x^2 - 6x + 10$.
a Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van f.
b Los op: $f(x) \leq 10$.
c Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de lijn $y = 4x + 7$.

7 Gegeven de functies $f(x) = 3x - 7$ en $g(x) = 2x^2 - 13x + 23$.
a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x-as en met de y-as.
b Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x-as en met de y-as.
c Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van g.
d Los de ongelijkheid $f(x) < g(x)$ op.

8 Los op: $x^2 - 6x + 8 > \frac{x^2 - 6x + 5}{4}$

cc BY NC ND

Exponentiële groei

Introductie *135*

Leerkern *135*

1 Groeimodellen *135*
2 Exponentiële toename en groeifactor *139*
3 Exponentiële afname *141*
4 Procentuele toename en afname *143*

Samenvatting *147*

Zelftoets *148*



CC BY NC ND

Leereenheid 5

Exponentiële groei

INTRODUCTIE

Twee veel voorkomende groeimodellen zijn die van de lineaire en exponentiële groei. In het begin van deze leereenheid worden beide kort aangestipt. Het *lineaire model* is al uitgebreid behandeld in leereenheid 3. In deze leereenheid concentreren we ons daarom verder op diverse vormen van *exponentiële groei* en op de bijbehorende functievoorschriften.

LEERDOELEN

Na bestudering van deze leereenheid
- kent u het verschil tussen een *lineair* en een *exponentieel groeimodel*
- kent u verschillende situaties waarin er sprake is van exponentiële groei, zoals *verdubbeling*, *halvering*, *procentuele toename* en *procentuele afname*
- kunt u op grond van een beschrijving van het groeiproces de *groeifactor* en het functievoorschrift van de groeifunctie bepalen
- kunt u de groeifactor en het functievoorschrift van de groeifunctie ook vinden op grond van een tabel.

LEERKERN

1 Groeimodellen

In de milieuwetenschappen bestuderen we vaak de toename of afname van een grootheid, zoals de hoeveelheid of de concentratie van een bepaalde stof. Daarbij komen twee groeimodellen vaak voor:

– De toename (of afname) van de hoeveelheid $H(t)$ is op ieder tijdstip hetzelfde. Het verschil $H(t+1)-H(t)$ is dan een vast getal a. Bij dit verband hoort een formule van de vorm $H(t)=at+b$. H is dan dus een lineaire functie en a is de *richtingscoëfficiënt* van de grafiek van H.

Richtingscoëfficiënt

– De toename (of afname) van de hoeveelheid $H(t)$ is evenredig aan de al aanwezige hoeveelheid $H(t)$. Het quotiënt $H(t+1)/H(t)$ is dan een vast getal, de *groeifactor* g.

Groeifactor

Dit verband wordt meestal geschreven als $H(t+1)=H(t)\cdot g$.

Het eerste groeimodel noemen we lineaire groei. Het tweede groeimodel leidt tot exponentiële groei.

De groei van de lengte van een kind vanaf de derde tot aan de twaalfde verjaardag kan worden beschreven met het lineaire groeimodel.

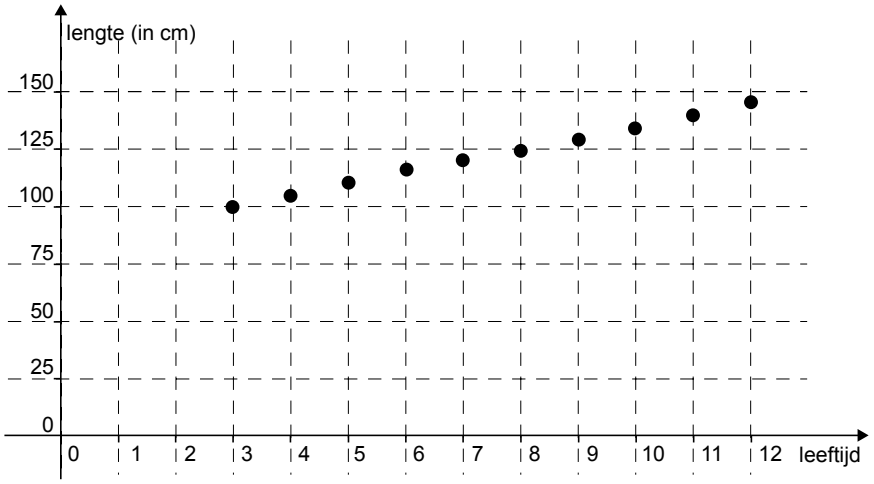
CC BY NC ND

VOORBEELD 5.1

Anneke heeft de lengte van haar zoon Bart ieder jaar op zijn verjaardag gemeten. Daarbij heeft zij genoteerd:

leeftijd	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
lengte in cm	100	105	110	116	120	124	129	134	140	145

In figuur 5.1 zijn deze metingen weergegeven als punten in een assenstelsel.



FIGUUR 5.1 De lengte van Bart op zijn derde t/m twaalfde verjaardag

OPGAVE 5.1

a Met hoeveel cm groeit Bart gemiddeld per jaar?
b Stel een formule op voor L, de lengte van Bart in cm als functie van l, de leeftijd van Bart in jaren.
c Wat is, gelet op de tekst bij voorbeeld 5.1, het domein van deze functie? En wat is het bereik?
d Verklaar dat er hier sprake is van *lineaire groei*.

Lineaire groei

VOORBEELD 5.2
Toepassing: Nuldeorde chemische reactie

Een ander voorbeeld van *lineaire groei* zijn we tegengekomen in voorbeeld 3.2. Bij deze nuldeorde chemische reactie was de concentratie ammoniak een lineaire functie van de tijd en nam de concentratie iedere seconde met 2 mol/liter af. De concentratie in mol/l als functie van de tijd in seconden werd gegeven door de formule $f(t) = -2t + 10$.
Merk op dat hoewel hier sprake is van afname, we toch spreken van een lineair groeimodel.

Bij een lineair groeimodel past een groeifunctie van de vorm $H(t) = at + b$. De verandering per tijdseenheid is dan constant:
$H(t+1) - H(t) = \big(a(t+1)+b\big) - \big(at+b\big) = at + a + b - at - b = a$.
Dit is precies de richtingscoëfficiënt van de grafiek van H. Deze verandering kan zowel positief zijn (d.w.z. een toenemende hoeveelheid) als negatief (d.w.z. een afnemende hoeveelheid).

Aangezien we lineaire functies al uitgebreid bestudeerd hebben in leereenheid 3, concentreren we ons in deze leereenheid verder op het tweede groeimodel: exponentiële groei. In dit groeimodel is de toename of de afname van een grootheid evenredig aan de al aanwezige hoeveelheid van die grootheid.

In de wereld om ons heen zien we vele voorbeelden van exponentiële groei. Vanuit een milieuwetenschappelijk perspectief dragen we hieronder twee toepassingen aan: een voor exponentiële toename (populatiegroei), en een voor exponentiële afname (radioactiviteit).

BOX 5.1
Toepassing: Populatiegroei

Een van de bekendste voorbeelden van exponentiële groei is de groei van populaties van mensen en dieren. Stel dat in een populatie ieder ouderechtpaar zes nakomelingen produceert die zich op hun beurt zullen reproduceren. Als we met 1 ouderpaar beginnen, dan verdrievoudigt de populatiegrootte iedere generatie van 2, naar 6, 18, 54, 162 enzovoorts, individuen in de volgende generaties.
De groeisnelheid blijft dus stijgen naar gelang de grootte van de populatie. Zeker bij snelle voortplanting, de aanwezigheid van voldoende natuurlijke hulpbronnen, en in afwezigheid van natuurlijke vijanden kan populatiegroei dan ook flink uit de hand lopen.

Bron: OU cursus Levenswetenschappen 1: Evolutie (van Rhijn, 2009)
Aandachtsgebied: Populatiegroei, Dynamiek van ecosystemen

BOX 5.2
Toepassing: Radioactiviteit

Radioactiviteit is het fenomeen waarbij atomen 'vervallen' in een andere atoomsoort of atoomtoestand. Hierbij wordt straling uitgezonden in de vorm van deeltjes, of elektromagnetische straling.

Het verschijnsel werd ontdekt door de fysicus Henri Becquerel (1895). Hij merkte dat een brok uraniumerts een fotografische plaat zwart maakte. Kennelijk zond het erts straling uit, vandaar dat hij het woord radioactiviteit introduceerde. Men weet tegenwoordig dat de uraniumatomen in het uraniumerts vervallen tot thoriumatomen. Hierbij worden zogenaamde alfadeeltjes uitgezonden. Dat zijn in feite kale heliumkernen, bestaande uit 2 protonen en 2 neutronen.

Van belang is dat de snelheid van het vervalproces – en daarmee de intensiteit van de alfastraling – evenredig is aan de hoeveelheid overgebleven uraniumatomen in het uraniumerts. In het geval van uranium gaat het vervalproces langzaam, maar gestaag. Na zo'n 5 miljard jaar is de helft van het aantal uraniumatomen vervallen, waardoor ook de intensiteit van de alfastraling zal zijn gehalveerd. Na nog eens 5 miljard jaar zal de helft van het resterende uranium alsnog zijn vervallen, waardoor wederom de straling zal zijn gehalveerd, en ga zo maar door. De stralingsintensiteit zal dus altijd blijven afnemen, maar de snelheid waarmee dit gebeurt neemt ook af.

Bron: OU cursus Natuurkunde voor milieuwetenschappen (van Belleghem, 2012)
Aandachtsgebied: Radioactiviteit

BOX 5.3
Toepassing: Microbiële groei (voorbeeld van populatiegroei)

Om een en ander concreet te maken bekijken we de groei van een kweek bacteriën als voorbeeld van populatiegroei.

Bacteriën zijn eencellige organismen. Zij vermeerderen zich door tweedeling ofwel 'binaire splitsing'. Dit verschilt van geslachtelijke voortplanting, waar een ouderpaar een bepaald aantal nakomelingen produceert. De snelheid waarmee een populatie bacteriën groeit is dus uitsluitend afhankelijk van de snelheid waarmee de tweedeling plaatsvindt.

CC BY NC ND

De duur van een volledige bacteriedeling varieert sterk en is afhankelijk van een aantal factoren, zoals het beschikbare voedsel en genetische factoren. De cyclus van E. coli, bijvoorbeeld, duurt onder optimale omstandigheden ongeveer 20 minuten. De cyclus van groei en deling gaat door zolang de cellen zich in een omgeving bevinden waarin de noodzakelijke nutriënten in voldoende mate beschikbaar zijn en de omstandigheden (pH, temperatuur, redoxcondities) voor groei gunstig zijn.

In deze zgn. exponentiële groeifase wordt de groei van de populatie bacteriën omschreven door het exponentiële groeimodel. Hebben we aan het begin van de exponentiële groeifase een aantal van N cellen, dan zal na een zekere tijd het aantal cellen zijn verdubbeld tot $2 \cdot N$. Deze tijd noemen we dan ook de verdubbelingstijd.

Bron: OU cursus Biologie van cellen (Middelbeek & Counotte-Potman, 1999)
Aandachtsgebied: Populatiegroei, Biologie van cellen

VOORBEELD 5.3
Toepassing: Microbiële groei

De E. coli-bacterie deelt zich onder laboratoriumomstandigheden elke 20 minuten. Als we deze periode van 20 minuten als tijdseenheid nemen en starten met 1 cel = 1 bacterie op $t = 0$, dan heeft deze zich op $t = 1$ gedeeld in twee bacteriën. Deze twee bacteriën hebben zich op hun beurt weer gedeeld op $t = 2$. Op dat tijdstip zijn er dus 4 bacteriën.

OPGAVE 5.2
Hoeveel bacteriën zijn er in de groeisituatie van voorbeeld 5.3 op $t = 3$? En op $t = 4$ en $t = 5$?
Hoeveel bacteriën zijn er op $t = 10$ en op $t = 15$?

OPGAVE 5.3
Stel dat we in voorbeeld 5.3 op $t = 0$ al 1000 bacteriën hebben.
a Hoeveel bacteriën zijn er dan op $t = 1$, op $t = 2$, op $t = 3$ en op $t = 4$?
b Hoeveel bacteriën zijn er dan op $t = 10$ en op $t = 15$?

Bij de bestudering van de groei van een kweek bacteriën ligt het meer voor de hand om uit te gaan van het gewicht van de kweek en om dit gewicht op vaste tijdstippen te meten.

OPGAVE 5.4
Stel dat we voor een kweek bacteriën de volgende meetgegevens hebben:

tijd	0	1	2	3	4	5	6
gewicht (in mg)	50	150	450	1350	4050	12.150	36.450

a Met hoeveel mg neemt het gewicht toe in het eerste uur? En in het tweede, derde, vierde en vijfde uur?
b Hoe verhoudt te toename van het gewicht in een uur zich tot het begingewicht van dat uur?
c En hoe verhoudt het gewicht op een bepaald tijdstip zich tot het gewicht van één uur voor dat tijdstip?

In opgave 5.4a en b zien we dat de toename in een bepaald uur evenredig is aan het begingewicht van dat uur. Dit zouden we kunnen gebruiken om de hoeveelheid na dat uur te berekenen, maar het is veel eenvoudiger om zoals in opgave 5.4c direct de verhouding tussen het gewicht op een bepaald tijdstip en het gewicht één uur voor dat tijdstip te bepalen: als $G(t)$ het gewicht op tijdstip t is, dan neemt het gewicht in het uur tussen tijdstip t en tijdstip $t+1$ toe met $2\times G(t)$. Er geldt dus $G(t+1)=G(t)+2G(t)=3G(t)$.

OPGAVE 5.5

a Met welke factor moet het gewicht op $t=6$ vermenigvuldigd worden om het gewicht op $t=7$ te krijgen?

b Bereken ook het gewicht van deze kweek bacteriën op $t=8$, $t=9$ en $t=10$.

2 Exponentiële toename en groeifactor

In voorbeeld 5.3 en opgaven 5.2 t/m 5.5 is de toename van het aantal bacteriën c.q. van het gewicht van de kweek evenredig aan het al aanwezige aantal/gewicht. In opgave 5.2 en 5.3 verdubbelt het aantal bacteriën iedere 20 minuten. De toename in een zekere periode van 20 minuten is dus precies gelijk aan de beginhoeveelheid. In opgave 5.4 en 5.5 verdrievoudigt het gewicht ieder uur. De toename in een uur is dus twee keer het begingewicht.

In opgave 5.3 en 5.5 hadden we het aantal bacteriën resp. het gewicht van de kweek als volgt kunnen berekenen:

$A(0)=1000$
$A(1)=A(0)\cdot 2=1000\cdot 2=2000$
$A(2)=A(1)\cdot 2=A(0)\cdot 2\cdot 2=1000\cdot 2^2=4000$
$A(3)=A(2)\cdot 2=A(0)\cdot 2^2\cdot 2=1000\cdot 2^3=8000$
$A(4)=A(3)\cdot 2=A(0)\cdot 2^3\cdot 2=1000\cdot 2^4=16000$

$G(0)=50$
$G(1)=G(0)\cdot 3=50\cdot 3=150$
$G(2)=G(1)\cdot 3=G(0)\cdot 3\cdot 3=50\cdot 3^2=450$
$G(3)=G(2)\cdot 3=G(0)\cdot 3^2\cdot 3=50\cdot 3^3=1350$
$G(4)=G(3)\cdot 3=G(0)\cdot 3^3\cdot 3=50\cdot 3^4=4050$

In opgave 5.3 krijgen we het aantal bacteriën op tijdstip t dus door het beginaantal t keer te verdubbelen en in opgave 5.5 krijgen we het gewicht van de kweek op tijdstip t door het begingewicht t keer te verdrievoudigen. Dit geeft de formules:

$$A(t)=A(0)\cdot 2^t=1000\cdot 2^t$$

en

$$G(t)=G(0)\cdot 3^t=50\cdot 3^t$$

In de tabel is ook duidelijk wat deze formules zouden moeten opleveren als we $t=1$ of $t=0$ invullen:

$t=1$:
Volgens de formule geldt $A(1)=A(0)\cdot 2^1=1000\cdot 2^1$ en $G(1)=G(0)\cdot 3^1=50\cdot 3^1$.
Dit moet gelijk zijn aan $A(1)=A(0)\cdot 2=1000\cdot 2$ en $G(1)=G(0)\cdot 3=50\cdot 3$.
Hieruit volgt: $2^1=2$; $3^1=3$ en algemeen $a^1=a$.

$t = 0$:
Volgens de formule geldt $A(0) = A(0) \cdot 2^0 = 1000 \cdot 2^0$ en
$G(0) = G(0) \cdot 3^0 = 50 \cdot 3^0$.
Dit moet gelijk zijn aan $A(0) = 1000$ en $G(0) = 50$.
Zo volgt: $2^0 = 1$; $3^0 = 1$ en algemeen $a^0 = 1$.

De formules $A(t) = A(0) \cdot 2^t = 1000 \cdot 2^t$ en $G(t) = G(0) \cdot 3^t = 50 \cdot 3^t$ zijn dus ook geldig voor $t = 0$ en $t = 1$.
In groeimodellen als die van opgave 5.2 t/m 5.5 wordt de beginhoeveelheid ($A(0)$ resp. $G(0)$) ook wel aangegeven met *b*. De factor waarmee we $A(t)$ of $G(t)$ moeten vermenigvuldigen om het aantal/het gewicht op het volgende tijdstip te krijgen, wordt de *groeifactor* genoemd en aangegeven met *g*.

In opgave 5.2 en 5.3 is de groeifactor gegeven doordat in voorbeeld 5.3 is aangegeven dat het aantal bacteriën om de twintig minuten verdubbelt.
In opgave 5.4 en 5.5 moet de groeifactor uit de tabel afgeleid worden. Deze is gelijk aan $G(1)/G(0)$, aan $G(2)/G(1)$ en algemeen aan $G(t + 1)/G(t)$.

Het groeimodel van opgaven 5.2 t/m 5.5 kan als volgt worden samengevat:

Als in een groeiproces de toename van de hoeveelheid $H(t)$ evenredig is aan de al aanwezige hoeveelheid $H(t)$, dan kan $H(t+1)$ berekend worden door $H(t)$ te vermenigvuldigen met een vast getal g . Dit getal heet de *groeifactor* van dit groeiproces.

Groeifactor

De hoeveelheid op een willekeurig tijdstip *t* kan dan ook direct berekend worden uitgaande van *b*, de hoeveelheid op tijdstip $t = 0$.

Voor $t = 0$ geldt dan uiteraard $H(0) = b \quad (= b \cdot g^0)$.
Voor $t = 1$ geldt $H(1) = H(0) \cdot g = b \cdot g \quad (= b \cdot g^1)$.
Voor $t = 2$ geldt $H(2) = H(1) \cdot g = (b \cdot g) \cdot g = b \cdot g^2$.
Voor $t = 3$ geldt $H(3) = H(2) \cdot g = (b \cdot g^2) \cdot g = b \cdot g^3$.
Algemeen geldt: $H(t) = H(t-1) \cdot g = b \cdot g^{t-1} \cdot g = b \cdot g^t$.

Omdat de invoervariabele *t* hier in de exponent van de groeifactor staat, wordt deze vorm van groei *exponentiële groei* genoemd. Bij een exponentieel groeiproces is de verandering per tijdseenheid gelijk aan:
$H(t+1) - H(t) = H(t) \cdot g - H(t) = (g-1) \cdot H(t)$. Deze verandering is dus evenredig aan de al aanwezige hoeveelheid $H(t)$ met evenredigheidsfactor $r = g - 1$.
Bij exponentiële groei is de verhouding $G(t + 1)/G(t)$ constant. Deze verhouding is precies de groeifactor *g*.

Exponentiële groei

OPGAVE 5.6
Bepaal de beginhoeveelheid *b* en de groeifactor *g* in voorbeeld 5.3 en in opgaven 5.3 en 5.4.

OPGAVE 5.7
Een schip loost olie op zee. Op $t = 0$ wordt de lozing vanuit de lucht ontdekt. Op dat moment is 1,5 km^2 zeeoppervlak vervuild. Helaas duurt het enige tijd voordat de marine bij het schip is. Tot die tijd kan men alleen de grootte van het verontreinigde oppervalk vanuit de lucht meten. Dit doet men iedere 20 minuten. Het resultaat van deze metingen ziet u in de volgende tabel.

tijdstip	0	1 (20 min.)	2 (40 min.)	3 (1 uur)	4 (80 min.)	5 (100 min.)	6 (2 uur)
vervuilde oppervlakte (in km^2)	1,5	3	6	12	24	48	96

a Waarom is er hier sprake van een exponentieel groeimodel?
b Bepaal de groeifactor over een periode van 20 minuten.
c Bepaal ook de groeifactor over een periode van 1 uur.
d Geef een functievoorschrift voor V, het vervuilde zeeoppervlak in km^2, als functie van de tijd t. Neem daarbij 20 minuten als tijdseenheid.
Neem aan dat de marine het schip 3 uur nadat de lozing ontdekt is, aanhoudt.
e Hoe groot is het vervuilde zeeoppervlak dan?

3 Exponentiële afname

Formules van de vorm $H(t) = b \cdot g^t$ kunnen ook ontstaan als de beginhoeveelheid in de loop van de tijd afneemt.

BOX 5.4
Toepassing: Radioactief afval (voorbeeld van radioactiviteit)

Ongeveer tien procent van de elektriciteit die we in Nederland gebruiken, is opgewekt door een kerncentrale. Deze vorm van energiewinning heeft voordelen – zoals de beperkte uitstoot van CO_2 – maar er kleven ook nadelen aan. Een van de problemen is het afval, dat gedurende een lange periode radioactief blijft.
Hier bekijken we het laag-radioactieve afval dat overblijft bij het winnen en verwerken van uraniumerts tot een bruikbare radioactieve uitgangsstof. Uraniumerts bevat doorgaans niet meer dan enkele tienden van procenten uranium. Bij uraniumwinning worden daarom grote hoeveelheden erts vermalen, waarbij de Uranium met zuur of base wordt geëxtraheerd. Het restant wordt geneutraliseerd en als een slibachtig restproduct in reservoirs op locatie opgeslagen.
In dit restant zullen echter radioactieve elementen overblijven, waaronder uranium en reactieve 'dochters' (ofwel vervalproducten) hiervan. De straling vanuit het restant neemt vervolgens over een lange tijdsduur geleidelijk af. Het verval wordt hierbij gedomineerd door een radioactieve isotoop van het element Thorium, het zogenaamde ^{230}Th. Deze isotoop heeft een halfwaardetijd van (afgerond) 75.000 jaar.

Bron: Clingendael International Energy Programme (2006), WISE Uranium project (http://www.wise-uranium.org/, geraadpleegd 23 april 2012), Milieucentraal (http://www.milieucentraal.nl/, geraadpleegd op 23 april 2012).
Aandachtsgebied: Radioactiviteit, Radioactief afval

VOORBEELD 5.4
Toepassing: Radioactief afval

Het restant van uraniumwinning heeft typisch een activiteit van zo'n 130 Bq per kg materiaal. Bij een reservoir van een goede 3 miljoen ton spreken we dus al gauw van een totale radioactiviteit van 400.000 MBq. Stel dat op een zeker moment ($t = 0$) inderdaad een reservoir met een straling van 400.000 MBq overblijft na het verwerken van de uraniumerts.
Na 75.000 jaar is de straling dan nog 200.000 MBq.
En na 150.000 jaar is de straling nog 100.000 MBq.

De becquerel (Bq) is de SI-eenheid voor radioactieve straling. Deze is gedefinieerd als het aantal atoomkernen dat per seconde radioactief vervalt.

OPGAVE 5.8
Bekijk het radioactief verval uit voorbeeld 5.4.
a Bereken de straling in MBq na 225.000 jaar en na 375.000 jaar.
Bij dit proces past ook een functie met een functievoorschrift van de vorm $S(t) = b \cdot g^t$, met als tijdseenheid de halfwaardetijd van 75.000 jaar (dus $t = 1$ na 75.000 jaar, $t = 2$ na 150.000 jaar, $t = 3$ na 225.000 jaar en $t = 4$ na 300.000 jaar).
b Bepaal b en g.
c Zal de straling ooit helemaal verdwijnen? En zal de straling op een gegeven moment zo goed als verdwenen zijn? Hoe groot is bijvoorbeeld de straling na 750.000 jaar?

BOX 5.5
Toepassing: Eersteorde chemische reactie

In een eerdere toepassing (box 3.1) beschreven we al de nuldeorde chemische reactie $A \rightarrow B + C$. Deze nuldeorde reactie is een vrij specifiek geval waarbij de reactiesnelheid onafhankelijk is van de concentratie van A.
Bij een *eersteorde* chemische reactie is de reactiesnelheid evenredig aan de concentratie van A. Omdat de concentratie van A afneemt, neemt de reactiesnelheid ook af. Een voorbeeld van een eersteorde scheikundige reactie is de zogenaamde eersteorde ontledingsreactie, zoals de hieronder beschreven ontleding van 1-chloorpropaan in propeen en waterstofchloride. Overigens wordt ook radioactief verval in de scheikunde een eersteorde reactie genoemd.

Bron: OU cursus Scheikunde voor Milieuwetenschappen (Holtkamp & van Wijnen, 2012)
Aandachtsgebied: Scheikunde, Reactiekinetiek

VOORBEELD 5.5
Toepassing: Eersteorde chemische reactie

Een goed voorbeeld van een eersteorde scheikundige reactie is de ontleding van 1-chloorpropaan in propeen en waterstofchloride. Deze zgn. ontledingsreactie wordt in (scheikundige) formulevorm beschreven als:

$$CH_3 - CH_2 - CH_2Cl \rightarrow CH_3 - CH = CH_2 + HCl$$

We bekijken een hoeveelheid in water opgelost 1-chloorpropaan met een concentratie N van precies 1 mol / liter. Zodra de reactie op gang komt, meten we de verandering van de concentratie van de oorspronkelijke stof 1-chloorpropaan als functie van de tijd.

Voor een aantal tijdstappen zijn de waarden van N gegeven:

tijdstip t (in seconden)	0	1	2	4	6	10
concentratie $N(t)$ (in mol/liter)	1,000	0,707	0,500	0,250	0,125	0,031

OPGAVE 5.9
Bekijk de chemische reactie uit voorbeeld 5.5.
a Met welke factor moeten we $N(0)$ vermenigvuldigen om $N(1)$ te krijgen?
b Vermenigvuldig $N(1)$ met het antwoord van vraag a.
Krijgt u precies $N(2)$ uit de tabel? Zo nee, waarom niet?
c Bij dit proces past ook een functie met een functievoorschrift van de vorm $H(t) = b \cdot g^t$
Bepaal b en g en controleer dat de overige tabelwaarden bij deze formule passen.
d Zal het 1-chloorpropaan ooit helemaal verdwijnen? En zal de concentratie op een gegeven moment zo goed als 0 zijn?

We zien dus dat ook bij exponentiële afname de hoeveelheid $H(t)$ gegeven wordt door een formule van de vorm $H(t) = b \cdot g^t$. De groeifactor g is nu kleiner dan 1.
Omdat $H(t+1) = H(t) \cdot g$ en $g < 1$, geldt $H(t+1) < H(t)$.

4 Procentuele toename en afname

Groei wordt ook vaak uitgedrukt in een groeipercentage. Ook dan kunnen we het groeiproces weergeven met een formule van de vorm $H(t) = b \cdot g^t$.

BOX 5.6
Toepassing: Bevolkingsgroei (voorbeeld van populatiegroei)

Ook de groei van de menselijke bevolking verloopt vaak exponentieel. Zo ligt de jaarlijkse groei sinds 1960 van de Nederlandse bevolking tussen de 0% en 1.5%, en van de wereldbevolking tussen de 1 en 2%. 'Zuivere' exponentiële groei vindt plaats wanneer het groeipercentage constant is. Bij bovengenoemde voorbeelden is dat niet het geval: de groei wordt steeds minder tussen 1960 en 2010. In een land als Oeganda ligt de jaarlijkse bevolkingsgroei echter op een relatief hoog en constant niveau van 3%.

Bron: OU cursus Ecosystems and human well-being (de Kraker, 2007), World Development Indicators (http://databank.worldbank.org, geraadpleegd op 24 april 2012)
Aandachtsgebied: Populatiegroei, Bevolkingsgroei

OPGAVE 5.10
In januari 1960 had Oeganda 6,8 miljoen inwoners. Het aantal inwoners van Oeganda nam volgens bovenstaande tussen 1960 en 2010 toe met 3% per jaar. Neem in deze opgave aan dat dit percentage juist is.
a Hoeveel inwoners kreeg Oeganda er bij in 1960?
Hoeveel inwoners had Oeganda dus in januari 1961?
b Hoeveel inwoners kreeg Oeganda er bij in 1961?
Hoeveel inwoners had Oeganda dus in januari 1962?

Als we de bevolkingsgroei van Oeganda in de rest van de periode 1960-2010 willen bestuderen, kunnen we natuurlijk op de manier van opgave 5.10 verder rekenen. Dan rekenen we per jaar eerst uit hoeveel inwoners er bij komen (3% van het aantal inwoners aan het begin van het jaar) en tellen we dit op bij het aantal inwoners aan het begin van het jaar.
Als we het aantal inwoners aan het begin van jaar t aangeven met $A(t)$, dan geldt dus voor het aantal inwoners aan het begin van het volgende jaar: $A(t+1) =$ (3% van $A(t)$) + $A(t)$.

CC BY NC ND

Dit kunnen we ook zó uitrekenen:

$$A(t+1) = 0,03 \cdot A(t) + A(t) = (0,03+1) \cdot A(t) = 1,03 \cdot A(t) = A(t) \cdot 1,03$$

Als we $t = 0$ nemen in 1960, dan volgt dus:

jaar	*t*	*A(t)* (in miljoenen)
1960	0	6,8
1961	1	$A(0) \cdot 1,03 = 6,8 \cdot 1,03 = 7,004$
1962	2	$A(1) \cdot 1,03 = A(0) \cdot 1,03 \cdot 1,03 = 6,8 \cdot 1,03^2 = 7,21412$
1963	3	$A(2) \cdot 1,03 = A(0) \cdot 1,03^2 \cdot 1,03 = 6,8 \cdot 1,03^3 \approx 7,430544$
1960 + *t*	*t*	$A(0) \cdot 1,03^t = 6,8 \cdot 1,03^t$

Een groeiproces met een toename van 3% (per jaar) komt dus overeen met een groeiproces met een groeifactor van 1,03 (over een jaar).

OPGAVE 5.11

De formule $A(t) = A(0) \cdot 1,03^t = 6.800.000 \cdot 1,03^t$ gaat er van uit dat Oeganda in 1960 *precies* 6,8 inwoners had en dat dit aantal ieder jaar met *precies* 3% toegenomen is. In de praktijk is de bevolkingstoename natuurlijk niet precies volgens deze formule verlopen. De werkelijke aantallen voor de jaren 1960, 1970, 1980, 1990, 2000 en 2010 vindt u in de tabel hieronder, afgerond op honderdduizenden.

jaar	*aantal inwoners* (in miljoenen)
1960	6,8
1970	9,4
1980	12,7
1990	17,7
2000	24,2
2010	33,4

Bereken het aantal inwoners van Oeganda in januari 1970 volgens de formule $A(t) = 6,8 \cdot 1,03^t$. Bedenk daarbij dat $t = 0$ in 1960.

OPGAVE 5.12

a Met hoeveel procent neemt het aantal inwoners van Oeganda volgens bovenstaande formule toe in 10 jaar?
b In hoeveel jaar verdubbelt het aantal inwoners van Oeganda volgens deze formule?

VOORBEELD 5.6

Het standaardvoorbeeld van procentuele groei is een kapitaal dat tegen een vaste rente op een bankrekening staat. Als de rente jaarlijks bijgeschreven wordt op deze rekening en er verder geen geld bijgestort of afgehaald wordt, neemt het saldo van deze rekening met een vast percentage toe.

OPGAVE 5.13

Petra heeft eind 2015 op haar 45ste verjaardag een leuke prijs gewonnen in de loterij en zij heeft besloten om van die prijs 1 miljoen euro vast te zetten op een bankrekening. Deze transactie is op 1 januari 2016 uitgevoerd en het vaste jaarlijkse rentepercentage bedraagt 5%. De rente wordt ieder jaar op 1 januari bijgeschreven.

a Hoeveel bedraagt het saldo van deze bankrekening in 2017, dus nadat er één keer rente is bijgeschreven?

b En hoeveel bedraagt het saldo in 2018?

c Geef de groeifactor van het saldo van de bankrekening en geef een formule die het saldo van de bankrekening geeft als functie van de tijd in jaren ($t = 0$ in 2016).

In 2042 is Petra 70 jaar en besluit zij het geld van deze bankrekening op te nemen als aanvulling op haar pensioen.

d Hoe groot is het saldo op deze bankrekening na de rentebijschrijving van 1 januari 2042?

e In hoeveel jaar verdubbelt het saldo op een bankrekening waarop jaarlijks 5% rente wordt bijgeschreven (en verder geen geld wordt bijgestort of afgehaald)?

Samengevat:
Als een grootheid met een vast percentage p per tijdseenheid toeneemt, dan groeit deze grootheid exponentieel met groeifactor $g = 1 + p/100$. De groeifunctie is dan

$$H(t) = b \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t.$$

Ook als een grootheid *afneemt* met een vast percentage per tijdseenheid, ontstaat een exponentiële groeiformule.

BOX 5.7
Toepassing: Overbevissing

Groeiende bevolking – en daarmee een groeiende consumptie – kan een flinke inbreuk maken op onze natuurlijke hulpbronnen. Een voorbeeld hiervan is overbevissing.
Elk jaar worden vissen geboren en zullen vissen sterven, bijvoorbeeld door visvangst. Is geboorte en sterfte even groot, dan is de vispopulatie in evenwicht. Zij blijft constant. Bij overbevissing echter, is de sterfte groter dan de geboorte en neemt de populatie dus elk jaar af. Stel bijvoorbeeld, dat de geboorte elk jaar 10% bedraagt van de dan aanwezige populatie vis. De visvangst echter, is hoger: elk jaar 20% van de aanwezige hoeveelheid vis. Het verschil tussen het geboorte- en sterftecijfer geeft dan aan hoeveel de populatie jaarlijks groeit of daalt. In dit geval dus een daling van 10% per jaar.

Bron: OU cursus Ecosystems and human well-being (de Kraker, 2009)
Aandachtsgebied: Visserij, Dynamiek van ecosystemen, Natuurlijke hulpbronnen

CC BY NC ND

OPGAVE 5.14
Neem aan dat in een bepaald zeegebied de haringstand op $t = 0$ gelijk aan 500.000 ton is en dat de populatie door overbevissing afneemt met 10% per jaar.
a Met hoeveel ton neemt de haringstand af tussen $t = 0$ jaar en $t = 1$ jaar?
b Wat is dus de haringstand op $t = 1$ jaar?
c Bereken op dezelfde manier de haringstand in dit zeegebied op $t = 2$ jaar.

OPGAVE 5.15
Met hoeveel procent neemt de haringstand in dit zeegebied af tussen $t = 0$ jaar en $t = 2$ jaar?

De haringstand op $t = 3$ jaar en op $t = 4$ jaar kunnen we vinden door op de manier van opgave 5.15 verder te rekenen. We kunnen ook eerst een formule afleiden warmee we deze hoeveelheden direct kunnen berekenen. Bekijk daarvoor de stappen van de berekening in opgave 5.14. We berekenen $A(t+1)$ door 10% van $A(t)$ te nemen en dit af te trekken van $A(t)$.
Er geldt dus:
$A(t+1) = A(t) - 0{,}1 \cdot A(t) = \left(1 - 0{,}1\right) \cdot A(t) = 0{,}9 \cdot A(t) = A(t) \cdot 0{,}9$.

Met $A(0) = 500.000$ volgt dan:

t	$A(t)$
0	500.000
1	$A(0) \cdot 0{,}9 = 500.000 \cdot 0{,}9 = 450.000$
2	$A(1) \cdot 0{,}9 = A(0) \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 500.000 \cdot 0{,}9^2 = 405.000$
3	$A(2) \cdot 0{,}9 = A(0) \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}9 = 500\,000 \cdot 0{,}9^3 = 364.500$
t	$A(0) \cdot 0{,}9^t = 500.000 \cdot 0{,}9^t$

Een groeiproces met een afname van 10% (per jaar) komt dus overeen met een groeiproces met een groeifactor van 0,9 (over één jaar).
Merk op dat de groeifactor gelijk is aan 1 – 10/100.

Algemeen geldt:
Bij een afname met p% hoort een groeifactor van $1 - \frac{p}{100}$.

OPGAVE 5.16
a Bereken de haringstand volgens bovenstaand model op $t = 10$.
b In welk jaar zal de haringstand volgens dit model voor het eerst onder de 100.000 ton zijn?

OPGAVE 5.17
Er wordt een vangstquotum ingesteld van 50.000 ton. Deze maatregel gaat echter pas in op $t = 2$. Neem aan dat de haringstand zonder bevissing met 10% per jaar zou toenemen.
a Leg uit dat de haringstand voor $t = 3$ dan gegeven wordt door $A(3) = 1{,}1 \cdot A(2) - 50.000$.
b Bereken voor deze situatie de haringstand op $t = 3$, $t = 4$ en $t = 5$.
c Hoe groot moet het vangstquotum zijn om te bereiken dat de haringstand na $t = 2$ weer toeneemt?

OPGAVE 5.18

Paul heeft eind 2015 ook een prijs gewonnen in de loterij. Hij heeft daarvan ook 1 miljoen euro op 1 januari 2016 op een bankrekening gezet, maar hij laat de rente (5%) ieder jaar direct uitbetalen en hij neemt ook ieder jaar op 1 januari 5% van het uitstaande saldo op, voor het eerst op 1 januari 2017.

a Hoeveel bedraagt het saldo op deze rekening op 31 december 2017?

b Welk bedrag ontvangt Paul dus in totaal op 1 januari 2018?

Jan rekent Paul voor dat 5% gelijk is aan 1 twintigste deel, dus dat hij na 20 jaar al het geld van deze rekening heeft opgenomen.

c Waarom klopt deze redenering niet?

De redenering van Jan kan ook ontkracht worden door het saldo te berekenen nadat Paul 20 keer een opname heeft gedaan, dat is dus na de opname van 1 januari 2036.

d Bereken de groeifactor over één jaar van het saldo op de rekening van Paul.

e Ga na dat het saldo na de geldopname van 1 januari 2036 gegeven wordt door $S(20) = 1.000.000 \cdot 0,95^{20}$ en bereken dit saldo.

Aangezien de rente op de rekening van Paul 5% per jaar is, ontvangt hij elk jaar in totaal 10% van het uitstaande saldo, Om zijn inkomen aan te vullen, heeft hij minimaal 10.000 euro per jaar nodig.

f In welk jaar ontvangt Paul voor het eerst minder dan 10.000 euro van deze rekening?

Samenvatting

Lineaire groei

Bij *lineaire groei* is de toename (of afname) per tijdseenheid van een grootheid H constant.
De groeifunctie wordt gegeven door $H(t) = at + b$, waarin $b = H(0)$.

Exponentiële groei

Bij *exponentiële groei* is de toename (of afname) van een grootheid H evenredig aan de al aanwezige hoeveelheid. De groeifunctie wordt gegeven door $H(t) = b \cdot g^t$, waarin $b = H(0)$.
De vermenigvuldigingsfactor g heet de *groeifactor*.

Exponentiële groei kan worden beschreven door
– het expliciet geven van de groeifactor (verdubbeling, verdrievoudiging, halvering)
– het geven van een tabel met functiewaarden, waarbij er een vaste verhouding bestaat tussen $H(t)$ en $H(t+1)$.
De groeifactor is dan $g = H(t + 1)/H(t)$.
– het geven van een *percentage* waarmee de hoeveelheid toeneemt of afneemt.
Bij een toename met p% is de groeifactor gelijk aan $g = 1 + p/100$;
bij een afname met p% is de groeifactor gelijk aan $g = 1 – p/100$.

Bij exponentiële groei wordt de tijdseenheid vaak zo gekozen, dat de gegevens gemakkelijk vertaald kunnen worden naar een groeiformule.

ZELFTOETS

1 a Voor een lineair groeiproces is gegeven: $H(0) = 15$ en $H(1) = 20$.
Stel een formule op die de hoeveelheid H geeft als functie van de tijd.
b Voor een exponentieel groeiproces is gegeven: $H(0) = 15$ en $H(1) = 20$.
Stel een formule op die de hoeveelheid H geeft als functie van de tijd.
c Voor een lineair groeiproces is gegeven: $H(1) = 20$ en $H(2) = 25$.
Stel een formule op die de hoeveelheid H geeft als functie van de tijd.
d Voor een exponentieel groeiproces is gegeven: $H(1) = 20$ en $H(2) = 25$.
Stel een formule op die de hoeveelheid H geeft als functie van de tijd.

2 Het gewicht van een kweek bacteriën is op $t = 0$ gelijk aan 350 milligram.
Het gewicht van deze kweek groeit met 2% per uur.
a Bereken het gewicht van deze kweek op $t = 2$ uur.
b Met hoeveel procent groeit het gewicht van deze kweek per dag?

3 Het aantal inwoners van Groeistad was in 2010 gelijk aan 100.000.
Dit aantal neemt toe met 15% per jaar.
a Bereken het aantal inwoners van Groeistad in 2020.
b In welk jaar heeft Groeistad voor het eerst meer dan 200.000 inwoners?

4 Het aantal inwoners van Leegloopdorp was in 2010 gelijk aan 10.000.
Dit aantal neemt af met 7% per jaar.
a Bereken het aantal inwoners van Leegloopdorp in 2020.
b In welk jaar heeft Leegloopdorp voor het eerst minder dan 5.000 inwoners?

5 De Algemene Bank biedt 1% rente per maand op een spaarrekening. De rente wordt maandelijks aan het saldo toegevoegd. De Volksbank biedt 13% rente per jaar.
Bij welke bank zou u uw spaargeld inleggen?

BOX 5.8
Toepassing: Bevolkingsgroei in New Towns

Na de Tweede Wereldoorlog werd besloten om de bevolkingsgroei van de regio Londen op te vangen door een ring van voorsteden rond Londen te bouwen, de zogenaamde New Towns. Meestal werd zo'n New Town ontwikkeld rond een bestaande kleine stad, of werden een aantal dorpen samengevoegd en uitgebouwd tot een nieuwe stad. In Nederland vond er vanaf de jaren 60 van de vorige eeuw een vergelijkbare ontwikkeling plaats in steden als Purmerend en Nieuwegein.
Eén van de New Towns bij Londen is Milton Keynes, waar het hoofdkwartier van onze collega's van de Britse Open University is gevestigd.

Bron: Wikipedia (http://nl.wikipedia.org/wiki/Milton_Keynes, geraadpleegd op 23 april 2012)

6 De (fictieve) stad *Calculus* is in 1955 officieel ingewijd als New Town. De ontwikkeling van het aantal inwoners van *Calculus* t/m 1970 is weergegeven in onderstaande tabel.

jaar	*aantal inwoners*
1955	50.000
1960	75.000
1965	112.500
1970	168.750

a Past er bij deze tabel een lineair groeimodel?
Zo ja, bereken dan het aantal inwoners volgens dit model in 1975.
Zo nee, leg uit waarom niet.
b Past er bij deze tabel een exponentieel groeimodel?
Zo ja, bereken dan het aantal inwoners volgens dit model in 1975.
Zo nee, leg uit waarom niet.

CC BY NC ND

Exponentiële functies

Introductie *151*

Leerkern *151*

1 De grafiek van een groeifunctie *151*
2 Terug in de tijd: negatieve exponenten *154*
3 Tijdseenheden delen: gebroken exponenten *157*
4 De grafiek van een groeifunctie nader bekeken *161*
5 De wetenschappelijke notatie van getallen *164*

Samenvatting *169*

Zelftoets *171*



CC BY NC ND

Leereenheid 6

Exponentiële functies

INTRODUCTIE

In leereenheid 5 hebben we exponentiële functies geïntroduceerd aan de hand van diverse groeisituaties. De algemene vorm van zo'n exponentiële functie is $f(t) = b \cdot g^t$. We hebben ons daarbij beperkt tot het uitrekenen van functiewaarden voor natuurlijke getallen, zoals $f(0) = b \cdot g^0 = b \cdot 1 = b$; $f(1) = b \cdot g^1 = b \cdot g$; $f(2) = b \cdot g^2$; $f(3) = b \cdot g^3$ etc.
In deze leereenheid zullen we bekijken hoe de *grafieken* van deze functies er uit zien en zullen we aan de hand van het groeiproces de definities toelichten van g^t, *als t geen natuurlijk getal* is.
Verder zullen we bekijken hoe de grafiek van een exponentiële functie zich gedraagt als t een zeer groot positief of negatief getal is en bekijken we de zogenaamde *wetenschappelijke notatie* waarmee de functiewaarden dan genoteerd worden.

LEERDOELEN
Na bestudering van deze leereenheid
- kent u de vijf belangrijkste *eigenschappen* voor het rekenen met machten.
- kent u de definitie van g^{-n} als n een positief geheel getal is
- kent u de betekenis van g^r als r een *breuk* is
- kunt u de betekenis van deze definities verklaren in een exponentieel groeimodel
- kent u de vorm, het domein en het bereik van de *grafiek* van een exponentiële groeifunctie
- weet u hoe de groeifactor van een exponentieel groeiproces verandert als de *tijdseenheid* verandert
- kunt u de *wetenschappelijke notatie* van zeer grote getallen en van getallen dicht bij 0 lezen en gebruiken.

LEERKERN

1 De grafiek van een groeifunctie

Om een indruk te krijgen van het verloop van exponentiële groeifuncties bekijken we eerst de grafieken van een paar van deze functies.

VOORBEELD 6.1
Toepassing: Microbiële groei

De E. coli bacterie deelt zich onder laboratoriumomstandigheden elke 20 minuten. Als we deze periode van 20 minuten als tijdseenheid nemen en starten met 1 cel = 1 bacterie op $t = 0$, dan heeft deze zich op $t = 1$ gedeeld in twee bacteriën. Deze twee bacteriën hebben zich op hun beurt weer gedeeld op $t = 2$ en de bacteriën die er dan zijn hebben zich op $t = 3$ nog een keer gedeeld. De aantallen bacteriën $A(t)$ op $t = 0$ t/m $t = 6$ zijn dus:

tijdstip t (tijdseenheid 20 minuten)	0	1	2	3	4	5	6
aantal bacteriën $A(t)$	1	2	4	8	16	32	64

CC BY NC ND

OPGAVE 6.1
Hoeveel bacteriën zijn er na 10 minuten (dus op $t = \frac{1}{2}$)?
En hoeveel na 30 minuten? En na 2 uur en 10 minuten?
Teken de grafiek van de functie $A(t)$ voor het domein $0 \le t < 5$.

In het model van voorbeeld 6.1 verandert het *aantal* bacteriën sprongsgewijs. Om de 20 minuten verdubbelt het aantal bacteriën in één keer. De groei van de bacteriën – en daarmee het *gewicht* van de totale bacteriepopulatie – verloopt echter niet sprongsgewijs. Vlak voor $t = 1$ is het gewicht van de ene bacterie waarmee we gestart zijn bijna verdubbeld, zodat er na de splitsing op $t = 1$ twee bacteriën zijn met elk hetzelfde gewicht als de eerste bacterie op $t = 0$. Het gewicht van de bacteriën groeit dus geleidelijk.
Verder is het natuurlijk niet realistisch om het experiment te beginnen met precies één bacterie. Meestal beginnen we met een kleine hoeveelheid bacteriën, een kweek genaamd, en geven we de omvang van die kweek aan met het gewicht.

VOORBEELD 6.2
Toepassing: Microbiële groei

Het gewicht G van een kweek E. coli bacteriën verdubbelt elke 20 minuten. Als we deze periode van 20 minuten als tijdseenheid nemen en starten met 1 mg op $t = 0$, dan geldt:

tijdstip t (tijdseenheid 20 minuten)	0	1	2	3	4	5	6
gewicht $G(t)$ (in mg)	1	2	4	8	16	32	64

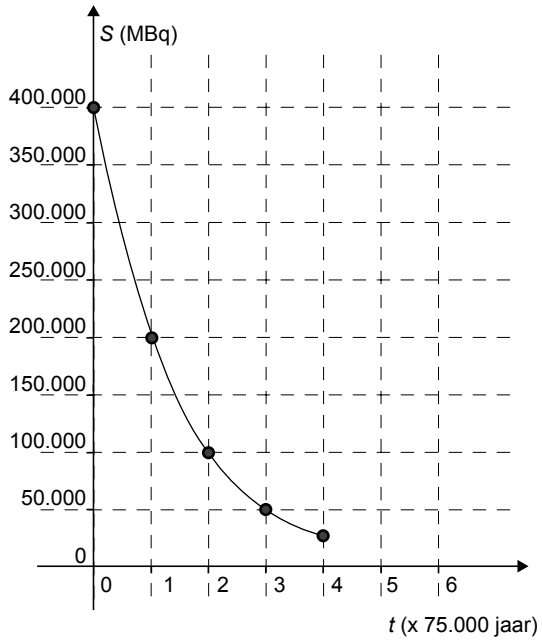
OPGAVE 6.2
Teken de grafiek van de functie $G(t)$ voor het domein $0 \le t \le 4$.
Teken daarbij eerst de punten die bij $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ en $t = 4$ horen en verbind deze punten met een vloeiende lijn.

VOORBEELD 6.3
Toepassing: Radioactief afval

In voorbeeld 5.4 wordt op een zeker tijdstip een hoeveelheid verwerkt uraniumerts met een totale radioactiviteit van 400.000 MBq in een reservoir gestort. De vervalsnelheid wordt bepaald door het radioactieve isotoop ^{230}Th met een halfwaardetijd van (afgerond) 75.000 jaar. De resterende straling wordt dan gegeven door:

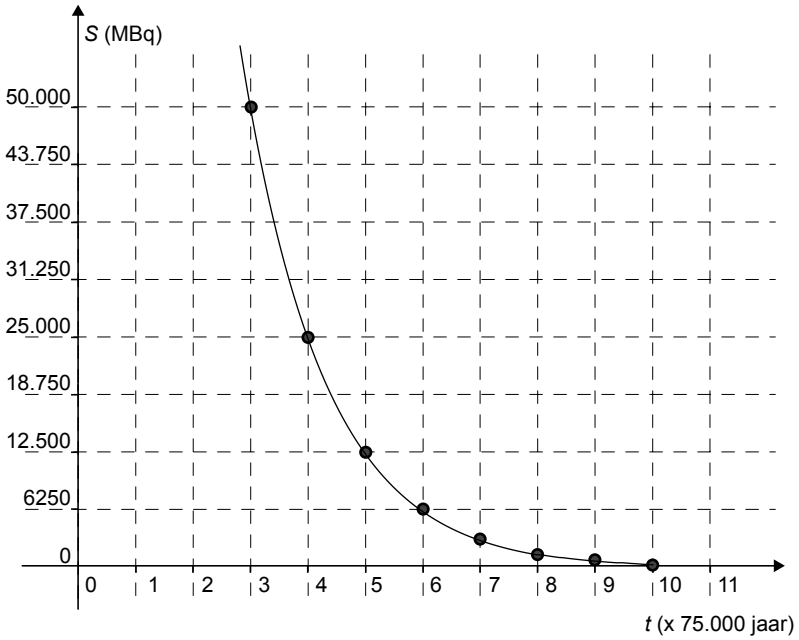
tijdstip t (tijdseenheid 75.000 jaar)	0	1	2	3	4
straling $S(t)$ (in MBq)	400.000	200.000	100.000	50.000	25.000

De grafiek van de functie $S(t)$ hieronder is ontstaan door bovenstaande punten in te tekenen in een passend assenstelsel en – omdat het radioactief verval gelijkmatig verloopt – deze te verbinden met een vloeiende lijn.



FIGUUR 6.1 Grafiek van $S(t) = 400.000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ voor $0 \le t \le 4$

Om het verloop van de grafiek voor $t \ge 4$ te onderzoeken hebben we de schaal van de verticale as verkleind (het deel van de grafiek voor $0 \le t < 3$ is daardoor niet meer zichtbaar) en hebben we de waarden van $S(t)$ voor $t = 5$, $t = 6$ etc. berekend. In figuur 6.2 zijn de bijbehorende punten ingetekend en verbonden met een vloeiende lijn.



FIGUUR 6.2 Grafiek van $S(t) = 400.000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ voor $3 \le t \le 10$

OPGAVE 6.3
Vul onderstaande tabel verder in en controleer dat de punten in figuur 6.2 corresponderen met deze tabel.

tijdstip t (tijdseenheid 75.000 jaar)	3	4	5	6	7	8	9	10
gewicht $S(t)$ (in MBq)	50.000	25.000						

OPGAVE 6.4
Kijk nog even terug naar opgave 5.8c.
Hoe verloopt de grafiek van $S(t)$ voor $t > 10$?

2 Terug in de tijd: negatieve exponenten

Tot nu toe hebben we het tijdstip $t = 0$ genomen als start van de groeiprocessen. Het kan echter ook dat het groeiproces op dat tijdstip al begonnen was. Dan heeft het ook zin om te praten over negatieve waarden van t als invoerwaarden van de groeifunctie.

VOORBEELD 6.4
Toepassing: Microbiële groei

Het gewicht G van een kweek E. coli bacteriën verdubbelt elke 20 minuten. In voorbeeld 6.2 was het uitgangspunt een gewicht van 1 mg op $t = 0$. Het kan natuurlijk dat de start van het groeiproces niet op $t = 0$ was, maar (bijvoorbeeld) 3 uur eerder. Dan is het gewicht op $t = 0$ ruim 500 keer het begingewicht.

OPGAVE 6.5
Leg uit dat het gewicht op $t = 0$ in bovenstaand voorbeeld ruim 500 keer zo groot is als het gewicht 3 uur voor $t = 0$.

OPGAVE 6.6
Als we bij een groeifactor 2 het gewicht op een zeker tijdstip t kennen, dan berekenen we het gewicht op het tijdstip $t+1$ door $G(t)$ te verdubbelen: $G(t+1) = G(t) \cdot 2$.
Hoe berekenen we dan het gewicht op tijdstip $t-1$?

OPGAVE 6.7
In voorbeeld 6.4 nemen we voor het rekengemak aan dat het gewicht op $t = 0$ precies 1 gram is. Het tijdstip 20 minuten voor $t = 0$ geven we aan met $t = -1$.
40 minuten voor $t = 0$ geldt $t = -2$.
1 uur voor $t = 0$ geldt $t = -3$.
2 uur voor $t = 0$ geldt $t = -6$.
En 3 uur voor $t = 0$ geldt $t = -9$.
Bereken het gewicht in grammen van de kweek op deze tijdstippen, uitgaande van $G(0) = 1$ gram en verdubbeling van het gewicht in 20 minuten.

Bij exponentiële groei met groeifactor 2 en begingewicht 1 gram hoort de groeiformule $G(t) = 2^t$.
Als we $t = -1$ substitueren in deze formule krijgen we $G(-1) = 2^{-1}$.
In opgave 6.7 hebben we gevonden dat het gewicht op $t = -1$ gelijk is aan 1/2 gram.
Als $G(-1) = 2^{-1}$ het gewicht op $G = -1$ geeft, dan moet dus gelden:
$2^{-1} = 1/2$. Dit is precies de formele definitie van de macht 2^{-1}.

Algemeen geldt:

$a^{-1} = 1/a$

Voor ieder reëel getal a met uitzondering van $a = 0$ is de macht a^{-1} gelijk aan $1/a$, dat is het omgekeerde van a.

OPGAVE 6.8
Waarom wordt er in de bovenstaande definitie een uitzondering gemaakt voor $a = 0$?

Als we $t = -2$ substitueren in de formule $G(t) = 2^t$ krijgen we $G(-2) = 2^{-2}$. In opgave 6.7 hebben we gevonden dat het gewicht op $t = -2$ gelijk is aan 1/4 gram. Als $G(-2) = 2^{-2}$ het gewicht op $t = -2$ geeft, dan moet dus gelden: $2^{-2} = 1/4$.

In opgave 6.7 hebben we ook de gewichten gevonden op $t = -3$, $t = -6$ en $t = -9$. Deze waren gelijk aan

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3} = \tfrac{1}{8},\ \left(\tfrac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^6} = \tfrac{1}{64} \text{ en } \left(\tfrac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{2^9} = \tfrac{1}{512}.$$

Als de formule $G(t) = 2^t$ het gewicht op deze tijdstippen geeft, dan moet dus gelden

$$2^{-3} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3},\quad 2^{-6} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^6} \quad \text{en} \quad 2^{-9} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{2^9}$$

Dit is geheel in overeenstemming met de formele definitie van de macht 2^{-n}: Als n een positief geheel getal is, dan geldt $2^{-n} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$.

Algemeen geldt:

$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$

Voor ieder reëel getal a met uitzondering van $a = 0$ en voor ieder positief geheel getal n is de macht a^{-n} gelijk aan $\left(\tfrac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$.

OPGAVE 6.9
In paragraaf 7 van leereenheid 1 worden vijf eigenschappen voor machten besproken.
Toon met behulp van deze eigenschappen aan dat $\left(\tfrac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$.

cc BY NC ND

OPGAVE 6.10

In opgave 5.4 hebben we een kweek bacteriën bekeken waarvan we de volgende meetgegevens hebben:

tijd t (in uren)	0	1	2	3	4	5
gewicht $G(t)$ (in mg)	50	150	450	1350	4050	12.150

Neem aan dat het gewicht van deze kweek op $t = 0$ al een aantal uren aan het groeien is met groeifactor 3.

a Hoe groot was dan het gewicht 1 uur voor $t = 0$?

En hoe groot was het gewicht 4 uur voor $t = 0$?

b Met welke factor moeten we $G(0)$ vermenigvuldigen om het gewicht op $t = -1$ te krijgen?

En met welke factor moeten we $G(0)$ vermenigvuldigen om het gewicht op $t = -4$ te krijgen?

Bij bovenstaande tabel hoort de groeiformule $G(t) = 50 \cdot 3^t$.

Op $t = -1$ geldt volgens deze formule $G(-1) = 50 \cdot 3^{-1}$.

Op $t = -4$ geldt volgens deze formule $G(-4) = 50 \cdot 3^{-4}$.

c Bereken $G(-1)$ en $G(-4)$ met behulp van de definities van a^{-1} en a^{-n} die eerder in deze paragraaf gegeven zijn. Vergelijk de uitkomsten met uw antwoorden van vraag a en b.

OPGAVE 6.11

In paragraaf 5.4 hebben we gezien dat het aantal inwoners van Oeganda goed benaderd wordt door de formule $A(t) = 6{,}8 \cdot 1{,}0323^t$, ($t$ in jaren, $t = 0$ in 1960). Neem aan dat deze formule ook geldig is voor de periode 1950-1960.

a Bereken het aantal inwoners van Oeganda volgens deze formule in 1959, 1958 en in 1950.

b Met welke factor moet $A(t)$ vermenigvuldigd worden om $A(t-1)$ te berekenen?

OPGAVE 6.12

Het aantal inwoners van land L neemt sinds 1960 toe met 50% per 10 jaar. In 2000 had land L 9.000.000 inwoners.

a Hoeveel inwoners had land L in 2010?

b Hoeveel inwoners had land L in 1990? En in 1980?

c Met welke factor moet je het aantal inwoners in 1980 vermenigvuldigen om het aantal inwoners in 1970 en 1960 te berekenen?

Het aantal inwoners van land L wordt gegeven door de formule

$$A(t) = 9.000.000 \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^t$$

(tijdseenheid 10 jaar; $t = 0$ in 2000).

d Controleer deze formule.

e Hoe groot is het aantal inwoners volgens deze formule op $t = -1$ en op $t = -2$?

Welke jaren corresponderen met deze tijdstippen?

Controleer dat uw antwoorden op deze vraag overeenkomen met uw antwoorden op vraag b.

OPGAVE 6.13
Het aantal inwoners van Leegloopdorp neemt sinds 2000 af met 7% per jaar. In 2010 had Leegloopdorp 10.000 inwoners. Het aantal inwoners van Leegloopdorp wordt dus gegeven door $A(t) = 10.000 \cdot 0,93^t$ (t in jaren, $t = 0$ in 2010).
a Bereken het aantal inwoners van Leegloopdorp volgens deze formule in 2009 en in 2000.
b Met welke factor moet $A(t)$ vermenigvuldigd worden om $A(t-1)$ te berekenen?

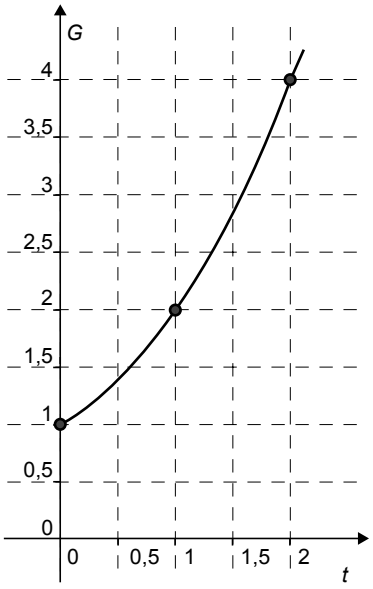
3 Tijdseenheden delen: gebroken exponenten

In opgave 6.2 hebt u de grafiek getekend van de functie $G(t) = 2^t$. Hierin is G het gewicht van een kweek bacteriën in mg en t de tijd met 20 minuten als tijdseenheid. Bij deze functie hoort onderstaande tabel:

tijd (in minuten)	0	20	40	60
tijdstip t	0	1	2	3
gewicht $G(t)$ (in mg)	1	2	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$

De grafiek gaat door de punten (0, 1), (1, 2), (2, 4) en (3, 8). Hieronder ziet u een deel van deze grafiek.

Omdat we mogen aannemen dat het gewicht van de bacteriën niet sprongsgewijs, maar gelijkmatig toeneemt, zijn de punten (0, 1), (1, 2) en (2, 4) met een vloeiende lijn verbonden.



FIGUUR 6.3 $G(t) = 2^t$

Met deze grafiek kunnen we een schatting maken van het gewicht van de kweek op tussengelegen tijdstippen, bijvoorbeeld 10 minuten na $t = 0$. Dan geldt $t = 0,5$ en we zien dat het gewicht dan ongeveer 1,4 gram is.

cc BY NC ND

De vraag is nu of we het gewicht van de kweek 10 minuten na $t = 0$ ook kunnen berekenen. Om deze berekening mogelijk te maken, veranderen we eerst de tijdseenheid naar 10 minuten. De bijbehorende groeifunctie noemen we *H*. Dan volgt:

tijd (in minuten)	0	10	20	30	40	50	60
tijdstip *t*	0	1	2	3	4	5	6
gewicht *H*(*t*) (in mg)	1	?	2	??	4	???	8

De gewichten na 0, 20, 40 en 60 minuten zijn bekend uit de oorspronkelijke groeifunctie $G(t) = 2^t$ met 20 minuten als tijdseenheid. Het gewicht na 10 minuten is vooralsnog de grote onbekende in deze tabel, maar als we dit gewicht gelijk stellen aan *P*, dan kunnen we er wel mee rekenen. Bedenk daartoe dat *P* niet alleen het gewicht na 10 minuten is, maar ook de groeifactor over 10 minuten.
De groeifunctie *H* heeft dus begingewicht 1 mg en groeifactor *P*. De groeiformule is dan $H(t) = P^t$.
Dit geeft:

tijd (in minuten)	0	10	20	30	40	50	60
tijdstip *t*	0	1	2	3	4	5	6
gewicht *H*(*t*) (in mg)	1	P	P^2	P^3	P^4	P^5	P^6

Aangezien het voor het gewicht niet uitmaakt welke tijdseenheid we nemen, zal het gewicht na 20 minuten in beide bovenstaande tabellen hetzelfde zijn. Hieruit volgt: $P^2 = 2$. Het gewicht na 10 minuten is dus gelijk aan $P = \sqrt{2}$.

Het gewicht van de kweek na 10 minuten kunnen we ook uitdrukken in de oorspronkelijke groeiformule $G(t) = 2^t$, waarbij de tijdseenheid 20 minuten is. In deze formule komt 10 minuten overeen met een halve tijdseenheid, dus het gewicht na 10 minuten is gelijk aan $G(\frac{1}{2}) = 2^{\frac{1}{2}}$.
$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ Bovenstaande kunnen we combineren tot: $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

Het gewicht van de kweek op $t = 1$ minuut kunnen we op dezelfde manier uitwerken. Noem dit gewicht *Q* en neem 1 minuut als tijdseenheid. Dan wordt het gewicht van de kweek in mg als functie van de tijd in minuten gegeven door $H(t) = Q^t$. Op $t = 20$ minuten is het gewicht dan gelijk aan $H(20) = Q^{20}$. Dit moet weer gelijk zijn aan het eerder gevonden gewicht na 20 minuten, dus volgt: $Q^{20} = 2$. Het gewicht na 1 minuut is dus gelijk aan $Q = \sqrt[20]{2}$.

In de oorspronkelijke groeiformule $G(t) = 2^t$ komt 1 minuut overeen met 1/20 tijdseenheid.
Het gewicht na 1 minuut wordt dan gegeven door $G(\frac{1}{20}) = 2^{\frac{1}{20}}$.
$2^{\frac{1}{20}} = \sqrt[20]{2}$ Combinatie van deze twee uitwerkingen geeft $2^{\frac{1}{20}} = \sqrt[20]{2}$.

We kunnen de oorspronkelijke tijdseenheid natuurlijk ook nog op andere manieren aanpassen.
Met 2 minuten (= $\frac{1}{10}$ × 20 minuten) als tijdseenheid volgt volgens bovenstaande redenering $2^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{2}$.
Met 4 minuten (= $\frac{1}{5}$ × 20 minuten) als tijdseenheid volgt $2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}$.
Met 5 minuten (= $\frac{1}{4}$ × 20 minuten) als tijdseenheid volgt $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$.
Met 6 minuten en 40 seconden (= $\frac{1}{3}$ × 20 minuten) als tijdseenheid volgt $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$.

En bovenstaande redenering hadden we ook kunnen toepassen met een andere groeifactor, zoals 3, 4 of $\frac{1}{2}$.

$g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$

Algemeen geldt:
Voor $g > 0$ en $n = 2, 3, 4,$ etc. is $g^{\frac{1}{n}}$ gelijk aan $\sqrt[n]{g}$

Deze definitie kan ook worden afgeleid door eigenschap 3 van machten te combineren met de definitie van de *n*-de machts wortel:
Zie leereenheid 1, paragraaf 7.
Eigenschap 3 luidt: $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$.
Met $a = g$ en $m = \frac{1}{n}$ geeft dit:

$$\left(g^{\frac{1}{n}}\right)^n = g^{\frac{1}{n} \cdot n} = g^1 = g .$$

Volgens deze eigenschap is $g^{\frac{1}{n}}$ het getal waarvan de *n*-de macht gelijk is aan *g*, dat is dus precies $\sqrt[n]{g}$.

OPGAVE 6.14
Bereken met een rekenmachine het gewicht van de kweek bacteriën volgens de formule $G(t) = 2^t$ (tijdseenheid 20 minuten) op de volgende tijdstippen. Geef het antwoord afgerond op vier cijfers achter de komma.
a 1 minuut na $t = 0$ ($t = 1/20$)
b 5 minuten na $t = 0$ ($t = 1/4$)
c 10 minuten na $t = 0$ ($t = 1/2$)

OPGAVE 6.15
Het gewicht van een andere kweek bacteriën groeit ook exponentieel.
Op $t = 0$ is het gewicht van deze kweek 3 mg.
Op $t = 1$ dag is het gewicht van deze kweek 48 mg.
a Geef het functievoorschrift voor het gewicht van deze kweek in mg als functie van de tijd in dagen.
b Hoe groot is het gewicht van deze kweek na 6 uur ($t = \frac{1}{4}$ dag) en na 12 uur ($t = \frac{1}{2}$ dag)?
c En hoe groot is het gewicht van deze kweek na 18 uur?
d Bepaal de groeifactor van het gewicht van deze kweek over een periode van 12 uur en over een periode van 6 uur.
e Hoe groot is de groeifactor van deze kweek over een periode van één uur?

cc BY NC ND

OPGAVE 6.16

In voorbeelden 4.4 en 6.3 hebben we het verval van het radioactieve isotoop 230-Thorium (^{230}Th) bestudeerd. Daarbij hebben we de halfwaardetijd (75.000 jaar) als tijdseenheid genomen. Als er op $t = 0$ in een reservoir verwerkt uraniumerts een radioactiviteit is van 400.000 MBq, dan wordt de radioactiviteit als functie van de tijd gegeven door

$$H(t) = 400.000 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^t$$

a Hoeveel radioactiviteit is er 37.500 jaar na $t = 0$?
b En 1000 jaar na $t = 0$?
c Bereken de groeifactor van de radioactiviteit over 1000 jaar.

In opgave 6.15c wordt gevraagd naar het gewicht van een kweek bacteriën op t = 3/4 dag. Daar hebben we dit gewicht gevonden door 6 uur = 1/4 dag als tijdseenheid te nemen. De groeifactor over 6 uur is 2 (zie opgave 6.15b). Het gewicht na 3×6 uur = 18 uur wordt dan gegeven door $G(3) = 3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = 24$.

Om dit gewicht direct met de groeifunctie $G(t) = 3 \cdot 16^t$ te bepalen (dus met één dag als tijdseenheid), moeten we weten wat $16^{\frac{3}{4}}$ betekent. Deze macht kunnen we bepalen met behulp van eigenschap 3 van machten: $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$, ofwel $a^{m \cdot n} = \left(a^m\right)^n$.
Met $a = 16$, $m = \frac{1}{4}$ en $n = 3$ volgt: $16^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{1}{4} \cdot 3} = \left(16^{\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$.
Zo vinden we: $G(\frac{3}{4}\text{ dag}) = 3 \cdot 16^{\frac{3}{4}} = 3 \cdot 8 = 24$, uiteraard precies hetzelfde resultaat als hierboven.

Bovenstaande redenering is ook toepasbaar voor andere groeifactoren en voor andere tijdseenheden. Daarom kunnen we algemeen definiëren:

$g^{\frac{m}{n}} = \left(g^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{g}\right)^m$ Voor $g > 0$ is $g^{\frac{m}{n}}$ gelijk aan $\left(g^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{g}\right)^m$

Machten met een negatieve breuk als exponent bepalen we door bovenstaande definitie te combineren met de definitie voor negatieve exponenten die in paragraaf 2 is besproken:

$$g^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{g^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{g}\right)^m}$$

Hiermee is g^r formeel gedefinieerd voor alle grondtallen $g > 0$ en voor alle breuken r in de exponent.

OPGAVE 6.17

Bereken zonder rekenmachine:

a	$8^{\frac{1}{3}}$	d	$8^{\frac{2}{3}}$	g	$4^{-\frac{1}{2}}$
b	$9^{\frac{1}{2}}$	e	$9^{\frac{3}{2}}$	h	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$
c	$32^{\frac{1}{5}}$	f	$32^{\frac{2}{5}}$	i	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}$

OPGAVE 6.18

Bereken:

a	$4^{\frac{1}{3}}$	d	$4^{\frac{2}{3}}$	g	$8^{-\frac{1}{2}}$
b	$10^{\frac{1}{2}}$	e	$10^{\frac{3}{2}}$	h	$\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{2}}$
c	$16^{\frac{1}{5}}$	f	$16^{\frac{2}{5}}$	i	$\left(\frac{1}{8}\right)^{-1\frac{1}{2}}$

4 De grafiek van een groeifunctie nader bekeken

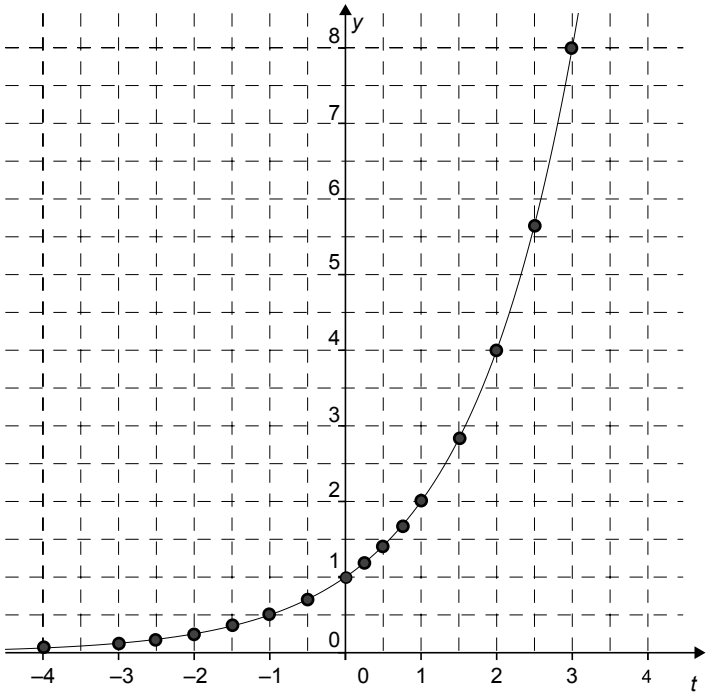
Nu 2^r gedefinieerd is voor alle breuken r, kunnen we de grafiek van de functie $f(t) = 2^t$ nader onderzoeken. Daartoe maken we eerst een tabel:

t	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3
2^t	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8

Met de rekenmachine kunnen we ook een aantal tussengelegen punten uitrekenen:

t	$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
2^t	0,1768	0,3536	0,7071	1,1892	1,4142	1,6818	2,8284	5,6569

Met behulp van een computerprogramma kunnen we weer veel meer punten uitrekenen. In de grafiek hieronder zijn bovenstaande punten handmatig ingetekend en zijn de tussengelegen punten door de computer berekend en ingetekend.



FIGUUR 6.4 Grafiek van $f(t) = 2^t$

De grafiek lijkt een ononderbroken lijn te zijn, maar er zijn nog waarden van t waarvoor de macht 2^t niet gedefinieerd is: irrationale getallen als $\sqrt{2}$ en π kunnen niet als een breuk worden geschreven.

cc BY NC ND

Gelukkig is het wel mogelijk om irrationale getallen zo goed te benaderen met een breuk dat het verschil tussen de benadering en de echte waarde verwaarloosbaar klein is. Zo is het verschil tussen $\sqrt{2}$ en 1,414213562373095 kleiner dan 0,0000000000000001. Dankzij de ontwikkeling van supercomputers is het zelfs mogelijk om miljoenen decimalen te geven van irrationale getallen. Een boekje met de eerste miljard decimalen van π heeft zelfs een plaatsje gevonden in het *Guinness Book of Records* (als saaiste boek ter wereld).
Dit maakt het mogelijk om $2^{\sqrt{2}}$ zeer nauwkeurig te benaderen. Daarmee is het feit dat we geen formele definitie kennen van dit getal gereduceerd tot een theoretisch probleem. In de praktijk kunnen we de waarde van $2^{\sqrt{2}}$ benaderen met een rekenmachine of (als we een benadering in veel meer decimalen willen) met een computer.

OPGAVE 6.19
Bepaal met een rekenmachine een benadering van $t = \sqrt{2}$ en $f(t) = 2^{\sqrt{2}}$.
Rond de antwoorden af op zes cijfers achter de komma.
Controleer dat het zo gevonden punt $\big(t, f(t)\big)$ op de grafiek van figuur 6.4 ligt.

Voor alle reële getallen *r* kunnen we nu 2^r bepalen. Als *r* een breuk is, kan dat met de in de vorige paragraaf gegeven definities, als *r* een irrationaal getal is doen we dat op de hierboven beschreven manier. Dit betekent dat we in de functie $f(t) = 2^t$ alle reële getallen als invoerwaarde kunnen nemen. Het *domein* van de functie $f(t) = 2^t$ is dus praktisch gezien $\mathbb{R}$.

Het domein van $f(t) = 2^t$ is praktisch gezien $\mathbb{R}$.

Om het bereik van *f* te bepalen, kijken we eerst naar het verloop van de grafiek voor $t < -4$.

OPGAVE 6.20
Gegeven de functie $f(t) = 2^t$.
a Ga na: $f(t-1) = \frac{1}{2} \cdot f(t)$.
b Bereken $f(-5)$, $f(-6)$, $f(-7)$, $f(-8)$, $f(-9)$ en $f(-10)$ uitgaande van $f(-4) = \frac{1}{16}$.
c Wat gebeurt er met $f(t)$ als t een steeds groter negatief getal wordt?
En wat gebeurt er dan met de grafiek?

In opgave 6.20 zien we dat de waarde van $f(t)$ nadert tot 0 als *t* een steeds groter negatief getal wordt. Echter, $f(t)$ blijft altijd positief en wordt zelf dus nooit gelijk aan 0. Als we één tijdseenheid teruggaan, halveert de waarde van $f(t)$, maar de helft van een klein positief getal is nog steeds een (kleiner) positief getal. De grafiek van de functie *f* nadert de *t*-as willekeurig dicht, maar raakt deze nooit. De *t*-as heet de *asymptoot* van de grafiek van *f*.

Asymptoot

Naast het feit dat de *t*-as de asymptoot van de grafiek van *f* is, kunnen we uit bovenstaande ook concluderen dat voor alle uitvoerwaarden *y* van deze functie geldt $y > 0$.
Anderzijds wordt 2^t voor positieve waarden van *t* willekeurig groot.
$2^{100} = 1267650600228229401496703205376$ en 2^{100000} is een getal van meer dan 30.000 cijfers. Omdat de grafiek een ononderbroken lijn is, zijn dus alle positieve getallen *y* uitvoerwaarde van *f*.
Het *bereik* van de functie *f* is dus het interval $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

De grafiek van $f(t) = 2^t$ is over het gehele domein stijgend.

Tot slot is een belangrijk kenmerk van de grafiek dan als t toeneemt, $f(t)$ ook toeneemt. De grafiek van $f(t) = 2^t$ is dus over het hele domein *stijgend*.

OPGAVE 6.21

De functie $g(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ beschrijft een groeiproces met een beginhoeveelheid 1 op $t = 0$ en een halveringstijd van 1 tijdseenheid.

a Vul de onderstaande tabel in zonder rekenmachine:

t	–3	–2	–1	0	1	2	3
$\left(\frac{1}{2}\right)^t$							

b Vul de onderstaande tabel in met rekenmachine:

t	$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^t$						

c Vergelijk deze tabellen met de tabel van $f(t) = 2^t$ boven figuur 6.4.
Wat valt u op?

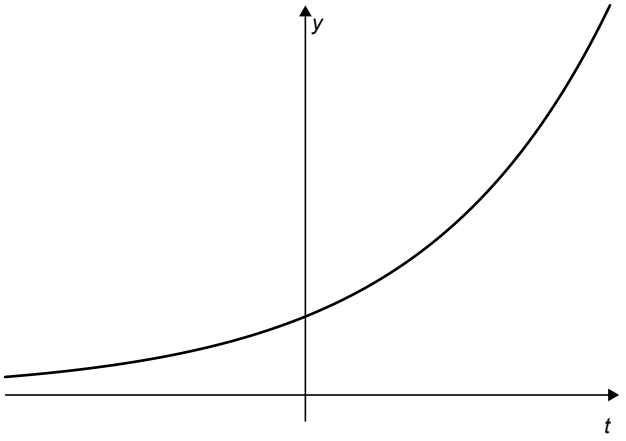
d Hoe verloopt de grafiek van g als t een steeds groter positief getal wordt? En als t een steeds groter negatief getal wordt?

e Teken de grafieken van f en g in één figuur.
Wat is het verband tussen deze twee grafieken?

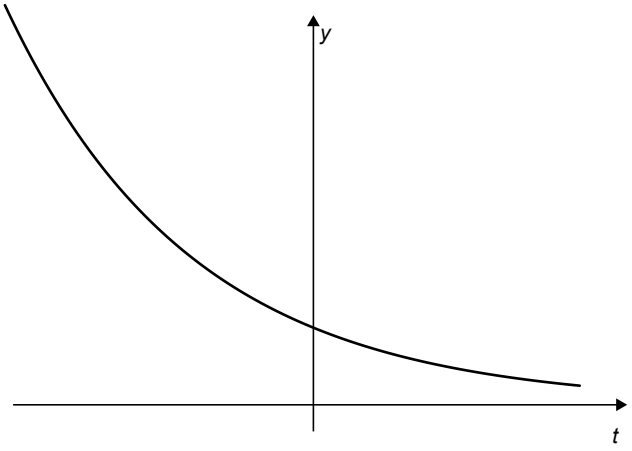
f Geef het domein, het bereik en de asymptoot van de grafiek van g.
Is deze grafiek stijgend of dalend?

Merk op dat het verband tussen de grafieken van f en g verklaard kan worden met de definitie van negatieve machten: $f(-t) = 2^{-t} = \left(\frac{1}{2}\right)^t = g(t)$.

Het verloop van de grafiek van een exponentiële groeifunctie hangt af van de soort groei:
– bij exponentiële toename is de grafiek van $f(t) = g^t$ stijgend. Dit is het geval als $g > 1$.
– bij exponentiële afname is de grafiek van $f(t) = g^t$ dalend. Dit is het geval als $0 < g < 1$.
De overige kenmerken van deze functies zijn voor alle groeifactoren hetzelfde: Het domein is $\mathbb{R}$; het bereik is het interval $\langle 0, \rightarrow \rangle$; de grafiek heeft de t-as als horizontale asymptoot.



FIGUUR 6.5 $f(t) = g^t$ met $g > 1$



FIGUUR 6.6 $f(t) = g^t$ met $0 < g < 1$

Opmerking

Het grondtal van een exponentiële functie kan niet gelijk zijn aan 0, want 0^t bestaat niet als t negatief is. Het grondtal kan ook niet negatief zijn, want $g^{\frac{1}{2}} = \sqrt{g}$ bestaat niet als g negatief is.
Het grondtal kan wel 1 zijn, maar dan krijgen we de constante functie $f(t) = 1^t = 1$.

OPGAVE 6.22

In opgave 5.14 en 5.15 hebben we een model van exponentiële afname opgesteld voor de ontwikkeling van de haringstand in een bepaald zeegebied. Daarbij zijn we uitgegaan van een haringstand van 500.000 ton op $t = 0$ die afneemt met 10% per jaar. De haringstand in tonnen als functie van de tijd in jaren wordt dan gegeven door $A(t) = 500.000 \cdot 0,9^t$.

a Vul de onderstaande tabel in:

t	0	1	2	5	10	15	20
$A(t)$							

b Hoe groot is de haringstand volgens de formule $A(t) = 500.000 \cdot 0,9^t$ op $t = \frac{1}{2}$ en op $t = 3\frac{1}{3}$?
c Teken de grafiek van de functie A voor $0 \le t \le 20$.
d Waarom geeft deze grafiek geen precies beeld van de haringstand op ieder moment van ieder jaar (denk aan winter, zomer en broedseizoen)?

5 De wetenschappelijke notatie van getallen

Kijk nog eens naar de functie $f(t) = 2^t$.
We hebben al geconstateerd dat als t een groot positief getal is, 2^t een zeer groot positief getal is en als t een groot negatief getal is, 2^t een getal is heel dicht bij 0 (maar wel positief).

OPGAVE 6.23

Bereken met een rekenmachine: 2^{10}, 2^{20}, 2^{30}, 2^{40} en 2^{50}.

De meeste rekenmachines gebruiken voor 2^{40} en 2^{50} een speciale notatie. Sommige doen dit ook al voor 2^{30}. De reden hiervoor is dat de antwoorden te veel cijfers bevatten om in het scherm weer te geven. De

meeste grafische rekenmachines geven bijvoorbeeld getallen in maximaal 10 cijfers. Als er meer cijfers zijn wordt een variant van de zogenaamde wetenschappelijke notatie voor getallen gebruikt.

OPGAVE 6.24

a Controleer dat 2^{20} net iets groter is dan 1.000.000.
b Laat zien dat $2^{40} = \left(2^{20}\right)^2$.
c Hoe groot is 2^{40} dus ongeveer?
Hoeveel cijfers heeft dit getal?

Wetenschappelijke notatie

In de natuurwetenschappen komen we vaak zeer grote getallen tegen. Twee voorbeelden hiervan zijn de afstand van de aarde tot de zon in kilometers en het getal van Avogadro (zie verderop in deze leereenheid). Dergelijke grote getallen worden meestal niet helemaal uitgeschreven. Ten eerste zou dat de leesbaarheid niet echt bevorderen, ten tweede zijn er vaak maar een beperkt aantal cijfers van het getal bekend, vermelden van meer cijfers zou dan een nauwkeurigheid suggereren die er niet is. Daarom wordt voor grote getallen de *wetenschappelijke notatie* gebruikt. In deze notatie wordt het getal geschreven als een product van een macht van 10 met een getal tussen 1 en 10.

VOORBEELD 6.5

$2^{10} = 1024 = 1{,}024 \times 10^3$
$2^{20} = 1.048.576 = 1{,}048576 \times 10^6$
$2^{30} = 1.073.741.824 = 1{,}073741824 \times 10^9$

Voor 2^{40} geeft een rekenmachine als antwoord 1.099511628E12.
Andere rekenmachines geven een variant hierop, zoals 1.099511628 ^{12}
Deze uitkomst moet gelezen worden als $1{,}099511628 \times 10^{12}$.
Merk op dat dit getal niet precies gelijk is aan 2^{40}.
Uitwerken van $1{,}099511628 \times 10^{12}$ geeft namelijk
$1{,}099511628 \times 1.000.000.000.000 = 1.099.511.628.000$.
Als we 2^{40} precies uitrekenen krijgen we als antwoord:
1.099.511.627.776.
Vanwege de beperkte ruimte op het display ronden rekenmachines dergelijke getallen af!

Voor 2^{100} geeft een rekenmachine: $1{,}2676506 \times 10^{30}$.
Dit is een getal met 31 cijfers. Omdat de rekenmachine maar 8 van deze 31 cijfers geeft, moeten we dit getal in de wetenschappelijke notatie laten staan en niet vervangen door deze 8 cijfers aangevuld met 23 nullen!

BOX 6.1
Toepassing: De afstand van de aarde tot de zon

In zijn boek *Een kleine geschiedenis van bijna alles* beschrijft Bill Bryson hoe men in de 18e eeuw aangestoken was door een 'onweerstaanbare behoefte de aarde te begrijpen, te bepalen hoe oud ze was en hoe massief, waar in het heelal ze hing en hoe ze was ontstaan' (p. 47).

Een van de uitdagingen was het meten van de afstand tussen de aarde en zon. Dit vergde echter heel wat vindingrijkheid. Het was bekend dat de afstand bepaald kon worden door de passage van Venus vanaf verschillende posities op aarde te meten. Helaas zijn passages van Venus een onregelmatig gebeuren; ze doen zich voor in paren met een tussentijd van acht jaar, maar daarna een eeuw of meer niet. Na diverse expedities, was het uiteindelijk kapitein James Cook die de passage in 1769 waarnam, en daarmee de benodigde informatie completeerde. De

Franse sterrenkundige Joseph Lalande becijferde de gemiddelde afstand vervolgens op iets meer dan 150 miljoen kilometer. Niet slecht, gegeven de beperkte middelen van die tijd!

Tegenwoordig wordt de afstand bepaald door een directe meting van de afstand Aarde-Venus (via radarreflectie) te combineren met waarnemingen van de positie van Venus in haar baan. Dit levert de volgende afstand op:

Afstand Aarde-Zon $\equiv 1AE = 149,6 \times 10^6$ kilometer.

Astronomische eenheid

Deze afstand wordt de *astronomische eenheid* genoemd.

In de sterrenkunde is een afstand van zo'n 150 miljoen km erg weinig. Toch heeft een auto die continu 100 km/uur rijdt maar liefst 170 jaar nodig om een afstand van 150 miljoen km af te leggen. Zelfs het licht, dat een snelheid heeft van 300.000 kilometer per seconde, doet er al meer dan acht minuten over om van de zon naar de aarde te reizen.

Bron: OU cursus Levenswetenschappen 1: evolutie (van Rhijn, 2009; Bryson, 2003), Binas (NVON, 2008)
Aandachtsgebied: Sterrenkunde, Heelal, Aarde

OPGAVE 6.25

De gemiddelde afstand van de aarde tot de zon is 149,6 miljoen kilometer.

a Hoe groot is deze afstand in meters?

Geef het antwoord in de wetenschappelijke notatie.

De gemiddelde afstand van de aarde tot de zon kan ook geschreven worden als

$149,6 \times 10^6 = 149,6 \times 1.000.000 = 149.600.000$ km.

b Hoe nauwkeurig is dit getal? Zullen de laatste 5 nullen precies kloppen?

c Ruimteschip Icarus heeft opdracht de zon tot een halve AE te naderen en dan weer terug te keren naar Aarde. Het ruimteschip reist met een snelheid van 2000 km/uur. Hoe lang is het ruimteschip onderweg?

Significante cijfers

De wetenschappelijke notatie geeft ook de mogelijkheid om aan te geven hoe nauwkeurig een opgegeven getal is. Zo is de gemiddelde afstand van de aarde tot de zon natuurlijk niet precies 149,6 miljoen kilometer; dit getal is afgerond. We bedoelen dat de waarde tussen 149,55 en 149,65 miljoen kilometer ligt. Het aantal cijfers waarmee een waarde wordt uitgedrukt (voor en na de komma) geeft dus de nauwkeurigheid aan waarmee de waarde bekend is. Dit is het aantal *significante cijfers*. In het voorbeeld hierboven spreken we dus van 4 significante cijfers.

De notatie 149.600.000 suggereert dat alle cijfers significant zijn en dat de gemiddelde afstand van de aarde tot de zon tussen 149.599.999,5 en 149.600.000,5 kilometer ligt. Met de wetenschappelijke notatie wordt een dergelijke schijnnauwkeurigheid voorkomen.

Opmerking

Een meer nauwkeurige benadering van 1 AE is 149 597 870 691 meter (± 6 meter).

BOX 6.2
Toepassing: Het getal van Avogadro

In de scheikunde is het gemakkelijk om met aantallen deeltjes te rekenen. De coëfficiënten in een reactievergelijking geven over het algemeen de verhouding aan van het aantal moleculen waarin stoffen reageren en ontstaan. Aangezien we in laboratoria meestal reacties doen met hoeveelheden stoffen die in de orde van grammen liggen, is het niet praktisch te rekenen met de daadwerkelijke aantallen atomen of moleculen. Met typische massa's van 10^{-21} tot 10^{-24} g hebben we het dan al gauw over een onhandig groot aantal deeltjes.

Daarom is het praktisch hoeveelheden stof uit te drukken in de eenheid *mol*. We definiëren een mol als de hoeveelheid stof die evenveel deeltjes bevat als er atomen in 12 g koolstof-12 zijn. Dit aantal atomen – $6,02214\times10^{23}$ – wordt het getal van Avogadro genoemd. We spreken vervolgens van de *molmassa* als de massa van 1 mol stof.

Bron: Scheikunde voor milieuwetenschappen (Holtkamp & van Wijnen 2012), Binas (NVON, 2008)
Aandachtsgebied: Scheikunde, Grote aantallen deeltjes

OPGAVE 6.26
a Met hoeveel significante cijfers is het getal van Avogadro hier gegeven?
b Hoeveel deeltjes zitten er in 2 mol? (Schrijf het antwoord in de wetenschappelijke notatie.)
c En hoeveel in $\frac{1}{12}$ mol? (Idem)

De wetenschappelijke notatie kan ook gebruikt worden voor zeer kleine getallen. In dat geval wordt het getal geschreven als een getal tussen 1 en 10 maal en een negatieve macht van 10.

OPGAVE 6.27
Bereken $2^{-10}=\frac{1}{2^{10}}$ en $2^{-20}=\frac{1}{2^{20}}$ met een rekenmachine.

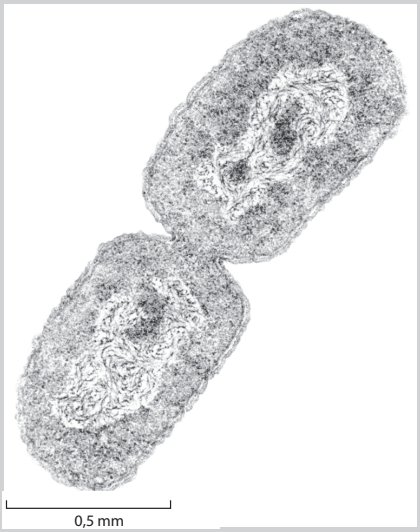
De meeste rekenmachines geven voor 2^{-10} een uitdrukking als 9.765625E–4. Dit moet gelezen worden als $9,765625\times10^{-4}$ en is dus gelijk aan $9,765625\times0,0001=0,0009765625$.
2^{-20} wordt weergegeven als 9.536743164E–7. Dit moet gelezen worden als $9,536743164\times10^{-7}$ en is dus gelijk aan 9,536743164 x 0,0000001 = 0,0000009536743164.

OPGAVE 6.28
Bereken nog een aantal machten van 2 op de rekenmachine.
a Controleer dat (afgerond op 4 significante cijfers) geldt: $2^{-300}=4,909\times10^{-91}$.
b Wat geeft uw rekenmachine als uitkomst voor 2^{-600}?
Is 2^{-600} gelijk aan de uitkomst die uw rekenmachine geeft?
c Controleer dat $2^{-600}=\left(2^{-300}\right)^2$.
d Geef een benadering in vier significante cijfers van 2^{-600} door uit te werken: $2^{-600}=\left(2^{-300}\right)^2\approx\left(4,909\times10^{-91}\right)^2=4,909^2\times\left(10^{-91}\right)^2=\ldots$.
Schrijf het resultaat in de wetenschappelijke notatie.

cc BY NC ND

BOX 6.3
Toepassing: De grootte van een bacterie

In de toepassing 'Microbiële groei' spraken we al over de E. coli bacterie. Deze bekende darmbacterie is klein te noemen: zo'n 2-3 micrometer lang, en zo'n 0,5 micrometer breed.



Bron: OU cursus Biologie van cellen (Middelbeek & Counotte-Potman, 1999)
Aandachtsgebied: Biologie van cellen

OPGAVE 6.29
We gaan uit van een E. coli bacterie met een lengte van 2,61 micrometer, en een breedte van 0,63 micrometer.
a Geef de lengte en de breedte van de bacterie in meters. Schrijf uw antwoord in de wetenschappelijke notatie.
b Benader het volume van de bacterie in m^3. Neem daarbij aan dat de bacterie cilindervormig is. Schrijf het antwoord weer in de wetenschappelijke notatie.
(*De inhoud van een cilinder met straal r en hoogte h is* $\pi r^2 h$.)

OPGAVE 6.30
Experimenteel is gevonden dat de massa van het koolstof-12-atoom gelijk is aan $1,99252\times10^{-26}$ kg.
a Verifieer dat het aantal atomen in 12 g koolstof-12 gelijk is aan het getal van Avogadro.
De molecuulmassa van zoutzuur (HCl) bedraagt $6,0525210210\times10^{-26}$ kg.
b Wat is de molmassa van zoutzuur? Wat is de massa van 3 mol HCl?

OPGAVE 6.31
In deze opgave bekijken we de functiewaarden van $f(t)=2^t$ als t een groot negatief getal is.
a Bereken met een rekenmachine: 2^{-5}, 2^{-10} en 2^{-20}.
b Hoeveel cijfers achter de komma heeft 2^{-5} geschreven als decimale breuk?
c Toon aan: $2^{-10}=\left(2^{-5}\right)^2$.
d Hoeveel cijfers achter de komma heeft 2^{-10} dus geschreven als decimale breuk?
In de wetenschappelijke notatie wordt een getal geschreven als een getal tussen 1 en 10 maal een macht van 10.
e Ga na dat 2^{-10} in de wetenschappelijke notatie geschreven wordt als $9,765625\times10^{-4}$.
Schrijf 2^{-10} ook als een gewone decimale breuk.

OPGAVE 6.32

a Ga met een rekenmachine na dat $5^{-6} = 6,4 \times 10^{-5}$ en dat $6^{-5} \approx 1,286 \times 10^{-4}$.

b Schrijf 5^{-6} en 6^{-5} ook als een gewone decimale breuk.

c Gebruik de antwoorden van vraag a om het verschil $6^{-5} - 5^{-6}$ zonder rekenmachine te berekenen. Schrijf dit verschil zowel als een gewone decimale breuk als in de wetenschappelijke notatie.

Het omzetten van de wetenschappelijke notatie naar de gewone notatie komt neer op het naar rechts of links verplaatsen van de komma, vaak na het toevoegen van een aantal loze nullen:
$1 \times 10^2 = 1,000 \times 10^2 = 100,0$ – dus de komma gaat twee plaatsen naar rechts;
en $1 \times 10^{-2} = 001,0 \times 10^{-2} = 0,010 = 0,01$ – dus de komma gaat twee plaatsen naar links.

En omgekeerd geldt:
$1200 = 1200,0 = 1,2000 \times 10^3 = 1,2 \times 10^3$ – de komma gaat drie plaatsen naar links
en $0,0012 = 0001,2 \times 10^{-3} = 1,2 \times 10^{-3}$ – de komma gaat drie plaatsen naar rechts.

OPGAVE 6.33

a Geef de wetenschappelijke notatie van de getallen 1200, 300,5 en 0,0075.

b Geef de gewone notatie van 1×10^8, $3,4 \times 10^5$ en $6,7 \times 10^{-8}$.

Tot nu toe hebben we telkens positieve getallen in de wetenschappelijke notatie gezet. Dit is uiteraard ook mogelijk voor negatieve getallen. Dan schrijven het getal als een product van een getal tussen -1 en -10, bijvoorbeeld: $-0,00025 = -2,5 \times 10^{-4}$; $-25.000.000 = -2,5 \times 10^7$.

OPGAVE 6.34

a Geef de wetenschappelijke notatie van de getallen -45000 en $-0,00000000027$.

b Geef de gewone notatie van $-1,2345678 \times 10^8$ en $-1,2345678 \times 10^{-8}$.

Samenvatting

We vatten de leereenheid samen aan de hand van het voorbeeld van een exponentieel groeiende kweek bacteriën.

Exponentiële functies met gehele invoerwaarden

Het gewicht van de kweek in grammen als functie van de tijd in dagen wordt gegeven door de exponentiële functie $f(t) = b \cdot g^t$.
Het gewicht op $t = 0$ wordt gegeven door $f(0) = b \cdot g^0 = b \cdot 1 = b$.
Eén dag later is het gewicht gelijk aan $f(1) = b \cdot g^1 = b \cdot g$.
n dagen na $t = 0$ is het gewicht $f(n) = b \cdot g^n = b \cdot g^{n-1} \cdot g = f(n-1) \cdot g$.
Het gewicht op dag n is dus g maal het gewicht op de vorige dag en g^n maal het begingewicht.

Als we één dag terug gaan in de tijd, moeten we het gewicht delen door g. Het gewicht één dag voor $t = 0$ is dus gelijk aan $\frac{f(0)}{g} = \frac{b}{g}$.
De formule $f(t) = b \cdot g^t$ geeft $f(-1) = b \cdot g^{-1}$.
Hieruit volgt: $b \cdot g^{-1} = \frac{b}{g} \Leftrightarrow g^{-1} = \frac{1}{g}$.

cc BY NC ND

Als we n dagen terug gaan in de tijd, moeten we het gewicht delen door g^n.
Het gewicht n dagen voor $t=0$ is dus gelijk aan $\frac{f(0)}{g^n}=\frac{b}{g^n}$.

De formule $f(t)=b\cdot g^t$ geeft $f(-n)=b\cdot g^{-n}$. Hieruit volgt:
$b\cdot g^{-n}=\frac{b}{g^n}\Leftrightarrow g^{-n}=\frac{1}{g^n}$.

Hiermee hebben we een betekenis gegeven aan g^n voor alle *positieve* grondtallen g en voor alle *gehele* exponenten n.
De definitie van machten met negatieve exponenten zoals die in leereenheid 1, paragraaf 7 gegeven is, geldt overigens ook voor negatieve grondtallen.

Wortels als machten

Het gewicht op $t=\frac{1}{2}$, dat is 12 uur na $t=0$, wordt volgens de formule $f(t)=b\cdot g^t$ gegeven door $f(\frac{1}{2})=b\cdot g^{\frac{1}{2}}$. Als we een halve dag verder gaan in de tijd, moeten we het gewicht dus vermenigvuldigen met $g^{\frac{1}{2}}$. Het gewicht na één dag is dan gelijk aan $f(\frac{1}{2})\cdot g^{\frac{1}{2}}=b\cdot g^{\frac{1}{2}}\cdot g^{\frac{1}{2}}=b\cdot\left(g^{\frac{1}{2}}\right)^2$.
Het gewicht na één dag is ook gelijk aan $f(1)=b\cdot g^1=b\cdot g$.
Hieruit volgt $b\cdot\left(g^{\frac{1}{2}}\right)^2=b\cdot g\Leftrightarrow\left(g^{\frac{1}{2}}\right)^2=g\Leftrightarrow g^{\frac{1}{2}}=\sqrt{g}$.

Met een soortgelijke redenering volgt voor $n=3,4,5$ etc.: $g^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{g}$.

Omdat de evenmachts wortel uit een negatief getal niet bestaat, zijn bij deze definitie alleen *positieve* getallen toegelaten als grondtal.

Andere gebroken exponenten

De definitie van machten als $g^{\frac{3}{4}}$ kan worden afgeleid door de hoeveelheid op $t=\frac{3}{4}$ dag op verschillende manieren te berekenen, maar ook door het toepassen van eigenschap 3 van exponenten:
$g^{\frac{3}{4}}=g^{\frac{1}{4}\cdot 3}=\left(g^{\frac{1}{4}}\right)^3=\left(\sqrt[4]{g}\right)^3$ en algemeen: $g^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{g}\right)^m$.
En voor negatieve gebroken exponenten geldt: $g^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\left(\sqrt[n]{g}\right)^m}$

Hiermee is g^r gedefinieerd voor alle *positieve* grondtallen g en voor alle *rationale* (= gebroken) exponenten r.
Over de formele betekenis van g^t als t een irrationaal getal is, zoals $\sqrt{2}$ of π, maken we ons geen zorgen. Op dit moment volstaat te vermelden dat dergelijke machten zeer goed benaderd kunnen worden met machten waarvan de exponent een breuk is.

Grafieken

Nu we weten hoe we g^t kunnen berekenen (of benaderen) voor alle reële waarden van t, kunnen we ook de grafiek van de functie $f(t)=g^t$ tekenen. Deze grafieken hebben de volgende kenmerken:
– Bij exponentiële toename is de grafiek van $f(t)=g^t$ stijgend. Dit is het geval als $g>1$.
– Bij exponentiële afname is de grafiek van $f(t)=g^t$ dalend. Dit is het geval als $0<g<1$.
De overige kenmerken van deze functies zijn voor alle groeifactoren hetzelfde: Het domein is $\mathbb{R}$; het bereik is het interval $\langle 0,\rightarrow\rangle$; de grafiek heeft de t-as als horizontale asymptoot (zie figuren 6.5 en 6.6).

Wetenschappelijke notatie en significante cijfers

Grote getallen en getallen dicht bij 0 worden in de natuurwetenschappen vaak geschreven in de *wetenschappelijke notatie*. Het getal wordt dan geschreven als een product van een macht van 10 en een getal tussen 1 en 10 (of tussen -1 en -10 voor negatieve getallen).
Het aantal bacteriën in een kweek van 3 g is bijvoorbeeld $3{,}0\times10^{12}$.
De lengte van een bacterie is ongeveer $2{,}5\times10^{-6}$ meter.

De wetenschappelijke notatie maakt het mogelijk om de nauwkeurigheid van grote getallen aan te geven. Zo kunnen we stellen dat we de lengte van een bacterie zo nauwkeurig mogelijk hebben bepaald op $2{,}48$ micrometer. Deze lengte is uiteraard nog steeds niet exact, maar is afgerond op drie *significante cijfers*.
In de wetenschappelijke notatie wordt deze lengte genoteerd als $2{,}48\times10^{-6}$ meter.

ZELFTOETS

1 Bereken zonder rekenmachine:

a $27^{\frac{1}{3}}$ d $27^{-\frac{2}{3}}$ g $\left(\frac{1}{27}\right)^{1\frac{1}{3}}$

b $64^{\frac{1}{6}}$ e $64^{-\frac{5}{6}}$ h $\left(\frac{9}{64}\right)^{-\frac{1}{2}}$

c $4^{1\frac{1}{2}}$ f $4^{-2\frac{1}{2}}$ i $\left(2\frac{1}{4}\right)^{2\frac{1}{2}}$

2 Schrijf de volgende wortels als een macht en bereken deze met een rekenmachine:

a $\sqrt[4]{2}$ b $\sqrt[7]{7}$ c $\sqrt[5]{\frac{1}{5}}$

3 In voorbeeld 5.5 hebben we een eerste orde scheikundige reactie bekeken waarbij de concentratie N als functie van de tijd gegeven werd door onderstaande tabel:

t (in seconden)	0	1	2	4	6	10
$N(t)$ (in mol/liter)	1,000	0,707	0,500	0,250	0,125	0,031

a Hoe groot is de groeifactor over 2 tijdseenheden?
b Hoe groot is dan de groeifactor over één tijdseenheid exact?
c De waarde van $N(10)$ is afgerond. Hoe groot is deze waarde exact als de groeifactor over 2 tijdseenheden exact het antwoord van vraag a is?

4 In opgave 4.7 hebben we de onderstaande tabel gekregen, waarin de exponentiële toename wordt gegeven van de zeeoppervlakte die vervuild is door de lozing van olie.

tijdstip	0	1 (20 min.)	2 (40 min.)	3 (1 uur)	4 (80 min.)	5 (100 min.)	6 (2 uur)
oppervlakte (in km^2)	1,5	3	6	12	24	48	96

a Als g de groeifactor over 20 minuten is en G de groeifactor over één uur, welk verband bestaat er dan tussen g en G?
b Geef de groeiformule met als tijdseenheid 1 uur en toon aan dat de tabelwaarden voor $t = \frac{1}{3}$ uur, $t = \frac{2}{3}$ uur; $t = 1\frac{1}{3}$ uur en $t = 1\frac{2}{3}$ uur overeenstemmen met de functiewaarden van deze groeiformule.

BOX 6.4
Toepassing: De Boltzmann-constante en de aarde als een 'zwarte straler'

In de natuurkunde is een zwarte straler of zwart lichaam (Engels: black body) een voorwerp dat alle elektromagnetische straling die er op valt, absorbeert (en dus niet reflecteert). De intensiteit en spectrale verdeling van de door het lichaam afgegeven straling is uitsluitend afhankelijk van de temperatuur. Voor de totale hoeveelheid uitgestraalde energie E per oppervlakte- en tijdseenheid geldt de wet van Stefan Boltzmann: $E = \sigma \cdot T^4$, met T de temperatuur in kelvin en $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}$ W/(m²*K⁴) de Boltzmann-constante.

Ook de aarde kan worden gezien als een zwarte straler. Dit is een belangrijk gegeven voor het analyseren van de energiebalans van de aarde; een evenwicht tussen enerzijds de inkomende stralingsenergie van de zon, en de uitgezonden stralingsenergie van het aardoppervlak. Dit, op haar beurt, is belangrijk voor het modelleren van (de verandering van) het mondiale klimaat.

Bron: OU cursus Geologie rondom ijstijden (Leinders, 1992), Natuurkunde voor Milieuwetenschappen (van Belleghem, 2012)
Aandachtsgebied: Klimaatverandering, Elektromagnetische straling

5 We laten reflectie van straling vanaf het aardoppervlak buiten beschouwing. In dat geval kunnen we het totale vermogen van de uitgezonden stralingsenergie van het aardoppervlak berekenen door de uitgestraalde energie E (zie de Boltzmanformule) te vermenigvuldigen met het totale aardoppervlak A. Voor de laatste geldt $A = \pi D^2$ met D de diameter van de aarde (12.756 km).
Volgens het Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC) was de gemiddelde temperatuur op aarde in het jaar 2000 zo'n 14,5 °C.
a Bereken het vermogen (in watt) van de uitgezonden stralingsenergie van het aardoppervlak.
b Als we de aarde een jaar lang laten stralen, hoeveel energie (in J) heeft de aarde dan totaal uitgestraald?

Machtsfuncties en wortelfuncties

Introductie *175*

Leerkern *176*

1 Machtsfuncties met een natuurlijk getal als exponent *176*
2 Machtsfuncties met een negatief geheel getal als exponent *180*
3 Wortelfuncties *182*
4 Machtsfuncties met een breuk als exponent *185*
5 Inverse functies *191*
6 Vergelijkingen met machten *194*

Samenvatting *196*

Zelftoets *197*



CC BY NC ND

Leereenheid 7

Machtsfuncties en wortelfuncties

INTRODUCTIE

In leereenheid 5 en 6 hebben we functies met een functievoorschrift van de vorm $f(t) = b \cdot g^t$ bestudeerd. In deze functies is het grondtal g een vast getal en staat de variabele t in de exponent. Deze functies heten daarom *exponentiële functies*. In leereenheid 6 is met behulp van deze functies de betekenis van g^r gedefinieerd als r een rationaal getal (een breuk) is.
In deze leereenheid draaien we de posities om. We bestuderen functies van de vorm $f(x) = x^r$, waarbij de exponent r een vast getal is en waarbij het grondtal x de variabele is. Dergelijke functies heten *machtsfuncties*. Enkele eenvoudige machtsfuncties – van de eerste en tweede graad – werden al in eerdere leereenheden besproken. Hier kijken we verder; eerst naar machtsfuncties met gehele getallen als exponent en vervolgens naar machtsfuncties met gebroken exponenten. Een bijzonder geval van dergelijke functies zijn *wortelfuncties* van de vorm $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ met n een natuurlijk getal. Aan de hand van de machtsfuncties bespreken we ook het begrip *inverse functie* en uiteraard bespreken we ook een aantal voorbeelden van machtsfuncties zoals die in de natuurwetenschappen gebruikt worden.

LEERDOELEN

Na bestudering van deze leereenheid

- kent u het verschil tussen een *exponentiële functie* en een *machtsfunctie*
- weet u dat de *exponent* van de machtsfunctie $f(x) = x^r$ ieder willekeurig *rationaal getal* kan zijn en dat de grafiek voor verschillende soorten rationale getallen verschillende vormen heeft (positief of negatief; geheel, breuk van de vorm $1/n$ of breuk van de vorm n/m, indien geheel dan even of oneven, etc.)
- kent u de *kenmerken van de grafieken* van machtsfuncties voor verschillende soorten exponenten, zoals het domein, het bereik en de eventuele top
- weet u wat er verstaan wordt onder de *inverse* van een functie
- weet u wanneer *de inverse functie van een machtsfunctie* bestaat en wat het functievoorschrift is van deze inverse functie
- weet u dat de grafieken van een functie en zijn inverse elkaars *spiegelbeeld* zijn in de lijn $y = x$
- kunt u eenvoudige *vergelijkingen met machtsfuncties* oplossen, zoals vergelijkingen van de vorm $x^r = c$.

CC BY NC ND

LEERKERN

1 Machtsfuncties met een natuurlijk getal als exponent

We bekijken de functies $f(x) = x^n$ waarbij n een natuurlijk getal is.

Voor $n = 0$ geldt $f(x) = x^0 = 1$.
De grafiek van f is de horizontale rechte lijn $y = 1$.
Het domein van deze functie is $\mathbb{R}$; het bereik is alleen het getal 1.

Voor $n = 1$ geldt $f(x) = x^1 = x$.
De grafiek van f is de rechte lijn $y = x$.
Het domein van deze functie is $\mathbb{R}$; het bereik is ook $\mathbb{R}$.

Voor $n = 0$ en $n = 1$ is $f(x) = x^n$ dus een lineaire functie. Deze functies zijn uitgebreid besproken in leereenheid 3.

Voor $n = 2$ geldt $f(x) = x^2$.
Deze tweedegraads functie is uitgebreid bestudeerd in leereenheid 4.
Het domein van deze functie is $\mathbb{R}$.
$f(0) = 0$ en voor alle andere waarden van x geldt $f(x) > 0$.
Het bereik van deze functie is dus het interval $[0, \rightarrow\rangle$.

Voor $n = 3$ geldt $f(x) = x^3$.

Derdegraads functie

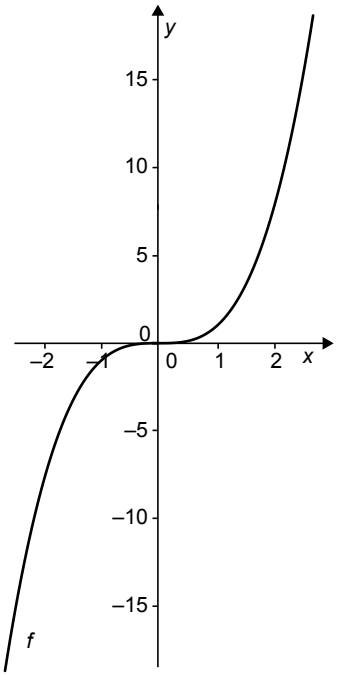
Deze *derdegraads functie* hebben we nog niet eerder bestudeerd, vandaar dat we eerst een aantal functiewaarden uitrekenen en een grafiek maken.

OPGAVE 7.1
Gegeven de functie $f(x) = x^3$.
a Bereken $f(x)$ voor $x = -10$, $x = -5$, $x = -3$, $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 5$ en $x = 10$.
b Welke symmetrie ziet u in deze functiewaarden?
c Bereken ook $f(-1\frac{1}{2})$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(\frac{1}{2})$ en $f(1\frac{1}{2})$.
d Teken de punten (–2, –8); ($-1\frac{1}{2}$, $-3\frac{3}{8}$); (–1,-1); ($-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{8}$), (0, 0); ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$); (1, 1); ($1\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{8}$) en (2, 8) in een assenstelsel en maak een schets van de grafiek van f voor $-2 \le x \le 2$.
e Hoe verloopt de grafiek voor $x < -2$ en voor $x > 2$?
Hoe liggen bijvoorbeeld de punten (–3, –27) en (5, 125) ten opzichte van de punten die u in vraag d hebt getekend?

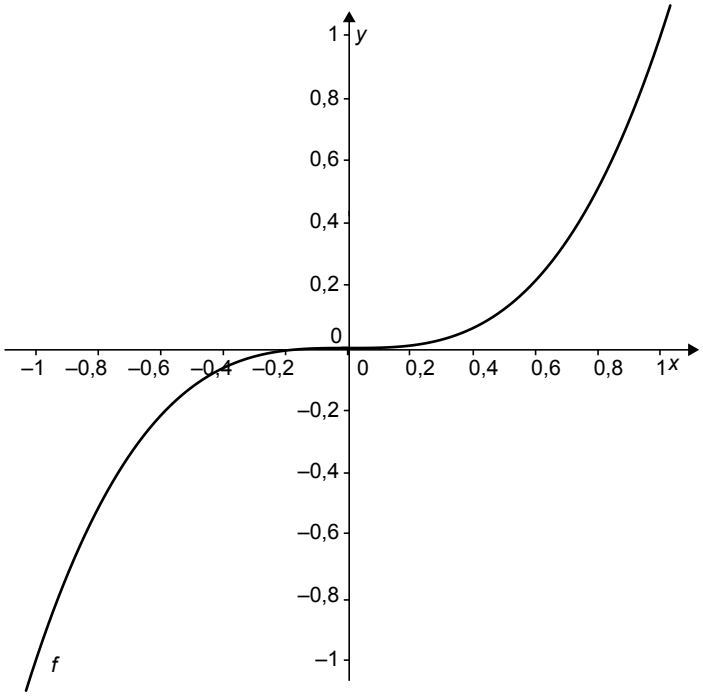
Uit de opgave is waarschijnlijk wel duidelijk hoe de grafiek van f loopt voor $x < -2$ en voor $x > 2$. Indien gewenst kunnen we uiteraard altijd extra punten uitrekenen, zoals de punten op de grafiek met $x = -2\frac{1}{2}$ en $x = 2\frac{1}{2}$. Het resultaat ziet u in figuur 7.1.

OPGAVE 7.2
In deze opgave zoomen we in op het verloop van de grafiek van de functie $f(x) = x^3$ in de buurt van de oorsprong (0, 0).
a Bereken $f(x)$ voor $x = -\frac{1}{4}$, $x = -\frac{1}{10}$, $x = -\frac{1}{100}$, $x = \frac{1}{100}$, $x = \frac{1}{10}$, en $x = \frac{1}{4}$.
b Teken de punten (–1, –1); ($-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{8}$), (0, 0); ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$); (1, 1) en de punten uit vraag a in een assenstelsel. Neem daarbij een grote schaal, bijvoorbeeld 5 cm voor een eenheid.
c Hoe loopt de grafiek in de buurt van het punt (0, 0)?

Hieronder ziet u twee keer de grafiek van $f(x) = x^3$. In de linkerfiguur krijgt u een globaal idee van het verloop van de grafiek, in de rechterfiguur is ingezoomd op het verloop van de grafiek rond het punt (0, 0).



FIGUUR 7.1



FIGUUR 7.2

BOX 7.1
Toepassing: Windenergie

Een toepassing van een derdegraads functie is het beschrijven van de energieopbrengst van windmolens als functie van de windsnelheid. Deze energieopbrengst wordt gegenereerd door een pakket lucht dat met een bepaalde snelheid door de rotoren van de windmolen waait, waardoor de rotoren gaan draaien. Per tijdseenheid (bijvoorbeeld per seconde) gaat dit ruwweg om een pakket van volume $A \cdot v$, met A de oppervlakte van de cirkel die door de eindpunten van de rotorbladen gaat en v de snelheid van de wind. De massa van dit luchtpakket is $m_{lucht} = \rho \cdot A \cdot v$ met ρ de luchtdichtheid (ρ is de Griekse letter rho).
We weten uit de klassieke mechanica dat de bewegingsenergie van een massa m met snelheid v gegeven wordt door $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$. De energie die het luchtpakket in het tijdsinterval maximaal aan de rotorbladen kan overbrengen is dus gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot m_{lucht} \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^3$. Nu is het fysiek natuurlijk nooit mogelijk om alle bewegingsenergie van de luchtverplaatsing over te brengen op de rotorbladen. Op zijn minst een gedeelte van de bewegingsenergie moet overblijven, om de lucht aan de achterzijde van de rotorbladen te laten doorstromen. Daarom houden we rekening met een constante efficiëntiefactor *Eff* van ruwweg 50%.
De energieopbrengst E per tijdseenheid – het geleverde vermogen – is dan:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^3 \cdot Eff$$

De energieopbrengst van een windmolen is dus evenredig aan de derde macht van de windsnelheid!

cc BY NC ND

Deze berekening kan u overigens bekend voorkomen. Zij is vergelijkbaar met de berekening van het energieverbruik van voertuigen als gevolg van luchtweerstand (zie box 4.1).

Bron: OU cursus Natuurkunde voor milieuwetenschappen (van Belleghem, 2012), Sustainable Energy (MacKay, 2009)
Aandachtsgebied: Energieopwekking, Duurzame energie, Windenergie

VOORBEELD 7.1
Toepassing: Windenergie

Als de straal van een rotorblad gelijk is aan $r = 12,6$ meter, dan is de oppervlakte van de cirkel die door de eindpunten van de rotorbladen loopt gelijk aan $A = \pi r^2 \approx 500$ m^2.
Voor de luchtdichtheid op het aardoppervlak geldt ongeveer $\rho = 1,3\,\text{kg/m}^3$. Neem verder aan dat de windsnelheid gelijk is aan $v = 6\,\text{m/s}$ (windkracht 3-4) en dat de efficiëntiefactor precies 50% is. Dan levert dit een vermogen op van $E \approx \frac{1}{2} \cdot 1,3 \cdot 500 \cdot 6^3 \cdot 0,5 \approx 35\,\text{kW}$.

OPGAVE 7.3 *Toepassing: Windenergie*
Gegeven de windmolen uit voorbeeld 7.1.
a Laat zien dat de eenheid van $\rho \cdot A \cdot v^3$ Watt is en controleer dat het geleverde vermogen bij een windsnelheid van 6 m/s inderdaad 35 kW is.
b Bereken het geleverde vermogen bij een windsnelheid van 20 m/s (windkracht 8-9).
c Stel een formule op voor het geleverde vermogen E in kW als functie van de windsnelheid v in m/s. Neem daarbij aan dat ρ en A gelijk blijven aan de waarden van voorbeeld 7.1.
d Bereken $E(12)$ en vergelijk uw antwoord met dat van vraag a. Als het 2 keer zo hard gaat waaien, met welke factor neemt dan de energieopbrengst toe?

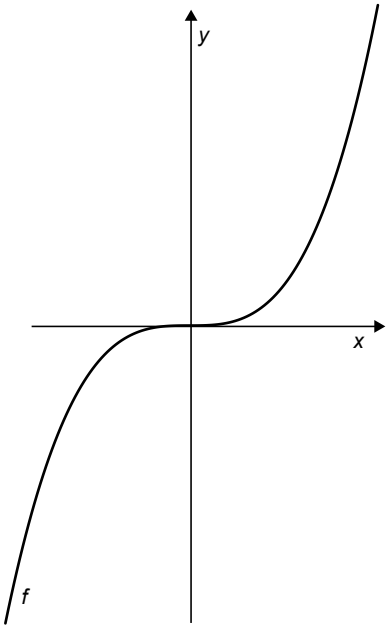
Om een algemeen beeld te krijgen van het verloop van functies van de vorm $f(x) = x^n$ bekijken we eerst deze functies voor $n = 4, 5, 6$ en 7.

OPGAVE 7.4
Gegeven de functies $f_4(x) = x^4$, $f_5(x) = x^5$, $f_6(x) = x^6$ en $f_7(x) = x^7$.
a Vul de onderstaande tabel in.

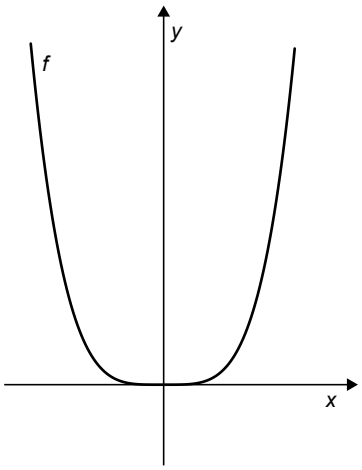
x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$f_4(x)$									
$f_5(x)$									
$f_6(x)$									
$f_7(x)$									

b Teken de grafieken van deze functies.
c Als we letten op domein/bereik en stijgen/dalen, welke van deze functies hebben dan hetzelfde verloop als $f_3(x) = x^3$? En welke hebben hetzelfde verloop als $f_2(x) = x^2$?
d Hoe zal de grafiek van $f_{10}(x) = x^{10}$ lopen en hoe die van $f_{2013}(x) = x^{2013}$?

Conclusie:
– Als n een positief even getal is, dan geldt voor de grafiek van $f(x) = x^n$:
– het domein is $\mathbb{R}$
– het bereik is het interval $[0, \rightarrow\rangle$
– de grafiek is dalend voor $x < 0$ en stijgend voor $x > 0$
– de grafiek heeft een top (minimum) in het punt (0, 0).
Als n een oneven getal is met $n > 1$, dan geldt voor de grafiek van $f(x) = x^n$:
– het domein is $\mathbb{R}$
– het bereik is $\mathbb{R}$
– de grafiek is stijgend voor alle $x \in \mathbb{R}$
– de grafiek vlakt af rond het punt (0, 0).
(Voor $n = 1$ krijgen we de functie $f(x) = x$, waarvan de grafiek zoals bekend een rechte lijn is.)



FIGUUR 7.3
Grafiek van $f(x) = x^n$ met n oneven



FIGUUR 7.4
Grafiek van $f(x) = x^n$ met n even

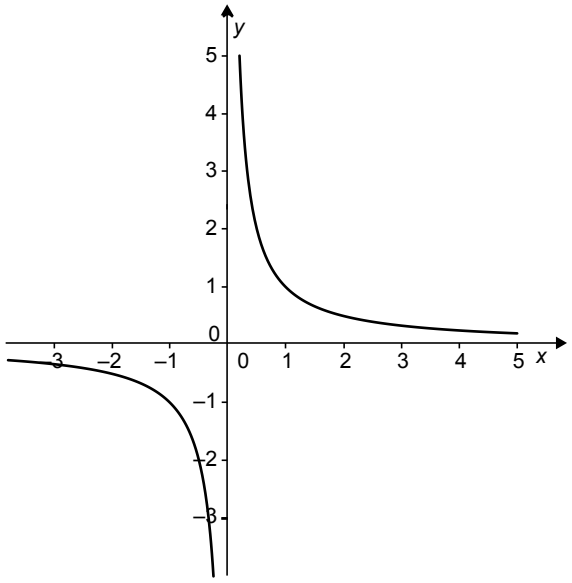
OPGAVE 7.5
Met uitzondering van de functie $f_0(x) = x^0 = 1$ hebben alle hier besproken functies twee punten gemeenschappelijk.
a Welke twee punten zijn dat?
Alle functies $f_n(x) = x^n$ met een even n hebben nog een derde punt gemeenschappelijk.
b Welk punt is dat?
Alle functies $f_n(x) = x^n$ met een oneven n hebben een ander derde punt gemeenschappelijk.
c Welk punt is dat?

2 Machtsfuncties met een negatief geheel getal als exponent

In voorbeeld 2.6 en opgave 2.15 hebben we de grafiek van de functie $g(x)=\frac{1}{x}$ bestudeerd. Het domein van deze functie bestaat uit alle reële getallen behalve het getal 0 (ook genoteerd als $\langle\leftarrow,0\rangle\cup\langle 0,\rightarrow\rangle$). Het bereik bestaat ook uit alle reële getallen behalve het getal 0.
In opgave 2.15 hebt u kunnen zien dat de grafiek voor grote positieve en negatieve waarden van x de x-as nadert en dat de in de buurt van $x=0$ de functiewaarde een zeer groot positief of negatief getal is. De grafiek heeft dus een *horizontale asymptoot* (de x-as) en een *verticale asymptoot* (de y-as).

Horizontale asymptoot
Verticale asymptoot

Merk op dat het functievoorschrift ook geschreven kan worden als $g(x)=x^{-1}$. Dit is dus de machtsfunctie met exponent -1. Hieronder ziet u de grafiek van deze functie.



FIGUUR 7.5 $g(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$

Met exponenten -2, -3, -4 en -5 krijgen we de functies $f_{-2}(x)=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$, $f_{-3}(x)=\frac{1}{x^3}$ $f_{-4}(x)=\frac{1}{x^4}$ en $f_{-5}(x)=\frac{1}{x^5}$

OPGAVE 7.6

a Vul de onderstaande tabel in.

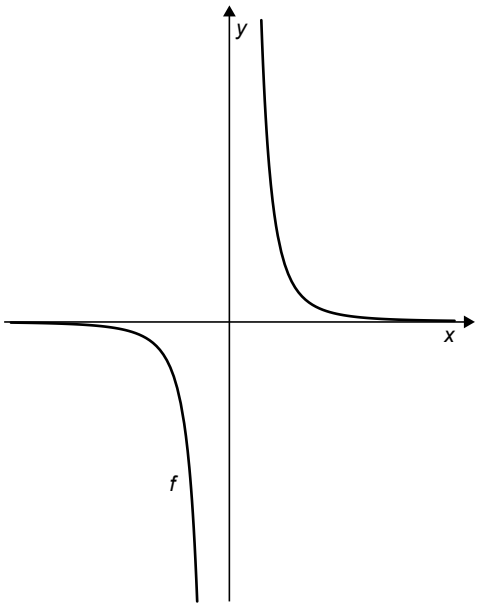
x	-10	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	2	10
x^{-2}											
x^{-3}											
x^{-4}											
x^{-5}											

b Welke vormen van symmetrie ziet u in de tabel van $f_{-2}(x)=x^{-2}$?
En in de tabel van f_{-3}?

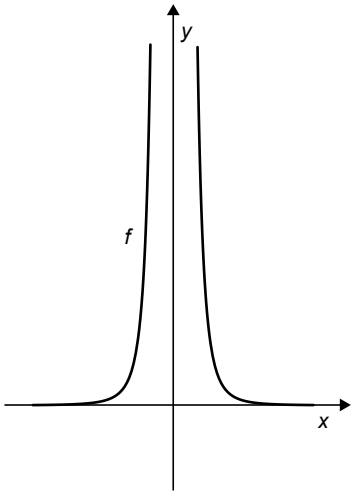
c Enig idee wat het domein, het bereik en de asymptoten van de grafieken van de functies f_{-2} en f_{-3} zijn?
d Teken de grafieken van f_{-2} en f_{-3}.
e Wat kunt u zeggen over het globale verloop van de grafieken van de functies f_{-4} en f_{-5}?

Hierboven hebben we een aantal grafieken bekeken van functies van de vorm $f(x) = x^{-n} = 1/x^n$ met n een positief geheel getal (de exponent $-n$ is dus een negatief geheel getal).
Als we letten op domein/bereik, stijgen/dalen en de ligging van de asymptoten, dan zijn er weer twee vormen te onderscheiden.

Als n een positief oneven getal is, dan geldt voor de grafiek van $f(x) = x^{-n} = 1/x^n$:
– het domein bestaat uit alle reële getallen m.u.v. 0 (ook genoteerd als $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$)
– het bereik is eveneens $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$
– de grafiek is dalend voor alle $x \in \mathbb{R}$
– de grafiek heeft de x-as als horizontale asymptoot en de y-as als verticale asymptoot.
Als n een positief even getal is, dan geldt voor de grafiek van $f(x) = x^{-n} = 1/x^n$:
– het domein bestaat uit alle reële getallen m.u.v. 0 (ook genoteerd als $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$)
– het bereik is het interval $\langle 0, \rightarrow \rangle$
– de grafiek is stijgend voor $x < 0$ en dalend voor $x > 0$
– de grafiek heeft de x-as als horizontale asymptoot en de y-as als verticale asymptoot.



FIGUUR 7.6
Grafiek van $f(x) = \frac{1}{x^n}$ met n oneven



FIGUUR 7.7
Grafiek van $f(x) = \frac{1}{x^n}$ met n even

OPGAVE 7.7
Welk punt hebben de grafieken van alle functies $f(x)=\frac{1}{x^n}$ en $f(x)=x^n$ gemeenschappelijk?

3 Wortelfuncties

De tweedemachts-wortel

De bekendste wortelfunctie is de tweedemachtswortel, ofwel de 'gewone' wortel $f(x)=\sqrt{x}$.
In voorbeelden 2.5 en 2.10 hebben we gezien dat het domein van deze functie het interval $[0,\rightarrow\rangle$ is en dat het bereik hetzelfde interval is. De wortel uit een negatief getal bestaat immers niet en de wortel uit een positief getal *a* is het *positieve* getal waarvan het kwadraat *a* is.

Voor het tekenen van de grafiek van *f* beginnen we weer met het maken van een tabel. Kiezen we daarbij voor 'mooie' invoerwaarden, dat zijn invoerwaarden waarvan we de wortel al kennen, dan hoeven we hierbij geen rekenmachine te gebruiken.

OPGAVE 7.8
a Vul de onderstaande tabel in. Alle wortels in de tabel kunnen zonder rekenmachine berekend worden, bijvoorbeeld

$$\sqrt{2\tfrac{1}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\frac{3}{2}=1\tfrac{1}{2}.$$

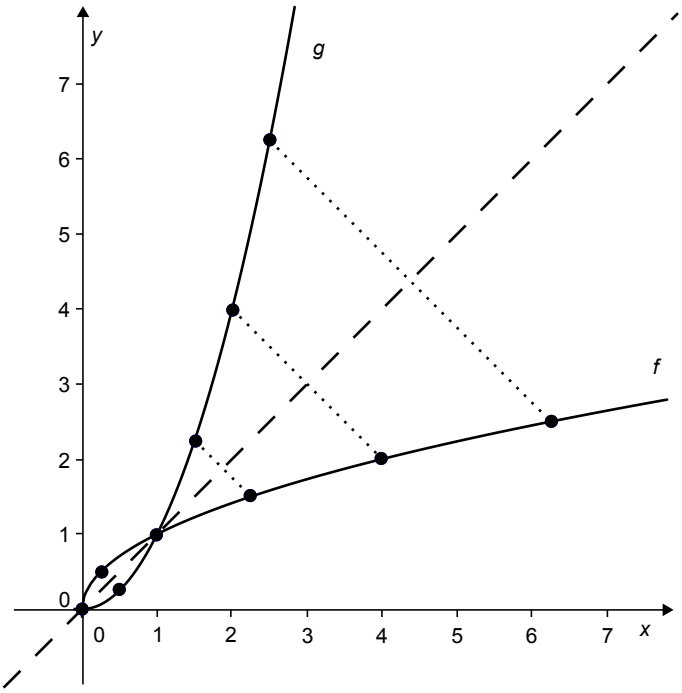
x	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{7}{9}$	4	$6\frac{1}{4}$	$7\frac{1}{9}$	9	$11\frac{1}{9}$	$12\frac{1}{4}$
$\sqrt{x}$											

b Teken de grafiek van de functie $f(x)=\sqrt{x}$. Neem daarbij als domein het interval $\left[0,12\frac{1}{4}\right]$. Wat is het bereik van *f* bij dit domein?

De grafiek van $f(x)=\sqrt{x}$ kunnen we ook krijgen met behulp van de grafiek van $g(x)=x^2$.
Bedenk daartoe dat als het punt (a,b) met $a\geq 0$ op de grafiek van *g* ligt, er geldt $b=g(a)=a^2$.
Omdat $a\geq 0$ volgt hieruit $a=\sqrt{b}$, dus $a=f(b)$.
Dit betekent dat het punt (b,a) op de grafiek van *f* ligt.
Zo krijgen we onder meer:

punt op grafiek van $g(x)=x^2$	*punt op grafiek van* $f(x)=\sqrt{x}$
(0, 0)	(0, 0)
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$
(1, 1)	(1, 1)
$(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4})$	$(2\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2})$
(2, 4)	(4, 2)
$(2\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4})$	$(6\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2})$
(3, 9)	(9, 3)

Voor elke rij in deze tabel geldt dat de twee punten elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn $y=x$.
De grafiek van *f* is dus het spiegelbeeld van de grafiek van *g* in deze lijn.
Let op: we gebruiken nu alleen de rechter tak van grafiek van *g*, we beperken het domein van *g* tot het interval $[0,\rightarrow\rangle$.



FIGUUR 7.8 De grafieken van $f(x)=\sqrt{x}$ en $g(x)=x^2$ zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y=x$.

OPGAVE 7.9

a Teken de grafiek van $g(x)=x^2$ voor $-3\le x\le 3$ en geef het deel van die grafiek voor $x\le 0$ aan in een tweede kleur.

b Teken ook de figuur die u krijgt als u dit anders gekleurde deel van de grafiek spiegelt in de lijn $y=x$. (Dit kunt u doen door punt voor punt de x- en de y-coördinaat te verwisselen.)

c Welk functievoorschrift past bij de figuur die u in vraag b getekend hebt?

OPGAVE 7.10

Gegeven de functie $f(x)=\sqrt{2x-3}$.

a Voor welke waarden van x geldt $2x-3\ge 0$?

b Wat is dus het domein van de functie f?

c Geef ook het domein van de functie $g(x)=\sqrt{3-2x}$.

De derdemachtswortel

De grafiek van de derdemachtswortelfunctie $f(x)=\sqrt[3]{x}$ kunnen we – net als de grafiek van $f(x)=\sqrt{x}$ – op twee manieren maken.

– maak eerst een tabel van de functie $f(x)=\sqrt[3]{x}$ en teken de gevonden punten in een assenstelsel

– of teken eerst de grafiek van de functie $g(x)=x^3$ en spiegel deze in de lijn $y=x$.

Bij het maken van de tabel van $f(x)=\sqrt[3]{x}$ kiezen we net als bij de tweedemachtswortel 'handige' invoerwaarden.

OPGAVE 7.11
Vul de onderstaande tabel in. Alle derdemachtswortels in de tabel kunnen zonder rekenmachine berekend worden, bijvoorbeeld
$\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

x	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{27}{64}$	1	$2\frac{10}{27}$	$3\frac{3}{8}$	$4\frac{17}{27}$	$5\frac{23}{64}$	$6\frac{859}{1000}$	8	$15\frac{5}{8}$
$\sqrt[3]{x}$											

Anders dan bij de tweedemachtswortel, bestaat $\sqrt[3]{x}$ ook voor negatieve waarden van x.

OPGAVE 7.12
Bereken $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$, $\sqrt[3]{-1}$ $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$ en $\sqrt[3]{-8}$

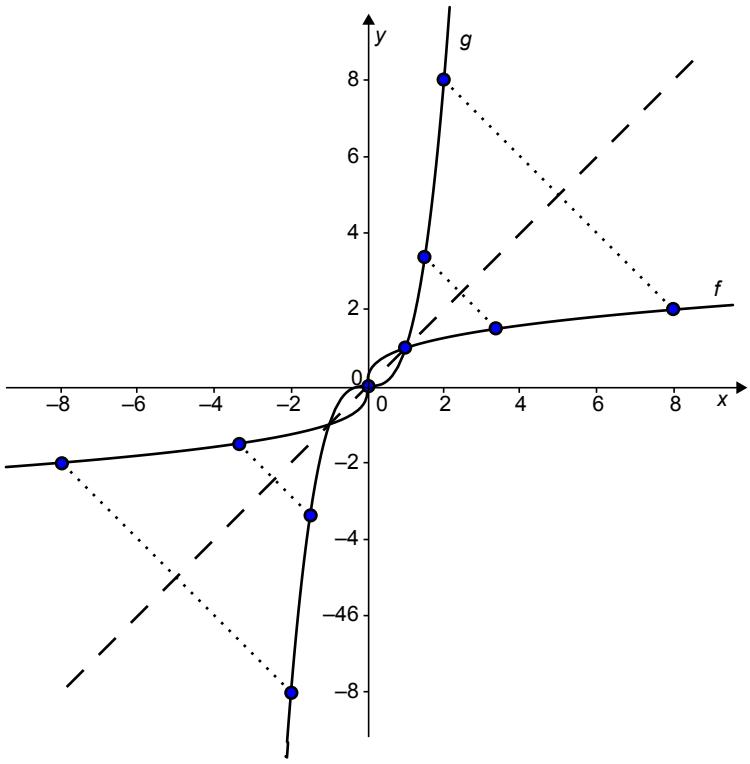
OPGAVE 7.13
Gebruik uw antwoorden van opgaven 7.11 en 7.12 om de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt[3]{x}$ te tekenen. Neem daarbij als domein het interval $[-8,8]$.
Wat is het bereik van f bij dit domein?

De grafiek van $f(x) = \sqrt[3]{x}$ kunnen we ook vinden met behulp van de grafiek van $g(x) = x^3$.
Als het punt (a,b) op de grafiek van g ligt, dan geldt immers $a = b^3 \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{a}$.
Dit betekent dat het punt (b,a) op de grafiek van f ligt. Zo vinden we:

punt op grafiek van $g(x) = x^3$	*punt op grafiek van $f(x) = \sqrt[3]{x}$*
(0, 0)	(0, 0)
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$	$(\frac{1}{8}, \frac{1}{2})$
(1, 1)	(1, 1)
$(1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{8})$	$(3\frac{1}{8}, 1\frac{1}{2})$
(2, 8)	(8, 2)
$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$	$(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2})$
(–1, –1)	(–1, –1)
$(-1\frac{1}{2}, -3\frac{1}{8})$	$(-3\frac{1}{8}, -1\frac{1}{2})$
(–2, –8)	(–8, –2)

Net als bij de tweedemachtswortel zien we dat de punten op iedere rij elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn $y = x$. De grafieken van f en g zijn dus elkaars spiegelbeeld in deze lijn.

Omdat we de derdemachtwortel kunnen nemen van ieder reëel getal, is het domein van f heel $\mathbb{R}$.
Ook het bereik van f is heel $\mathbb{R}$. Ieder reëel getal y is immers de derdemachtswortel van y^3.



FIGUUR 7.9 De grafieken van $f(x)=\sqrt[3]{x}$ en $g(x)=x^3$ zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y=x$.

Wortelfuncties met een hogere macht

Voor wortelfuncties met een hogere macht maken we weer het onderscheid tussen even waarden en oneven waarden van n.

Voor een even n bestaat $\sqrt[n]{x}$ alleen als $x \geq 0$ en is de uitkomst positief of 0. De grafiek van $f(x)=\sqrt[n]{x}$ heeft ruwweg de vorm van de grafiek van $f(x)=\sqrt{x}$.

Voor een oneven n bestaat $\sqrt[n]{x}$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en kan de uitkomst ieder reëel getal zijn. De grafiek van $f(x)=\sqrt[n]{x}$ heeft ruwweg de vorm van de grafiek van $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

4 Machtsfuncties met een breuk als exponent

In leereenheid 6 paragraaf 3 is voor positieve grondtallen x gedefinieerd: Als m en n positieve gehele getallen zijn met $n>1$, dan geldt
$x^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{x}\right)^m$ en $x^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\left(\sqrt[n]{x}\right)^m}$.

Bij de definitie van deze gebroken machten zijn negatieve grondtallen uitgesloten, omdat voor deze grondtallen de gebroken machten niet altijd eenduidig kunnen worden gedefinieerd. Zo zagen we al eerder dat $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{x}$ voor negatieve x niet bestaat.

Voor machtsfuncties van de vorm $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ is de invoerwaarde 0 prima mogelijk, aangezien de bijbehorende functiewaarde eenduidig is gedefinieerd (namelijk eveneens 0).
Daarom is het domein van de functie $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ (met m en n beide positief) het interval $\left[0, \rightarrow\right\rangle$.

OPGAVE 7.14
Leg uit dat 0 niet mogelijk is als invoerwaarde van functies van de vorm $f(x) = x^{-\frac{m}{n}}$.
Wat is dus het domein van deze functies?

Voor het maken van de grafiek van een functie van de vorm $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ beginnen we weer met het kiezen van handige invoerwaarden.

OPGAVE 7.15
Bij de functie $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ kiezen we invoerwaarden waarvan we de wortel kennen.

a Vul de onderstaande tabel in. (Zie ook opgave 7.8a.)

x	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{9}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	$6\frac{1}{4}$	9
$f(x)$										

b Teken de grafiek van de functie f.

OPGAVE 7.16
Voor het tekenen van de grafiek van de functie $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ beginnen we wederom met het kiezen van handige invoerwaarden. Dat zijn nu getallen waarvan we de *derdemachts*wortel kennen.

a Vul de onderstaande tabel in (zie ook opgave 7.11a).

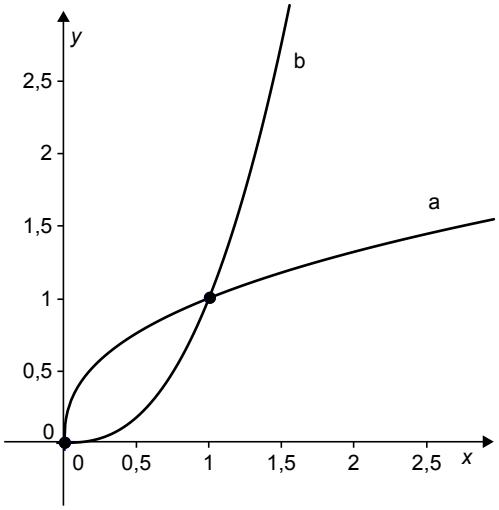
x	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{8}{125}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{8}{27}$	1	$3\frac{3}{8}$	8	$15\frac{5}{8}$	27
$g(x)$										

b Teken de grafiek van de functie g.

OPGAVE 7.17
a Wat valt u op als u de tabel die u in opgave 7.16a hebt gemaakt vergelijkt met de tabel die u in opgave 7.15a hebt gemaakt?
b Welke symmetrie bestaat er tussen de grafieken van f en g?

OPGAVE 7.18

Hieronder ziet u de grafieken van de functies $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$ en $g(x) = x^{\frac{2}{5}}$.



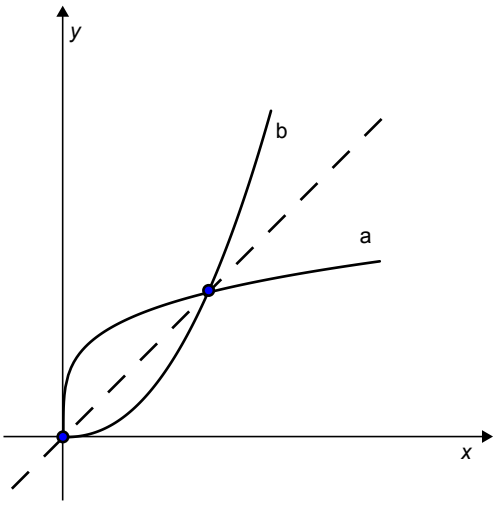
FIGUUR 7.10

a Welke grafiek hoort bij welke functie?
b Ga na dat het punt $(0,64;0,32768)$ op de grafiek van *f* ligt.
c Beredeneer zonder berekening dat uit b volgt dat het punt $(0,32768;0,64)$ op de grafiek van *g* ligt.

De grafieken van alle functies $f_r(x) = x^r$ waarin *r* een positief rationaal getal is, gaan door de punten (0, 0) en (1, 1). Voor iedere $r > 0$ geldt immers $0^r = 0$ en $1^r = 1$,

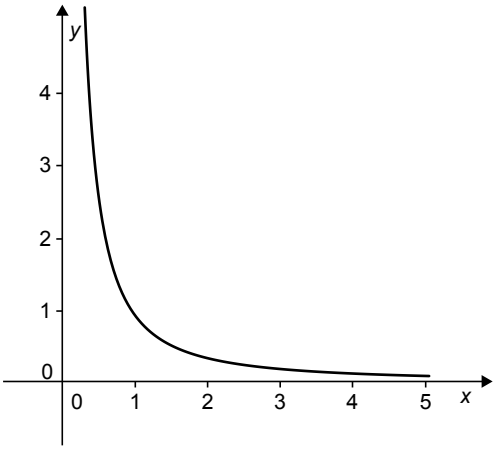
Voor $r = 1$ geldt $f_r(x) = x^1 = x$. De grafiek is dus de rechte lijn $y = x$ (gestreept in de figuur hieronder).

Voor andere positieve waarden van *r* heeft de grafiek hetzij de vorm van grafiek a in de figuur hieronder (die tussen 0 en 1 boven de lijn $y = x$ ligt) of de vorm van grafiek b (die tussen 0 en 1 onder de lijn $y = x$ ligt).



FIGUUR 7.11

De grafieken van alle functies $f_r(x) = x^r$ waarin r een negatief rationaal getal is, hebben alle ongeveer de vorm van de grafiek van $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ in de figuur hieronder.



FIGUUR 7.12

OPGAVE 7.19
Gegeven de functie $g(x) = x^{-\frac{3}{2}}$.
a Bereken $g(4)$; $g(9)$, $g(16)$ en $g(100)$.
b Hoe verloopt de grafiek van g voor $x > 4$?
c Bereken $g(0,49)$, $g(0,25)$, $g(0,16)$ en $g(0,01)$.
d Hoe verloopt de grafiek van g voor $x < 0,5$?
e Welke asymptoten heeft de grafiek van g?
f Wat zijn het domein en het bereik van g?

Het domein van de functies in figuur 7.11 is zoals we eerder al gezien hebben het interval $[0, \rightarrow\rangle$.
Om het bereik te bepalen, moeten we ons realiseren dat zowel grafiek *b* als grafiek *a* boven iedere grens uit stijgt. Bij iedere $y \geq 0$ en iedere functie $f_r(x) = x^r$ kunnen we namelijk een waarde van x vinden waarvoor geldt $y = f_r(x)$. Verderop in deze leereenheid bespreken we een algemene methode om de vergelijking $f_r(x) = y$ op te lossen; in onderstaande opgave al vast twee voorbeelden.

OPGAVE 7.20
Los de vergelijking $f_r(x) = y$ op
a als $y = 100$ en $r = \frac{1}{2}$ – dus los op $x^{\frac{1}{2}} = 100 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 100$;
b als $y = 1000$ en $r = \frac{3}{2}$ – dus los op $x^{\frac{3}{2}} = 1000 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^3 = 1000$.

Conclusie:
Voor $r > 0$ is het bereik van de functie $f_r(x) = x^r$ het interval $[0, \rightarrow\rangle$.
Voor $r < 0$ is het bereik van de functie $f_r(x) = x^r$ het interval $\langle 0, \rightarrow\rangle$.

BOX 7.2
Toepassing: Biologische schalingswetten

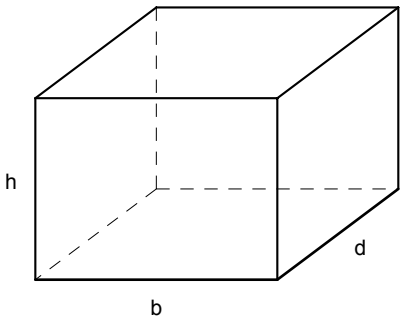
Een toepassing van machtsfuncties met gebroken exponenten vinden we in de biologische schalingswetten. Op aarde bestaat een enorme diversiteit aan organismen die verschillen in vorm, functie, en grootte. Ondanks deze enorme diversiteit zoekt de wetenschap naar universele verbanden die voor alle organismen geldig zijn. Zo liet de Amerikaanse bioloog Max Kleiber in 1932 zien dat het metabolisme van een organisme afhangt van het lichaamsgewicht tot de macht 3/4. Dit verband is geldig over een enorm bereik van grootte, van subcellulaire niveaus tot grote organismen zoals walvissen en bomen. Ook voor andere eigenschappen A en B – zoals grootte, levensduur en groeisnelheden – blijkt er een evenredigheidsrelatie te zijn van de vorm $A = c \cdot B^r$, met c een evenredigheidsconstante, en waarbij r typisch een veelvoud van $\frac{1}{4}$ is.

Het consequent voorkomen van dit soort relaties suggereert het bestaan van universele principes voor het functioneren van organismen, onafhankelijk van de specifieke organismestructuur. Zo ontwierpen de mathematisch biologen Geoffrey West en James Brown een theorie, waarbij de zgn. '1/4-machts-schaling' wordt verklaard vanuit de hiërarchische netwerkstructuren waaruit vele organismen zijn opgebouwd. Denk bijvoorbeeld aan de bloedsomloop, ademhaling, en neurale systemen bij mens en dier, en het transportweefsel van planten. Toch is deze theorie ook omstreden. Andere wetenschappers, zoals Craig White en Roger Seymour, beargumenteren juist dat het metabolisme helemaal niet met een 3/4e, maar met 2/3e macht in de massa schaalt. Deze 2/3e machtsfactor zou dan verklaard kunnen worden uit de verhouding tussen de massa van het organisme (evenredig aan haar volume) en haar warmte verlies (evenredig aan de huidoppervlakte). Het leven blijft moeilijk te bevatten …

Bron: West & Brown, (2005); White & Seymour (2003).
Zie ook: OU cursus Organismen in hun omgeving: toxicologie en afweersystemen (Löhr, 2006)
Aandachtsgebied: Organismen

VOORBEELD 7.2
Toepassing: Biologische schalingswetten

De exponent $\frac{2}{3}$ uit bovenstaande discussie kan verklaard worden met een meetkundig argument.



FIGUUR 7.13

De vorm van een balk wordt vastgelegd door de verhoudingen tussen de breedte b, de hoogte h en de diepte d. In de balk hierboven geldt $b = 4$, $h = 3$ en $d = 5$.
Als we deze balk vergroten of verkleinen met een factor x, dan geldt dus $b = 4x$, $h = 3x$ en $d = 5x$.
De inhoud van de balk wordt dan gegeven door $V = bhd = 60x^3$.
De oppervlakte van de balk (= de oppervlakte van de zes zijvlakken) wordt gegeven door $A = 2bh + 2bd + 2hd = 24x^2 + 40x^2 + 30x^2 = 94x^2$.
Uit $V = 60x^3$ volgt $x^3 = \frac{1}{60}V$ dus $x = \sqrt[3]{\frac{1}{60}} \cdot \sqrt[3]{V}$.
Nu volgt $A = 94x^2 = 94\left(\sqrt[3]{\frac{1}{60}} \cdot \sqrt[3]{V}\right)^2 = 94 \cdot \left(\frac{1}{60}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot V^{\frac{2}{3}}$.
Merk op dat $94 = 2 \times 4 \times 3 + 2 \times 4 \times 5 + 2 \times 3 \times 5$ en dat $60 = 4 \times 3 \times 5$.
De oppervlakte A is dus evenredig met $V^{\frac{2}{3}}$, waarbij de evenredigheidsconstante afhankelijk is van de verhoudingen tussen de lengte, breedte en diepte van de balk. Ook voor andere driedimensionale figuren geldt dat de oppervlakte evenredig is aan het volume tot de macht 2/3. Er geldt dus $A = c \cdot V^{\frac{2}{3}}$, waarbij de evenredigheidsconstante c afhankelijk is van de vorm van de figuur.

OPGAVE 7.21
Het warmteverlies W van een dier is evenredig aan de huidoppervlakte A. Het gewicht G is evenredig aan het volume V. Als we aannemen dat A evenredig is met $V^{\frac{2}{3}}$ geldt dan $W = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$, waarbij c afhankelijk is van (de vorm van) de diersoort. Voor een koe en een muis zijn de evenredigheidsconstanten gelijk. Een koe weegt gemiddeld 500~kg, een muis weegt gemiddeld 50~gram.
a Hoe verhouden zich de lichaamsgewichten van een koe en een muis? En hoe verhouden zich de huidoppervlakten (en dus het warmteverlies)?
Twee hondenrassen hebben ook dezelfde evenredigheidsconstanten. Het gemiddelde gewicht van het ene ras is acht keer zo groot als dat van het andere ras.
b Toon aan dat het warmteverlies van het ene ras 4 keer zo groot is als van het andere ras.
Grotere dieren kunnen gemakkelijker extreme kou verdragen dan kleinere dieren.
c Verklaar dit met behulp van uw antwoorden op vraag a en b.

OPGAVE 7.22
In voorbeeld 7.2 hebben we gevonden dat voor een balk met breedte $b = 4x$, hoogte $h = 3x$ en diepte $d = 5x$ geldt dat de oppervlakte gelijk is aan $A = 94x^2$ en dat de inhoud gelijk is aan $V = 60x^3$. Daaruit hebben we afgeleid dat $A = c \cdot V^{\frac{2}{3}}$ met evenredigheidsconstante $c = 94 \cdot \left(\frac{1}{60}\right)^{\frac{2}{3}}$.
Op een vergelijkbare manier kan een formule afgeleid worden van de vorm $V = p \cdot A^r$, met p een andere evenredigheidsconstante.

Bereken r en p in deze formule.

OPGAVE 7.23
Een kubus is een balk waarvan de ribben alle gelijke lengte hebben.
a Hoe groot is de inhoud van een kubus waarvan de ribben alle lengte x cm hebben?
b En hoe groot is de oppervlakte van elk van de zes zijvlakken van deze kubus?
c Hoe groot is de oppervlakte van het grondvlak van een kubus waarvan de inhoud 8 cm^3 is?

d En hoe groot is de oppervlakte van het grondvlak van een kubus waarvan de inhoud v cm^3 is?
e Hoe groot is de inhoud van een kubus waarvan de oppervlakte van het grondvlak 9 cm^2 is?
f En hoe groot is de inhoud van een kubus waarvan de oppervlakte van het grondvlak a cm^2 is?

VOORBEELD 7.3
Toepassing: Biologische schalingswetten

Op basis van de boven besproken geometrische verhouding tussen volume en huidoppervlak ging men er oorspronkelijk vanuit dat de metabole snelheid schaalt met de massa tot de macht 2/3. Op basis van experimentele data kwam de Amerikaanse bioloog Max Kleiber in de jaren 30 echter tot andere conclusies (zie box 7.2). Zijn wet van Kleiber stelt dat – voor de overgrote meerderheid van zoogdieren en vogels – de metabole snelheid M schaalt met de ¾ macht van de massa G van het dier. Volgens deze wet geldt dus $M = c \cdot G^{\frac{3}{4}}$.

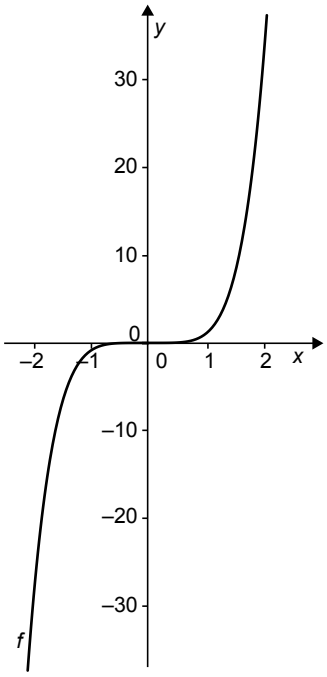
OPGAVE 7.24
Wanneer het metabolisme wordt uitgedrukt in kcal/dag en het gewicht in kilogram, geldt bij benadering $c = 100$ (kg)$^{-\frac{3}{4}}$ kcal/dag.
a Een mens weegt gemiddeld 63 kilogram. Hoe snel is zijn metabolisme?
b Een kat is honderd maal zwaarder dan een muis. Hoeveel sneller is zijn metabolisme dan?

5 Inverse functies

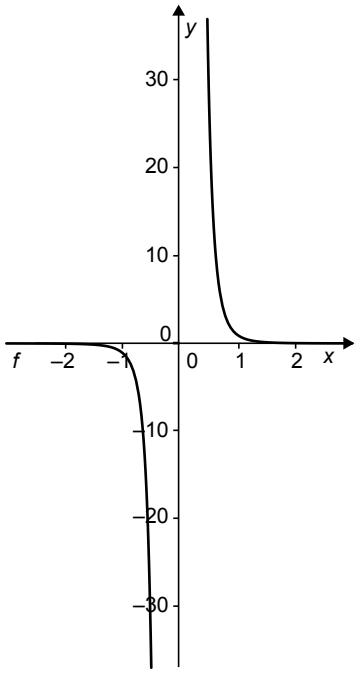
We hebben al gezien dat de functies $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $g(x) = x^3$ veel met elkaar te maken hebben.
Als een punt (a,b) op de grafiek van g ligt, dan ligt het punt (b,a) op de grafiek van f. De grafieken zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$. In deze paragraaf gaan we nader in op dergelijke verbanden tussen twee functies.
Kijk daartoe eens wat er gebeurt als we een uitvoerwaarde van f nemen als invoerwaarde van g:
Start bijvoorbeeld met 27 als invoerwaarde van f, dan is de uitvoerwaarde: $f(27) = \sqrt[3]{27} = 3$. Als we nu 3 als invoerwaarde nemen van g, dan is de bijbehorende uitvoerwaarde $g(3) = 3^3 = 27$.
En omgekeerd geldt:
Als we starten met -5 als invoerwaarde van g, dan is de bijbehorende uitvoerwaarde $g(-5) = -125$. Neem nu -125 als invoerwaarde van f, dan is de bijbehorende uitvoerwaarde $f(-125) = \sqrt[3]{-125} = -5$.

Als we dus de functies f en g na elkaar toepassen op een variabele x, komen we dus weer bij ons uitgangspunt terug.
In formule: $g(f(x)) = g(\sqrt[3]{x}) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$ en $f(g(x)) = f(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$.
Inverse De functies f en g heten elkaars *inverse* functie.

Voorwaarde voor het bestaan van de inverse van een functie f is dat er bij iedere p in het bereik van f precies één x is zodat $f(x) = p$. Met andere woorden, in de grafiek heeft iedere horizontale lijn $y = p$ precies één snijpunt met de grafiek van f.
Bij functies van de vorm $f(x) = x^n$ waarbij n een oneven geheel getal is (positief of negatief) is automatisch aan deze voorwaarde voldaan, zoals u kunt zien in onderstaande figuren.



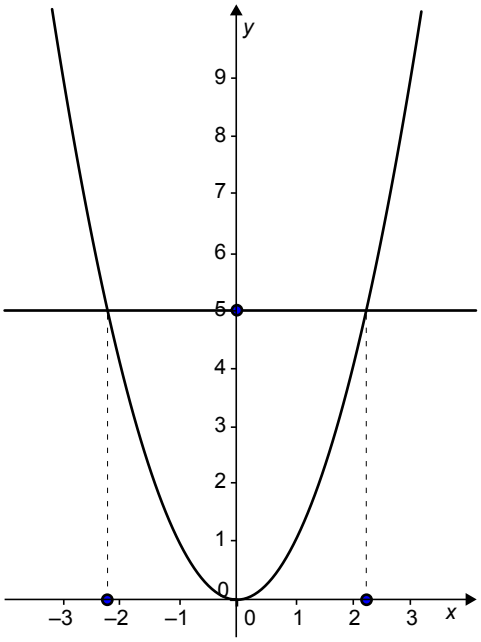
FIGUUR 7.14
$f(x) = x^5$



FIGUUR 7.15
$f(x) = x^{-5}$

OPGAVE 7.25
Wat is de inverse functie van $f(x) = x^5$?
En wat is de inverse functie van $f(x) = x^{-5}$?
(Let op: $g(x) = \sqrt[-5]{x}$ is niet gedefinieerd en is dus niet het goede antwoord!)

Voor functies van de vorm $f(x) = x^n$ waarbij n een even geheel getal is, ligt de zaak iets gecompliceerder.
Neem bijvoorbeeld $f(x) = x^2$.
Als $p > 0$, dan heeft de horizontale lijn $y = p$ twee snijpunten met de grafiek van f en zijn er dus ook twee waarden van x waarvoor geldt $f(x) = p$.
Hieronder ziet u dit geïllustreerd voor $p = 5$: $f(\sqrt{5}) = 5$ en $f(-\sqrt{5}) = 5$.



FIGUUR 7.16

Dit probleem kunnen we oplossen door het domein van *f* te beperken tot het interval $\left[0,\rightarrow\right\rangle$.
Als we in de functie $f(x)=x^2$ alleen invoerwaarden toestaan met $x\geq 0$, dan zijn de functies $f(x)=x^2$ en $g(x)=\sqrt{x}$ elkaars inverse. In paragraaf 6.3 hebben we gezien dat de grafieken van *f* en *g* dan elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn $y=x$.

OPGAVE 7.26
Als we het domein van $f(x)=x^2$ beperken tot het interval $\left\langle\leftarrow,0\right]$, dus als we alleen invoerwaarden toestaan met $x\leq 0$, dan hoort er bij iedere $p\geq 0$ ook precies één *x* waarvoor geldt $f(x)=p$.
Voor welke $x\leq 0$ geldt $f(x)=4$? En voor welke $x\leq 0$ geldt $f(x)=5$?

De grafiek van de inverse functie van *f* ontstaat zoals we gezien hebben door de grafiek van *f* te spiegelen in de lijn $y=x$.

OPGAVE 7.27
Gegeven de functie $f(x)=x^2$ met domein $\left\langle\leftarrow,0\right]$.
a Teken de grafiek van *f*. Let op het gegeven domein!
De inverse functie van *f* noemen we *g*.
b Teken de grafiek van deze inverse functie in de figuur van vraag a.
c Wat is het functievoorschrift van *g*?
d Verifieer dat als een punt (*a*,*b*) op de grafiek van *f* ligt, dat dan het punt (*b*,*a*) op de grafiek van *g* ligt.

Voor andere even waarden van de exponent *n* is de situatie hetzelfde. Bij iedere positieve *p* zijn er twee waarden van *x* waarvoor geldt $x^n=p$. De inverse functie van $f(x)=x^n$ bestaat dus alleen als we het domein van *f* beperken tot het interval $\left[0,\rightarrow\right\rangle$ (of tot het interval $\left\langle\leftarrow,0\right]$).
Als *n* een positief even getal is en we als domein het interval $\left[0,\rightarrow\right\rangle$ nemen, dan is de inverse functie van $f(x)=x^n$ de functie $g(x)=\sqrt[n]{x}$.

OPGAVE 7.28
Geef voor elk van de onderstaande functies indien mogelijk het functievoorschrift van de inverse functie:

a $f(x)=x^4$ met domein $\left[0,\rightarrow\right\rangle$
b $f(x)=x^6$ met domein $\left\langle\leftarrow,0\right]$
c $f(x)=x^{-6}$ met domein $\left[0,\rightarrow\right\rangle$
d $f(x)=x^7$ met domein $\mathbb{R}$
e $f(x)=x^{-7}$ met domein $\mathbb{R}$
f $f(x)=x^{-8}$ met domein $\mathbb{R}$

Voor functies van de vorm $f(x)=x^r$ met *r* een 'echte' breuk (dat wil zeggen $r=\frac{m}{n}$ of $r=-\frac{m}{n}$ met *m* en *n* beide positieve gehele getallen en $n>1$) is er voor iedere *p* in het bereik altijd precies één *x* in het domein van *f* waarvoor geldt $x^r=p$. Bij deze functies is het domein immers beperkt tot het interval $\left[0,\rightarrow\right\rangle$ (als $r>0$) of $\left\langle 0,\rightarrow\right\rangle$ (als $r<0$).
De waarde van deze *x* is niet moeilijk te bepalen: deze kunnen we altijd vinden op de manier van opgave 7.20.
En in opgave 7.17 hebben we gezien dat de grafieken van $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ en $g(x)=x^{\frac{2}{3}}$ elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn $y=x$. In opgave 7.18 hebt u dit ook kunnen zien voor $f(x)=x^{\frac{5}{2}}$ en $g(x)=x^{\frac{2}{5}}$.

Conclusie:
Als *m* en *n* gehele getallen zijn met $m\neq 0$ en $n>1$, dan zijn de functies $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$ en $g(x)=x^{\frac{n}{m}}$ elkaars inverse functie.

cc BY NC ND

Deze conclusie kan ook worden geïllustreerd met de volgende berekeningen:

$$f(g(x)) = f(x^{\frac{n}{m}}) = \left(x^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{n}{m}\cdot\frac{m}{n}} = x^1 = x \text{ en}$$

$$g(f(x)) = f(x^{\frac{m}{n}}) = \left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m}} = x^1 = x.$$

OPGAVE 7.29

In voorbeeld 7.2 is het verband afgeleid tussen de oppervlakte en de inhoud van een balk waarvan de verhouding breedte : hoogte : diepte gelijk is aan 4 : 3 : 5.
De oppervlakte A als functie van de inhoud V wordt dan gegeven door $A = \frac{94}{60^{\frac{2}{3}}} \cdot V^{\frac{2}{3}}$. In opgave 7.22 hebben we gevonden dat – omgekeerd – de inhoud als functie van de oppervlakte gegeven wordt door $V = \frac{60}{94^{\frac{3}{2}}} \cdot A^{\frac{3}{2}}$.
In deze opgave rekenen we na dat deze twee functies elkaars inverse zijn.

a Bereken de oppervlakte van zo'n balk als de inhoud $202\frac{1}{2}$ cm^3 is.
b Bereken de inhoud van deze balk door het antwoord van vraag a in te vullen in de formule $V = \frac{60}{94^{\frac{3}{2}}} \cdot A^{\frac{3}{2}}$.
c Herhaal vraag a en b voor het geval de inhoud van de balk v m^3 is.
d Bereken de inhoud van zo'n balk als de oppervlakte $23\frac{1}{2}$ cm^2 is.
e Bereken de oppervlakte van deze balk door het antwoord van vraag d in te vullen in de formule $A = \frac{94}{60^{\frac{2}{3}}} \cdot V^{\frac{2}{3}}$.
f Herhaal vraag d en e voor het geval de oppervlakte van de balk a cm^2 is.

OPGAVE 7.30

a Geef de inverse functie van $f(x) = x$.
b Geef ook de inverse functie van $f(x) = 3x$.

6 Vergelijkingen met machten

Voor het oplossen van vergelijkingen van de vorm $x^n = c$ met $n = 2, 3, 4$ etc. zijn de wortels uitgevonden.
Als n even is, dan geldt: $x^n = c \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{c}$ of $x = -\sqrt[n]{c}$.
Hierbij mogen zowel x als c niet negatief zijn.
Als n oneven is, dan geldt: $x^n = c \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{c}$.
Hierbij gelden er geen beperkingen voor x of c, beide kunnen ook negatief zijn.

Als $x \geq 0$ en $c \geq 0$ kunnen we ook schrijven: $x^n = c \Leftrightarrow x = c^{\frac{1}{n}}$.

Vergelijkingen van de vorm $x^{\frac{m}{n}} = c$ kunnen we ook oplossen door het omgekeerde te nemen van de exponent: $x^{\frac{m}{n}} = c \Leftrightarrow x = c^{\frac{n}{m}}$.
Er geldt immers $\left(c^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{m}{n}} = c^{\frac{n}{m}\cdot\frac{m}{n}} = c^1 = c$.

VOORBEELD 7.4 Los op: $x^{\frac{2}{3}} = 9$
Bovenstaande omzetting geeft $x = 9^{\frac{3}{2}}$
Dit kunnen we verder uitwerken tot $x = \left(\sqrt{9}\right)^3 = 3^3 = 27$

VOORBEELD 7.5 Los op: $x^{-\frac{4}{5}} = 16$
Bovenstaande omzetting geeft $x = 16^{-\frac{5}{4}}$
Dit kunnen we verder uitwerken tot $x = \frac{1}{16^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

VOORBEELD 7.6

Los op: $3x^{-\frac{2}{3}} = 5\frac{1}{3}$

Eerst links en rechts door 3 delen: $x^{-\frac{2}{3}} = 5\frac{1}{3} : 3 = \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{16}{9}$

Bovenstaande omzetting geeft dan $x = \left(\frac{16}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$

Dit kunnen we verder uitwerken tot $x = \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{\frac{9}{16}}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$

VOORBEELD 7.7

Los op: $5x^{\frac{4}{3}} - 2 = 1$

Werk de vergelijking eerst om: $5x^{\frac{4}{3}} - 2 = 1 \Leftrightarrow 5x^{\frac{4}{3}} = 3 \Leftrightarrow x^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{5}$

Bovenstaande omzetting geeft dan $x = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$

Aangezien de vierdemachtswortel van $\frac{3}{5}$ niet mooi uitkomt, moeten we het antwoord met de rekenmachine benaderen:

$x = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{4}} = 0,6^{0,75} \approx 0,6817$

OPGAVE 7.31

Los de volgende vergelijkingen op. Gebruik de rekenmachine alleen als de machten in het antwoord niet mooi uitkomen en rond het antwoord dan af op vier significante cijfers.

a $x^{\frac{5}{6}} = 32$
b $x^{-\frac{3}{4}} = 125$
c $5x^4 = 125$
d $4x^{-3} = 2$
e $3x^{\frac{3}{5}} - 1 = 80$
f $3x^{-\frac{4}{5}} = 27^{\frac{4}{3}}$

OPGAVE 7.32

Een andere vorm van '¼-machts-schaling' heeft betrekking op het hartritme H van zoogdieren. Deze schaalt met een macht ¼ van het gewicht G. Dit verband wordt benaderd door de formule $H = 1000 \cdot G^{-\frac{1}{4}}$ met het gewicht in gram, en het hartritme in slagen per minuut.

a Bereken het te verwachten hartritme van een hond van 10 kg.

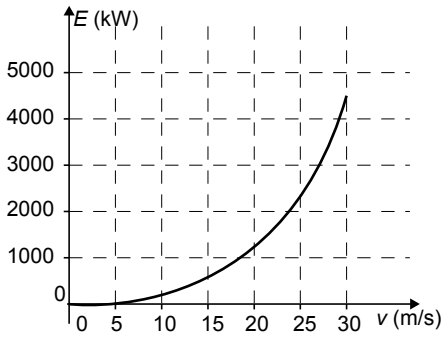
b Welk lichaamsgewicht heeft een dier met een hartritme van 200 slagen per minuut volgens deze formule?

OPGAVE 7.33

In voorbeeld 7.1 werd de energieopbrengst van een windmolen als functie van de windsnelheid gegeven door de formule $E = 0,1625v^3$ (E in kW, v in m/s). Hieronder ziet u de grafiek van deze functie voor het domein $0 < v < 30$.

Om de turbine te laten draaien, moet het niet te hard, maar ook niet te zacht waaien. Een gemiddelde molen draait alleen als de energieopbrengst groter is dan 10,4 kW. De maximale energieopbrengst is 2533 kW.

Bij welke windsnelheden draait de molen?



FIGUUR 7.17

Samenvatting

Machtsfuncties

Machtsfuncties zijn functies van de vorm $f(x) = x^r$. In deze formule is de invoervariabele x het grondtal en is de exponent r een vast rationaal getal (breuk).

Machten met positieve gehele exponenten zijn gedefinieerd voor alle reële grondtallen. In leereenheid 6 zijn machten met negatieve gehele exponenten gedefinieerd voor alle reële grondtallen behalve voor 0 en zijn machten met gebroken exponenten alleen gedefinieerd voor positieve grondtallen. Bij het onderzoeken van machtsfuncties moeten we daarom vier gevallen onderscheiden:
– als r een positief geheel getal is krijgen we functies als $f(x) = x^2$ en $f(x) = x^3$. x^r bestaat dan voor alle $x \in \mathbb{R}$ en het domein van f is dus heel $\mathbb{R}$.
– als r een negatief geheel getal is krijgen we functies als $f(x) = x^{-2} = 1/x^2$ en $f(x) = x^{-3} = 1/x^3$. x^r is dan niet gedefinieerd voor $x = 0$ en het domein van f is dan de verzameling $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$.
– als r een positief gebroken getal is, krijgen we functies als $f(x) = x^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{x}\right)^3$. x^r is dan niet gedefinieerd voor $x < 0$ en het domein van f is dan het interval $\lceil 0, \rightarrow \rangle$.
– als r een negatief gebroken getal is, krijgen we functies als $f(x) = x^{-\frac{3}{4}} = 1/\left(\sqrt[4]{x}\right)^3$. x^r is dan niet gedefinieerd voor $x \leq 0$ en het domein van f is dan het interval $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

Grafieken, domein en bereik

Al we kijken naar het bereik en het stijgen en dalen van de grafiek van $f(x) = x^r$ moeten we ook nog een onderscheid maken tussen even en oneven gehele getallen:
– als r een positief even getal is, dan verloopt de grafiek ruwweg als die van $f(x) = x^2$ (zie figuur 7.16). Het bereik is dan het interval $\lceil 0, \rightarrow \rangle$.
– als r een positief oneven getal is, dan verloopt de grafiek ruwweg als die van $f(x) = x^3$ (zie figuur 7.1 en 7.2). Het bereik is dan $\mathbb{R}$.
– als r een negatief even getal is, dan verloopt de grafiek ruwweg als die van $f(x) = 1/x^4$ (zie figuur 7.7). Het bereik is dan het interval $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
– als r een negatief oneven getal is, dan verloopt de grafiek ruwweg als die van $f(x) = 1/x^3$ (zie figuur 7.6). Het bereik is dan de verzameling $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$.
als r een positief gebroken getal is, dan loopt de grafiek zoals die van $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$ (zie figuur 7.10a) of zoals die van $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$ (zie figuur 7.10b). Het bereik is dan het interval $\lceil 0, \rightarrow \rangle$.
als r een negatief gebroken getal is, dan loopt de grafiek zoals die van $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ (zie figuur 7.12). Het bereik is dan het interval $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

Voor alle negatieve exponenten r geldt dat de x-as en de y-as asymptoten zijn van de grafiek van $f(x) = x^r$ (zie figuren 7.6, 7.7 en 7.12).

Bijzondere exponenten

Voor $r = 0$ is f de constante functie $f(x) = 1$ met als domein $\mathbb{R}$ en als bereik alleen het getal 1.
Voor $r = 1$ is f de lineaire functie $f(x) = x$. Zowel het domein als het bereik is dan $\mathbb{R}$.

Inverse functies

Twee functies f en g heten elkaars *inverse* als voor alle x uit het domein van f geldt $g(f(x)) = x$ en voor alle x uit het domein van g geldt $f(g(x)) = x$.
De grafieken van een functie en zijn inverse functie zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

De inverse van een functie $f(x) = x^n$ met n een oneven positief getal is de functie $g(x) = \sqrt[n]{x}$.
Voor een even positieve exponent n bestaat er alleen een inverse als we het domein beperken tot het interval $\langle \leftarrow, 0]$ of (meer gebruikelijk) tot het interval $[0, \rightarrow \rangle$.
In dit laatste geval is de inverse van $f(x) = x^n$ de functie $g(x) = \sqrt[n]{x}$.

Voor een oneven positieve n is het domein en het bereik van $g(x) = \sqrt[n]{x}$ heel $\mathbb{R}$.
Voor een even positieve n is $\sqrt[n]{x}$ niet gedefinieerd voor negatieve waarden van x en is de uikomst ook nooit negatief. Het domein en het bereik van $g(x) = \sqrt[n]{x}$ is dan het interval $[0, \rightarrow \rangle$.

Voor een gebroken exponent $r = \frac{m}{n}$ is de inverse functie van $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ de functie $g(x) = x^{\frac{n}{m}}$ en voor een negatieve gebroken exponent $r = -\frac{m}{n}$ is de inverse functie van $f(x) = x^{-\frac{m}{n}}$ de functie $g(x) = x^{-\frac{n}{m}}$.

Vergelijkingen

Bij het oplossen van *vergelijkingen* van de vorm $x^r = c$ onderscheiden we weer een aantal gevallen:
– Als r een oneven geheel getal is, dan heeft de vergelijking $x^r = c$ voor alle waarden van c precies één oplossing: $x = \sqrt[r]{c}$.
– Als r een even geheel getal is, dan heeft de vergelijking $x^r = c$ alleen oplossingen als $c \geq 0$. Voor $c = 0$ is de oplossing $x = 0$; voor $c > 0$ zijn er twee oplossingen, $x = \sqrt[r]{c}$ en $x = -\sqrt[r]{c}$.
– Voor een gebroken exponent $r = \frac{m}{n}$ heeft de vergelijking $x^{\frac{m}{n}} = c$ alleen een oplossing als $c \geq 0$. Deze oplossing is $x = c^{\frac{n}{m}}$. Als $\frac{m}{n} < 0$ heeft de vergelijking $x^{\frac{m}{n}} = 0$ geen oplossing.

ZELFTOETS

1 Gegeven de functie $f(x) = x^3$.
a Teken de grafiek van f voor $-2 \leq x \leq 2$.
b Teken in dezelfde figuur de grafiek van de inverse functie van f.
c Wat is het domein van de inverse functie van f als het domein van f beperkt wordt tot het interval $[-2, 2]$?

2 Gegeven de functie $f(x) = x^4$.
a Teken de grafiek van f voor $-2 \leq x \leq 2$.
b Teken de grafiek van de inverse functie van f als het domein beperkt wordt tot het interval $[0, \rightarrow \rangle$.
c Teken ook de grafiek van de inverse functie van f als het domein beperkt wordt tot het interval $\langle \leftarrow, 0]$.
d Geef het functievoorschrift van de inverse functie uit vraag c.
Wat zijn het domein en het bereik van deze inverse functie?

3 Gegeven de functie $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$.
Bereken de antwoorden van vraag a en b indien mogelijk zonder rekenmachine. Geef bij een benadering van het antwoord met de rekenmachine 4 significante cijfers.
a Bereken $f(0)$, $f(\frac{1}{16})$, $f(\frac{1}{2})$, $f(1)$, $f(4)$, $f(5\frac{1}{16})$, $f(10)$ en $f(16)$.
b Voor welke x geldt $f(x) = 27$?
En voor welke x geldt $f(x) = 2$?
c Teken de grafiek van f voor $0 \leq x \leq 16$.
d Teken ook de grafiek van de inverse functie van f.

cc BY NC ND

4 De normale hartslag H van een rustend zoogdier hangt af van het gewicht G in kg van het dier volgens de formule $H = 178 \cdot G^{-\frac{1}{4}}$. Hierin is H het aantal hartslagen per minuut.

a Hoeveel slagen per minuut maakt het hart van een rustende volwassen olifant van 4000 kg?

b Bereken bij welk gewicht een rustend zoogdier een hartslag heeft van 50 slagen per minuut.

De levensduur van een zoogdier is ook afhankelijk van het gewicht. De levensduur is evenredig met $G^{\frac{1}{4}}$. Er geldt dus $L = c \cdot G^{\frac{1}{4}}$.

c Leg uit dat hieruit volgt dat het totale aantal hartslagen gedurende het leven van een zoogdier onafhankelijk is van het gewicht.

Het totale aantal hartslagen blijkt ongeveer 1,5 miljard te zijn.

d Bereken de waarde van de evenredigheidscontante c in vier significante cijfers.

Terugkoppeling bij leereenheid 1 *201*

Terugkoppeling bij leereenheid 2 *213*

Terugkoppeling bij leereenheid 3 *221*

Terugkoppeling bij leereenheid 4 *235*

Terugkoppeling bij leereenheid 5 *251*

Terugkoppeling bij leereenheid 6 *255*

Terugkoppeling bij leereenheid 7 *263*



cc BY NC ND

Terugkoppeling bij leereenheid 1

1 Uitwerking van de opgaven

1.1 **a** $-4+5=1$ **c** $4+(-5)=-1$ **e** $-4+(-5)=-9$
b $-5+4=-1$ **d** $5+(-4)=1$ **f** $-5+(-4)=-9$

1.2 **a** $3-9=-6$ **c** $3-(-9)=12$ **e** $-3-(-9)=6$
b $9-3=6$ **d** $9-(-3)=12$ **f** $-9-(-3)=-6$

1.3 **a** Het tegengestelde van 8 is –8, en van –9 is dat 9.
b Het tegengestelde van –3 is 3. Er geldt dus dat $-(-3)=3$.
c Het getal $-a$ is niet altijd negatief zoals in vraag b gebleken is: neem voor a het getal –3, dan is $-(-3)=3$.
d Het getal 0 is neutraal, het is niet negatief en niet positief. Het getal dat op de getallenlijn even ver van het getal 0 ligt als 0 is natuurlijk het getal 0 zelf. Het tegengestelde van 0 is 0.

1.4 **a** $7-(-3)=7+3=10$
b $7+(-3)=7-3=4$
c $-7-3=-10$
d $-7-(-3)=-7+3=-4$

1.5 $a=7$, $b=-4$, $c=-1$, $d=-3$
a $abc=a\cdot b\cdot c=7\cdot(-4)\cdot(-1)=7\cdot((-4)\cdot(-1))=7\cdot 4=28$
Dus abc is positief.
b $abcd=(abc)\cdot d=28\cdot(-3)=-84$
Dus $abcd$ is negatief.
c Als in het product abc alle drie getallen negatief zijn, dan is abc ook negatief, want negatief × negatief × negatief = (negatief × negatief) × negatief = positief × negatief = negatief.
d Als in het product $abcd$ alle vier getallen negatief zijn, dan is $abcd$ positief, want uit vraag c volgt $abcd=(abc)\cdot d$ met (abc) en d beide negatief, en negatief × negatief = positief.
e Als een van de factoren in een product 0 is, dan is het product zelf ook 0. Dus $abcd=0$ als $c=0$. Het getal 0 is noch positief noch negatief.

1.6 **a** Als voorbeeld zullen we deze opgave helemaal stap voor stap uitwerken:

$$3\tfrac{2}{3}+\tfrac{5}{6}=(3+\tfrac{2}{3})+\tfrac{5}{6}=(\tfrac{3}{1}+\tfrac{2}{3})+\tfrac{5}{6}=\left(\tfrac{3\cdot 3}{1\cdot 3}+\tfrac{2}{3}\right)+\tfrac{5}{6}=$$
$$=\left(\tfrac{9}{3}+\tfrac{2}{3}\right)+\tfrac{5}{6}=\tfrac{9+2}{3}+\tfrac{5}{6}=\tfrac{11}{3}+\tfrac{5}{6}=\tfrac{11\cdot 2}{3\cdot 2}+\tfrac{5}{6}=$$
$$=\tfrac{22}{6}+\tfrac{5}{6}=\tfrac{22+5}{6}=\tfrac{27}{6}=\tfrac{27:3}{6:3}=\tfrac{9}{2}=\tfrac{8+1}{2}=\tfrac{8}{2}+\tfrac{1}{2}=4+\tfrac{1}{2}=4\tfrac{1}{2}.$$

In de praktijk doen we veel tussenstappen tegelijkertijd, bijvoorbeeld als volgt: $3\tfrac{2}{3}+\tfrac{5}{6}=\tfrac{11}{3}+\tfrac{5}{6}=\tfrac{22}{6}+\tfrac{5}{6}=\tfrac{27}{6}=\tfrac{9}{2}=4\tfrac{1}{2}$.
b $3\tfrac{2}{5}-\tfrac{3}{4}=\tfrac{17}{5}-\tfrac{3}{4}=\tfrac{4\cdot 17}{4\cdot 5}-\tfrac{5\cdot 3}{5\cdot 4}=\tfrac{68}{20}-\tfrac{15}{20}=\tfrac{53}{20}=2\tfrac{13}{20}$.
c $7\tfrac{1}{6}-6\tfrac{3}{4}=(7+\tfrac{1}{6})-(6+\tfrac{3}{4})=7+\tfrac{1}{6}-6-\tfrac{3}{4}=1+\tfrac{1}{6}-\tfrac{3}{4}=$
$$=\tfrac{24}{24}+\tfrac{4}{24}-\tfrac{18}{24}=\tfrac{24+4-18}{24}=\tfrac{10}{24}=\tfrac{5}{12}.$$

cc BY NC ND

1.7 **a** $a = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ en $b = \frac{3}{10}$
$ab = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{15}{20} = \frac{15:5}{20:5} = \frac{3}{4}$
b $a = -4$ en $b = \frac{3}{8}$
$ab = -4 \cdot \frac{3}{8} = -\frac{12}{8} = -\frac{12:4}{8:4} = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$
c $a = -\frac{3}{4}$ en $b = -2$
$ab = -\frac{3}{4} \cdot (-2) = -\frac{-6}{4} = \frac{6}{4} = \frac{6:2}{4:2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

1.8 **a** $a = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ en $b = \frac{2}{5}$, dan is $ab = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{10}{10} = 1$
b $a = -4$ en $b = -\frac{1}{4}$, dan is $ab = -4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{4} = 1$
c $a = \frac{3}{4}$ en $b = 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, dan is $ab = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{12} = 1$
Wat opvalt aan de antwoorden is dat het resultaat van de vermenigvuldiging *ab* telkens 1 is.

1.9 **a** Ook het getal 1 is zijn eigen omgekeerde, want het omgekeerde van $1 = \frac{1}{1}$ is $\frac{1}{1} = 1$.
b In 1.8a is $a = \frac{5}{2}$ en $b = \frac{2}{5}$, elkaars omgekeerde.
In 1.8b is $a = -4 = \frac{-4}{1}$ en $b = -\frac{1}{4} = \frac{1}{-4}$, elkaars omgekeerde.
In 1.8c is $a = \frac{3}{4}$ en $b = \frac{4}{3}$, elkaars omgekeerde.
c $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = \frac{a \cdot b}{a \cdot b} = 1$. Dus het product van een getal en zijn omgekeerde is gelijk aan 1.

1.10 **a** $a = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ en $b = \frac{3}{10}$
$a : b = \frac{5}{2} : \frac{3}{10} = \frac{5}{2} \cdot \frac{10}{3} = \frac{50}{6} = \frac{50:2}{6:2} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$.
b $a = -6$ en $b = \frac{3}{8}$
$a : b = -6 : \frac{3}{8} = -6 \cdot \frac{8}{3} = \frac{-48}{3} = -16$.
c $a = -\frac{3}{4}$ en $b = -2$
$a : b = -\frac{3}{4} : (-2) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{-2} = -\frac{3}{-8} = \frac{3}{8}$.

1.11 **a** $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
$3^3 = 3 \cdot 3^2 = 3 \cdot 9 = 27$
$3^4 = 3 \cdot 3^3 = 3 \cdot 27 = 81$
$3^5 = 3 \cdot 3^4 = 3 \cdot 81 = 243$
b $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$
$5^3 = 5 \cdot 5^2 = 5 \cdot 25 = 125$
$5^4 = 5 \cdot 5^3 = 5 \cdot 125 = 625$
$5^5 = 5 \cdot 5^4 = 5 \cdot 625 = 3125$
c $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$
$10^4 = (10 \cdot 10) \cdot (10 \cdot 10) = 10^2 \cdot 10^2 = 100 \cdot 100 = 10.000$
$10^6 = (10 \cdot 10) \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10) = 10^2 \cdot 10^4 = 100 \cdot 10.000 = 1.000.000$

1.12 **a** $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2)^2 = (-2) \cdot 4 = -8$
b $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2)^3 = (-2) \cdot (-8) = 16$
$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2)^4 = (-2) \cdot 16 = -32$
c $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$
$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3)^2 = (-3) \cdot 9 = -27$
$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3)^3 = (-3) \cdot (-27) = 81$
$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3)^4 = (-3) \cdot 81 = -243$
d Eerder hebben we gezien dat $(-2)^2$ positief is, en ook $(-2)^4$, terwijl $(-2)^3$ en $(-2)^5$ negatief zijn. Blijkbaar is bij een even getal n de macht $(-2)^n$ positief en bij een oneven getal n is de macht $(-2)^n$ negatief.
Omdat 9999 oneven is, is $(-2)^{9999}$ een negatief getal.

1.13 **a** $\left(\frac{3}{5}\right)^5 = \left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5} = \frac{3^5}{5^5} = \frac{243}{3125}$

$\left(1\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{5}{3}\right)^5 = \frac{5^5}{3^5} = \frac{3125}{243} = 12\frac{209}{243}$

b $\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1^5}{3^5} = \frac{1}{243}$

$\left(-\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{-2}{3}\right)^5 = \frac{(-2)^5}{3^5} = \frac{-32}{243}$

c $\frac{1^5}{5} = \frac{1}{5}$

1.14 **a** $(-4)^4 = (-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4) = (-4)^2\cdot(-4)^2 = 16\cdot 16 = 256$.

b $(-6)^3 = (-6)\cdot(-6)\cdot(-6) = -6\cdot(-6)^2 = -6\cdot 36 = 216$.

c $(-7)^2 = (-7)\cdot(-7) = 49$.

1.15 **a** $\sqrt[4]{256} = 4$ want $4^4 = 256$.

b $\sqrt[4]{-4^4}$ bestaat niet, want $-4^4 = -256$ en een evenmachtswortel uit een negatief getal bestaat niet.

c $\sqrt[3]{216} = 6$ want $6^3 = 216$.

d $\sqrt[3]{-6^3} = -6$ want $(-6)^3 = -216 = -6^3$.

e $\sqrt{49} = 7$ want $7^2 = 49$.

f $\sqrt{-7^2}$ bestaat niet, want $-7^2 = -49$ en de wortel uit een negatief getal bestaat niet.

1.16 **a** Zowel A als B bevatten de natuurlijke getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en geen andere. De verzamelingen A en B zijn dus gelijk.

b De verzamelingen C en D zijn verschillend. Zo zit het rationale getal $\frac{1}{2}$ wel in C maar niet in D, en alle reële getallen in D, zoals π en $\sqrt{2}$, zitten niet in de verzameling C.

1.17 **a** Alle getallen die kleiner zijn dan 4, dus alle x waarvoor geldt $x < 4$, wordt in intervalnotatie $\langle \leftarrow, 4\rangle$. De bovengrens hoort namelijk niet tot deze deelverzameling.

b Alle getallen die NIET kleiner zijn dan 4, dus alle x waarvoor geldt $x \geq 4$, wordt $[4, \rightarrow\rangle$.

c Alle getallen die kleiner zijn dan 4, maar niet kleiner dan π, dus alle getallen x waarvoor geldt $x < 4$ en $x \geq \pi$, wordt in intervalnotatie $[\pi, 4\rangle$.

1.18 **a** In $A = [2, 4]$ liggen de gehele getallen 2, 3 en 4. In $B = \langle 1, 5\rangle$ liggen de gehele getallen 2, 3 en 4. In A en B liggen dezelfde gehele getallen! De verklaring hiervan ligt in het feit dat er tussen 1 en 2, dus in het interval $\langle 1, 2\rangle$ géén gehele getallen liggen. Evenzo liggen er ook géén gehele getallen tussen 4 en 5.

b Het interval B bevat het interval A, alle getallen in A komen ook voor in B. Omgekeerd echter geldt dit niet. Zo ligt het rationale getal $1\frac{1}{2}$ wel in B maar niet in A.

c Het irrationale getal $\sqrt{2}$ zit wel in B, maar niet in A want $1 < \sqrt{2} < 2$.

1.19 $a = 2$ en $b = 3$

a $a + 3b = 2 + 3\cdot 3 = 2 + 9 = 11$

$(a + 3)b = (2 + 3)\cdot 3 = 5\cdot 3 = 15$

b $a - b^3 = 2 - 3^3 = 2 - 27 = -25$

$(a - b)^3 = (2 - 3)^3 = (-1)^3 = -1$

c $a - 3b^2 = 2 - 3\cdot 3^2 = 2 - 3\cdot 9 = 2 - 27 = -25$

$(a - 3)b^2 = (2 - 3)\cdot 3^2 = (-1)\cdot 9 = -9$

cc BY NC ND

1.20 De volgorde van de bewerkingen, zoals Jeroen die heeft uitgevoerd, is: $((((10 + 8) : 6) - 4) \cdot 3)^2$.
Omdat delen voorrang heeft op aftrekken, kan dit ook met een paar haakjes minder: $(((10 + 8) : 6 - 4) \cdot 3)^2$.

1.21 **a** $124 + 637 - 24 = 124 + 637 + (-24) = 124 + (-24) + 637 = 100 + 637 = 737$.
b $32 \times 97 : 16 = 32 \times 97 \times \frac{1}{16} = 32 \times \frac{1}{16} \times 97 = \frac{32}{16} \times 97 = 2 \times 97 = 194$.
c $3 : 2^3 \times 8 : 27 - 2 : \sqrt{36} \times 3 + 2 : 3^2 =$
$3 : 8 \times 8 : 27 - 2 : 6 \times 3 + 2 : 9 =$
$3 \times \frac{1}{8} \times 8 \times \frac{1}{27} - 2 \times \frac{1}{6} \times 3 + 2 \times \frac{1}{9} =$
$(\frac{1}{8} \times 8) \times (3 \times \frac{1}{27}) - (2 \times 3) \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{9} =$
$1 \times \frac{3}{27} - \frac{6}{6} + \frac{2}{9} = \frac{1}{9} - 1 + \frac{2}{9} =$
$\frac{1}{9} + (-1) + \frac{2}{9} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + (-1) = \frac{3}{9} + (-\frac{9}{9}) = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$

1.22 **a** De afleiding van regel (2) gaat als volgt:
$p \cdot (a - b) = p \cdot (a + (-b)) = p \cdot a + p \cdot (-b) = p \cdot a + (-b) \cdot p =$
$= p \cdot a + (-b \cdot p) = p \cdot a - b \cdot p = p \cdot a - p \cdot b$
De afleiding van regel (4) gaat als volgt:
$(a - b) : q = (a - b) \times \frac{1}{q} = a \cdot \frac{1}{q} - b \cdot \frac{1}{q} = a : q - b : q$
Bij de laatste afleiding is ook regel (1) gebruikt.
b $q : (a + b) = q : a + q : b$ is een onware bewering (behalve als $q = 0$ en $a \neq 0$, $b \neq 0$ en $a + b \neq 0$).
Bijvoorbeeld $q = 4$, $a = 1$, $b = 1$: $q : (a + b) = 4 : (1 + 1) = 2$,
maar $q : a + q : b = 4 : 1 + 4 : 1 = 8$.

1.23 **a** $3(a - b) + 4(a + b) = 3a - 3b + 4a + 4b = (3 + 4)a + (-3 + 4)b = 7a + b$.
b $4a + 5(a^2 - a) + 6a^2 = 4a + 5a^2 - 5a + 6a^2 = (5 + 6)a^2 + (4 - 5)a = 11a^2 - a$.

1.24 **a** $3(a + b) - 4(a - b) = 3a + 3b - 4a + 4b = (3 - 4)a + (3 + 4)b = (-1)a + 7b$.
b $4a + 6a^2 - (a^2 + a) = 4a + 6a^2 - a^2 - a = (4 - 1)a + (6 - 1)a^2 = 3a + 5a^2$.

1.25 **a** $(x - 4)(2x + 3) = x \cdot 2x - 4 \cdot 2x + x \cdot 3 - 4 \cdot 3 = 2x^2 - 8x + 3x - 12 =$
$2x^2 - 5x - 12$.
b $(x - y)(x - y) = x \cdot x - y \cdot x + x \cdot (-y) - y \cdot (-y) = x^2 - xy - xy + y^2 =$
$x^2 - 2xy + y^2$.
c $(4x + 6y)(2x + y) = 4x \cdot 2x + 6y \cdot 2x + 4x \cdot y + 6y \cdot y =$
$8x^2 + 12xy + 4xy + 6y^2 = 8x^2 + 16xy + 6y^2$.
d $(3 - x)(x + 3) = 3 \cdot x - x \cdot x + 3 \cdot 3 - x \cdot 3 = -x^2 + 9$.

1.26 De merkwaardige producten zijn:
a $(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A \cdot A + B \cdot A + A \cdot B + B \cdot B = A^2 + 2AB + B^2$.
b $(A - B)^2 = (A - B) \cdot (A - B) = A \cdot A - B \cdot A + A \cdot (-B) - B \cdot (-B) =$
$A^2 - 2AB + B^2$.
c $(A - B)(A + B) = A \cdot A - B \cdot A + A \cdot B - B \cdot B = A^2 - B^2$.

1.27 **a** $(3 - 1)(3 + 2) - (4 + 2)(5 - 4) = (3 \cdot 3 - 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2) - (4 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot (-4) + 2 \cdot (-4)) = (9 - 3 + 6 - 2) - (20 + 10 - 16 - 8) =$
$9 - 3 + 6 - 2 - 20 - 10 + 16 + 8 = 4$.
b Vermenigvuldigen gaat voor aftrekken. Dus moet de som $(3 - 1)(3 + 2) - (4 + 2)(5 - 4)$ worden opgevat als $((3 - 1)(3 + 2)) - ((4 + 2)(5 - 4))$. Dat is in de gegeven uitwerking niet gedaan.

1.28 **a** $2 \cdot 3^4 = 2 \cdot (3^4) = 2 \cdot 81 = 162$.
b $(2 \cdot 3)^4 = 6^4 = 1296$.
c $64 : 2^3 = 64 : (2^3) = 64 : 8 = 8$.
d $(64 : 2)^3 = (32)^3 = 32.768$.
e $2^4 + 3^4 = (2^4) + (3^4) = 16 + 81 = 97$.
f $(2 + 3)^4 = (5)^4 = 625$.

1.29 **a** $(ab)^4 = a^4b^4$.
b $\frac{a^{27}}{a^{19}} = a^{27-19} = a^8$.
c $\frac{a^4}{a^3} = a^{4-3} = a^1 = a$.
d $(ab^2)^4 = a^4(b^2)^4 = a^4b^8$.
e $\frac{a^{12} \cdot a^7}{(a^4)^4} = \frac{a^{12+7}}{a^{4 \cdot 4}} = \frac{a^{19}}{a^{16}} = a^{19-16} = a^3$.
f $\frac{a \cdot a^5}{(a^2)^3} = \frac{a^{1+5}}{a^{2 \cdot 3}} = \frac{a^6}{a^6} = a^{6-6} = a^0 = 1$.
g $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (merkwaardig product).
h $\frac{(a^4 + b)^2 - b^2}{a^2} = \frac{(a^4)^2 + 2a^4b + b^2 - b^2}{a^2} = \frac{a^8 + 2a^4b}{a^2} =$
$= \frac{a^8}{a^2} + \frac{2a^4b}{a^2} = a^{8-2} + 2b \cdot a^{4-2} = a^6 + 2a^2b$
i $\frac{(a^4 + b)^2 - b^2}{a} = \frac{a^8 + 2a^4b}{a} = \frac{a^8}{a} + \frac{2a^4b}{a} = a^7 + 2a^3b$

1.30 **a** $3^{-1} = \frac{1}{3}$.
b $3^{-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$.
c $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 1 \times 2 = 2$.
d $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^5 = \left(2\right)^5 = 32$.
e $\left(-1\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{-1} = \left(-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)}\right) = -1 \times \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$.
f $\left(-1\frac{1}{2}\right)^{-5} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{-5} = \left(-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)}\right)^5 = \left(-\frac{2}{3}\right)^5 = (-1)^5 \frac{2^5}{3^5} = \frac{-32}{243}$.

1.31 **a** $a = 3$ en $b = 2$, dan is
$(a - b)^3 = (3 - 2)^3 = 1^3 = 1$ en $a^3 - b^3 = 3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19$.
b $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (merkwaardig product).
$(a - b)^3 = (a - b) \cdot (a - b) \cdot (a - b) = (a - b) \cdot (a - b)^2 =$
$= (a - b) \cdot (a^2 - 2ab + b^2) = a^3 - 2a^2b + ab^2 - ba^2 + 2ab^2 - b^3 =$
$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
Dit klopt met de gepresenteerde uitwerking.
c $a = 3$ en $b = 2$, dan is
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = 3^3 - 3 \cdot 3^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 2^2 - 2^3 = 27 - 54 + 36 - 8 = 1$.
$(a - b)^3 = 1$ volgens opgave a.
Beide uitkomsten zijn dus gelijk.

cc BY NC ND

1.32 **a** $\sqrt{4900} = \sqrt{49 \cdot 100} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{100} = 7 \cdot 10 = 70.$

b $\dfrac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{128}{2}} = \sqrt[3]{64} = 4.$

c $\sqrt{250} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{250 \cdot 10} = \sqrt{25 \cdot 100} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{100} = 5 \cdot 10 = 50.$

d $\sqrt[3]{-0{,}008} = \sqrt[3]{\dfrac{-8}{1000}} = \dfrac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{1000}} = \dfrac{-2}{10} = -\dfrac{1}{5}.$

e $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2 \cdot 8} = \sqrt[4]{16} = 2.$

f $\dfrac{\sqrt{-75}}{\sqrt{-3}}$ kan niet, want de wortel uit een negatief getal bestaat niet.

1.33 **a** $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$

b $\sqrt{468} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 13} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{13} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{13} = 6\sqrt{13}.$

c $\sqrt{\frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{3}{36}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{6}\sqrt{3}.$

d $\sqrt{0{,}75} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$

e $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}.$

f $\sqrt{1\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$

1.34 $a = 16$ en $b = 9$, dan is

a $\sqrt{a} = \sqrt{16} = 4,\ \sqrt{b} = \sqrt{9} = 3,\ \sqrt{a+b} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$

b $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 4 + 3 = 7,$ dit is *niet* gelijk aan $\sqrt{a+b} = 5.$

c $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 4 - 3 = 1,\ \sqrt{a-b} = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}.$

Dus $\sqrt{a-b}$ is *niet* gelijk aan $\sqrt{a} - \sqrt{b}.$

1.35 **a** $\sqrt{12} + \sqrt{108} = \sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{36 \cdot 3} = 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$

b $\sqrt{32} - \sqrt{2} = \sqrt{16 \cdot 2} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$

c $\sqrt{1000} - \sqrt{360} = \sqrt{100 \cdot 10} - \sqrt{36 \cdot 10} = 10\sqrt{10} - 6\sqrt{10} = 4\sqrt{10}.$

1.36 **a** Als $x = 2$, dan is $(x + 4)^2 = (2 + 4)^2 = (6)^2 = 36.$
Dus $x = 2$ is inderdaad een oplossing van $(x + 4)^2 = 36.$

b Als $x = 2$, dan is $6(x + 4) = 6(2 + 4) = 6 \cdot 6 = 36.$
Dus $x = 2$ is geen oplossing van $6(x + 4) = 12.$
Als $x = 2$, dan is $6(x + 4) = 36$ en $(x + 4)^2 = 36.$
Dus $x = 2$ is inderdaad een oplossing van de vergelijking $6(x + 4) = (x + 4)^2.$

c Omdat naast $6^2 = 36$ ook $(-6)^2 = 36$, is ook $x = -10$ een oplossing van $(x + 4)^2 = 36.$

1.37 De graad van de vergelijking $x^3 = x^4$ is 4, omdat 4 de exponent is van de hoogste macht.
De graad van $(x - 1)(x + 1) = 3$ is 2 want dit is dezelfde vergelijking als $x^2 - 1 = 3.$

1.38 Gegeven de vergelijking $10x + 200 = 2500.$
Links en rechts 200 aftrekken geeft $10x = 2300.$
Links en rechts delen door 10 geeft $x = 230.$

1.39 Gegeven de vergelijking $-\frac{1}{3}x + 6 = 4x - 8.$
Links en rechts met 3 vermenigvuldigen geeft: $-x + 18 = 12x - 24.$
Links en rechts 24 optellen geeft: $-x + 42 = 12x.$
Links en rechts x optellen geeft: $42 = 13x.$
Links en rechts delen door 13 geeft: $x = \frac{42}{13} = 3\frac{3}{13}.$

1.40 **a** $3x - 6 = 5x + 7$
Links en rechts $3x + 7$ aftrekken: $-6 - 7 = 5x - 3x$
ofwel: $-13 = 2x$
Links en rechts delen door 2: $x = -\frac{13}{2} = -6\frac{1}{2}$
Controle:
$3 \cdot \left(-6\frac{1}{2}\right) - 6 = 5 \cdot \left(-6\frac{1}{2}\right) + 7 \Leftrightarrow -19\frac{1}{2} - 6 = -32\frac{1}{2} + 7 \Leftrightarrow -25\frac{1}{2} = -25\frac{1}{2}$
De vergelijking klopt voor $x = -6\frac{1}{2}$.
b $5x + 4 = 3x + 3$
$3x + 4$ aftrekken: $5x - 3x = 3 - 4 \Leftrightarrow 2x = -1$
delen door 2: $x = -\frac{1}{2}$
Controle: $5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} + 4 = -\frac{3}{2} + 3 \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$
De vergelijking klopt voor $x = -\frac{1}{2}$.
c $\frac{1}{4}x + 3 = \frac{2}{3}x - 2$
vermenigvuldigen met 12: $3x + 36 = 8x - 24$
24 optellen: $3x + 60 = 8x$
$3x$ aftrekken: $60 = 5x$
delen door 5: $x = 12$
Controle: $\frac{1}{4} \cdot 12 + 3 = \frac{2}{3} \cdot 12 - 2 \Leftrightarrow 3 + 3 = 8 - 2 \Leftrightarrow 6 = 6$
De vergelijking klopt voor $x = 12$.
d $\frac{1}{3}(x + 4) = 2x + 13$
vermenigvuldigen met 3: $(x + 4) = 6x + 39$
x aftrekken: $4 = 5x + 39$
39 aftrekken: $-35 = 5x$
delen door 5: $x = -7$
Controle: $\frac{1}{3}(-7 + 3) = 2 \cdot (-7) + 13 \Leftrightarrow -\frac{3}{3} = -14 + 13 \Leftrightarrow -1 = -1$
De vergelijking klopt voor $x = -7$.

1.41 **a** $2x^2 - 3x + 5 = 0$ vergelijken met $ax^2 + bx + c = 0$ geeft:
$a = 2$, $b = -3$ en $c = 5$.
b $x^2 + x + 1 = 0$; $a = 1$, $b = 1$ en $c = 1$.
c $x^2 + 7x = 0$; $a = 1$, $b = 7$ en $c = 0$.
d $2x^2 - 4 = 0$; $a = 2$, $b = 0$ en $c = -4$.

1.42 **a** $(x + 4)^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 = 36 \Leftrightarrow x^2 + 8x - 20 = 0$.
Dit is de standaardvorm met $a = 1$, $b = 8$ en $c = -20$.
b $4x^2 + 9x + 8 = 2x^2 - x \Leftrightarrow 2x^2 + 9x + 8 = -x \Leftrightarrow 2x^2 + 10x + 8 = 0$
Dit is de standaardvorm met $a = 2$. Links en rechts delen door 2 geeft:
$x^2 + 5x + 4 = 0$.
Dit is de standaardvorm met $a = 1$, $b = 5$ en $c = 4$.

1.43 **a** $3x^2 = 27 \Leftrightarrow x^2 = 9$, dus $x = 3$ of $x = -3$.
Beide oplossingen leveren bij invullen in de oorspronkelijke vergelijking een ware bewering op.
b $3x^2 + 27 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = -27$, dus $x^2 = -9$.
Een kwadraat van een reëel getal kan nooit negatief zijn. Dus deze vergelijking heeft geen oplossingen.
c $7 - 10x^2 = 8x^2 + 5$.
Links en rechts 7 aftrekken: $-10x^2 = 8x^2 - 2$
Links en rechts $8x^2$ aftrekken: $-18x^2 = -2$
Links en rechts delen door -18: $x^2 = \frac{-2}{-18} = \frac{1}{9}$
Hieruit volgt $x = \frac{1}{3}$ of $x = -\frac{1}{3}$.
Controle: $7 - 10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 8\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5 \Leftrightarrow 7 - \frac{10}{9} = \frac{8}{9} + \frac{5}{1} \Leftrightarrow 5\frac{8}{9} = 5\frac{8}{9}$
De vergelijking klopt dus voor de oplossing $x = \frac{1}{3}$.
De controle voor $x = -\frac{1}{3}$ verloopt analoog.

BY NC ND

d $7x^2 - 56 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 = 56 \Leftrightarrow x^2 = 8$.
Hieruit volgt $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ of $x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$.
Controle: $7 \cdot (2\sqrt{2})^2 - 56 = 0 \Leftrightarrow 7 \cdot 8 - 56 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$.
De vergelijking klopt dus voor $x = 2\sqrt{2}$; analoog voor $x = -2\sqrt{2}$.

1.44 **a** $x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x \cdot x + x \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow x(x + 4) = 0$
Dus $x = 0$ of $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.
Oplossingen zijn $x = 0$ en $x = -4$. Beide leveren een ware bewering bij invullen in de oorspronkelijke vergelijking.
b $x^2 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0$.
Dus $x = 0$ of $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.
Oplossingen zijn $x = 0$ en $x = 4$.
Controle: beide oplossingen leveren een ware bewering op.
c $3x^2 + 4 = 2(x + 2) \Leftrightarrow 3x^2 + 4 = 2x + 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 2) = 0$.
Dus $x = 0$ of $3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.
Beide oplossingen leveren een ware bewering op: neem $x = \frac{2}{3}$, dan is $3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 = 2\left(\frac{2}{3} + 2\right) \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{4}{9} + 4 = \frac{4}{3} + 4 \Leftrightarrow \frac{12}{9} + 4 = \frac{4}{3} + 4 \Leftrightarrow 5\frac{1}{3} = 5\frac{1}{3}$.
Neem $x = 0$, dan is $3 \cdot 0^2 + 4 = 2(0 + 2) \Leftrightarrow 4 = 4$.
d $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 4 = \frac{2}{3}(x + 6) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4 = \frac{2}{3}x + 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 2\frac{1}{3}x = 0 \Leftrightarrow x(\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{3}) = 0$.
Dus $x = 0$ of $\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = -\frac{7}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{14}{3} = -4\frac{2}{3}$.
Controle door invullen in oorspronkelijke vergelijking:
Neem $x = -\frac{14}{3}$, dan is
$\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{14}{3}\right)^2 + 3\left(-\frac{14}{3}\right) + 4 = \frac{2}{3}\left(-\frac{14}{3} + 6\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{196}{9} - 14 + 4 = -\frac{28}{9} + 4 \Leftrightarrow \frac{8}{9} = \frac{8}{9}$, dit klopt dus!
Neem $x = 0$, dan is $\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 4 = \frac{2}{3}\left(0 + 6\right) \Leftrightarrow 4 = 4$. Ook dit klopt.

1.45 **a** $x^2 + 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x + 4) = 0$, want $3 \cdot 4 = 12$ en $3 + 4 = 7$.
Dus $x + 3 = 0$ of $x + 4 = 0$, ofwel $x = -3$ of $x = -4$.
b $x^2 + 4x = 12 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x + 6)(x - 2) = 0$, want $6 \cdot (-2) = -12$ en $6 - 2 = 4$.
Dus $x + 6 = 0$ of $x - 2 = 0$, ofwel $x = -6$ of $x = 2$.
c $5x^2 + 3x + 13 = 2x^2 + 21x - 11 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x - 2) = 0$, want $-4 \cdot (-2) = 8$ en $-4 - 2 = -6$.
Dus $x - 4 = 0$ of $x - 2 = 0$, ofwel $x = 4$ of $x = 2$.
d $3(x - 5) = x^2 - 25 \Leftrightarrow 3x - 15 = x^2 - 25 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 2) = 0$, want $-5 \cdot 2 = -10$ en $-5 + 2 = -3$.
Dus $x - 5 = 0$ of $x + 2 = 0$, ofwel $x = 5$ of $x = -2$.

1.46 **a** $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$, een merkwaardig product!
Dus voorbeeld 1.27 is correct.
b $(x + 4)^2 = 22 \Leftrightarrow (x + 4) = \sqrt{22}$ of $(x + 4) = -\sqrt{22}$.
Hieruit volgt $x = -4 + \sqrt{22}$ of $x = -4 - \sqrt{22}$.

1.47 $\frac{1}{2}(6 - \sqrt{28}) = 0,3542$.
$3 - \sqrt{7} = 0,3542$.

1.48 **a** $x^2 + 9x + 12 = 0$
abc-formule met $a = 1$, $b = 9$, $c = 12$
$D = b^2 - 4ac = 81 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 81 - 48 = 33$.
Dus $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{1}{2}(-9 + \sqrt{33})$ of $x = \frac{1}{2}(-9 - \sqrt{33})$.
b $x^2 + 12 = x \Leftrightarrow x^2 - x + 12 = 0$
abc-formule met $a = 1$, $b = -1$, $c = 12$

$D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = -35 < 0$, geen oplossingen.
c $x^2 + 4x = 4 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 4 = 0$
abc-formule met $a = 1$, $b = 4$, $c = -4$
$D = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 32$
Dus $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 + 4\sqrt{2}}{2} = -2 + 2\sqrt{2}$ of $x = -2 - 2\sqrt{2}$.
d $x^2 = 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$
abc-formule met $a = 1$, $b = -4$, $c = 4$
$D = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$, er is één oplossing.
Dus $x = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$.
e $3x^2 + 2x + 6 = 5\frac{1}{2}x + 5 \Leftrightarrow 3x^2 - 3\frac{1}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 7x + 2 = 0$
abc-formule met $a = 6$, $b = -7$, $c = 2$
$D = b^2 - 4ac = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 1$
Dus $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 + 1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ of $x = \frac{7 - 1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.
f $(x + 2)(x + 3) = 4x \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 4x \Leftrightarrow x^2 + x + 6 = 0$
abc-formule met $a = 1$, $b = 1$, $c = 6$
$D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -23 < 0$, geen oplossingen.

1.49 **a** $x^2 + 28 = 11x \Leftrightarrow x^2 - 11x + 28 = 0 \Leftrightarrow (x - 7)(x - 4) = 0$, want $-7 \cdot (-4) = 28$ en $-5 - 4 = -11$.
Dus de oplossingen zijn $x = 7$ en $x = 4$.
b $x^2 + 28 = 10x \Leftrightarrow x^2 - 10x + 28 = 0$
abc-formule met $a = 1$, $b = -10$, $c = 28$
$D = b^2 - 4ac = 100 - 4 \cdot 1 \cdot 28 = -12 < 0$, geen oplossingen.
c $3x^2 - 4x = 2x - 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$ (merkwaardig product).
Dus er is maar één oplossing, $x = 1$.
d $3x^2 - 4x = x + 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0$
abc-formule met $a = 3$, $b = -5$, $c = -2$
$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25 + 24 = 49$.
Dus de oplossingen zijn $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 + \sqrt{49}}{6} = \frac{5 + 7}{6} = 2$ en $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 - 7}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$.
e $4x^2 + 1 = 5x \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - \frac{1}{4}) = 0$, want $-1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$ en $-1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$.
Dus de oplossingen zijn $x = 1$ en $x = \frac{1}{4}$.
f $4x^2 + 5 = x \Leftrightarrow 4x^2 - x + 5 = 0$
abc-formule met $a = 4$, $b = -1$, $c = 5$
$D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = -79 < 0$, geen oplossingen.
g $(2x + 3)^2 = 9 \Leftrightarrow 2x + 3 = \sqrt{9} = 3$ of $2x + 3 = -\sqrt{9} = -3$.
De oplossingen zijn dus $x = 0$ of $x = -3$.
h $-(2x + 3)^2 = 12x \Leftrightarrow -(4x^2 + 12x + 9) - 12x = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 9 + 12x = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 24x + 9 = 0$
abc-formule met $a = 4$, $b = 24$, $c = 9$
$D = b^2 - 4ac = (24)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 576 - 144 = 432$ $(= 3 \cdot 144)$
Dus de oplossingen zijn $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-24 + 12\sqrt{3}}{8} = -3 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$ en $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-24 - 12\sqrt{3}}{8} = -3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

1.50 **a** $\frac{x^2}{x+3} = 1 + \frac{9}{x+3} \Leftrightarrow x^2 = (x+3) + 9 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow$

cc BY NC ND

$(x-4)(x+3)=0$, want $-4\cdot 3=-12$ en $-4+3=-1$.
Dus de oplossingen zijn $x=4$ en $x=-3$, maar met $x=-3$ is iets aan de hand, zie opgave b.
b Controle door de oplossingen in de oorspronkelijke vergelijking in te vullen, laat zien dat $x=4$ met $\frac{16}{4+3}=1+\frac{9}{4+3}$ een ware bewering oplevert, maar met $x=-3$ krijgen we noemers die 0 worden. Dat mag niet, dus $x=-3$ moeten we schrappen als oplossing van deze vergelijking.

1.51 **a** $x^2-13x+40=0 \Leftrightarrow (x-8)(x-5)=0$, want $-8-5=-13$ en $-8\cdot(-5)=40$.
Dus de oplossingen zijn $x=8$ en $x=5$.
b $x=8$ is ook een oplossing van $x-\sqrt{x-4}=6$, maar $x=5$ niet; voor $x=5$ krijg je $5-\sqrt{5-4}=5-1=4$.
Door het kwadrateren van de linker en rechter uitdrukking introduceert u blijkbaar een extra oplossing.

1.52 **a** $\frac{7x}{x-3}=x \Leftrightarrow 7x=x(x-3) \Leftrightarrow 7x=x^2-3x \Leftrightarrow x^2-10x=0 \Leftrightarrow x(x-10)=0$.
De oplossingen zijn dus $x=0$ en $x=10$.
Controle: beide oplossingen maken de noemer niet 0. Beide oplossingen voldoen dus.
b $2x+\sqrt{x+2}=2 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=2-2x \Leftrightarrow x+2=(2-2x)^2 \Leftrightarrow$
$x+2=4-8x+4x^2 \Leftrightarrow 4x^2-9x+2=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{9}{4}x+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow$
$(x-2)(x-\frac{1}{4})=0$, want $-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$ en $-2-\frac{1}{4}=-\frac{9}{4}$.
Dus de oplossingen zijn $x=2$ en $x=\frac{1}{4}$.
Controle laat zien dat $x=\frac{1}{4}$ een ware bewering oplevert, maar met $x=2$ krijgt u $2\cdot 2+\sqrt{2+2}=4+2=6$.
Daarmee is $x=\frac{1}{4}$ de enige oplossing.

2 Antwoorden op de zelftoets

1 In onderstaande tabel vinken we aan tot welke verzameling de verschillende elementen behoren.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-3		✓	✓	✓
$\frac{4}{5}$			✓	✓
$\frac{1}{2}\sqrt{2}$				✓
391	✓	✓	✓	✓
0,17			✓	✓
$\sqrt[3]{10}$				✓
$\frac{1}{2}\pi$				✓

2 **a** 5 **f** 21
b 0 **g** -32
c 9 **h** -2
d 2 **i** $\frac{16}{81}$
e 7

3 Tegenstelde van $\frac{1}{3}$ is $-\frac{1}{3}$; omgekeerde van $\frac{1}{3}$ is 3.

4 **a** $\frac{3}{5}+\frac{1}{4}=\frac{3\cdot 4}{5\cdot 4}+\frac{1\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{12}{20}+\frac{5}{20}=\frac{17}{20}$
b $\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{6}=\frac{2^2}{3^2}-\frac{1}{6}=\frac{4}{9}-\frac{1}{6}=\frac{8}{18}-\frac{3}{18}=\frac{5}{18}$
c $\frac{2}{7}\cdot\frac{-3}{4}=-\frac{2\cdot 3}{4\cdot 7}=-\frac{3}{2\cdot 7}=-\frac{3}{14}$
d $\frac{11}{15}:\frac{22}{5}=\frac{11}{15}\cdot\frac{5}{22}=\frac{11\cdot 5}{3\cdot 5\cdot 2\cdot 11}=\frac{1}{3\cdot 2}=\frac{1}{6}$
e $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$
f $\sqrt{1600}=40$

5 Er geldt $2^2=4<7<9=3^2$, dus $2<\sqrt{7}<3$.
Er geldt $2{,}6^2=6{,}76<7<7{,}29=2{,}7^2$, dus $2{,}6<\sqrt{7}<2{,}7$.
Er geldt $2{,}64^2=6{,}9696<7<7{,}0225=2{,}65^2$, dus $2{,}64<\sqrt{7}<2{,}65$.
Er geldt $2{,}645^2\approx 6{,}9960<7<7{,}0013\approx 2{,}646^2$, dus $2{,}645<\sqrt{7}<2{,}646$.
Zowel 2,645 als 2,646 worden afgerond naar 2,65, dus op twee decimalen nauwkeurig geldt $\sqrt{7}=2{,}65$.

6 **a** $[2, 10]$
b $\langle -3, -1\rangle$
c $[2, \rightarrow\rangle$
d $\langle \leftarrow, 2\rangle$

7 **a** $3(x-4)+2x=3x-12+2x=5x-12$
b $(x-5)(x+1)+x(x-3)=x^2+1\cdot x-5\cdot x-5+x^2-3\cdot x$
$=2x^2-7x-5$
c $(x-y)(x+y)=x^2+xy-xy-y^2=x^2-y^2$
d $(x-y)^3=(x-y)(x-y)(x-y)$
$=(x^2-2xy+y^2)(x-y)$
$=x^3-x^2y-2x^2y+2xy^2+xy^2-y^3$
$=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

cc BY NC ND

8 **a** $2x+4=\frac{1}{2}x-3$
$\frac{3}{2}x=-7$
$3x=-14$
$x=\frac{-14}{3}$

b $2x^2=18$
$x^2=9$
$x=3$ of $x=-3$

c $x^2-7x+10=0$
$(x-2)(x-5)=0$
$x=2$ of $x=5$

d $2x^2+6x+2=0$
$x^2+3x+1=0$
abc-formule: $x=\frac{-3+\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot1}}{2}=-3+\frac{1}{2}\sqrt{5}$
of $x=\frac{-3-\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot1}}{2}=-3-\frac{1}{2}\sqrt{5}$

e $\frac{-1}{x+2}-x=0$
$\frac{-1}{x+2}=x$
$-1=x(x+2)$
$-1=x^2+2x$
$x^2+2x+1=0$
$(x+1)^2=0$
$x+1=0$
$x=-1$

f $x-\sqrt{2x-1}=0$
$x=\sqrt{2x-1}$
$x^2=2x-1$
$x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$
$(x-1)=0$
$x=1$

Terugkoppeling bij leereenheid 2

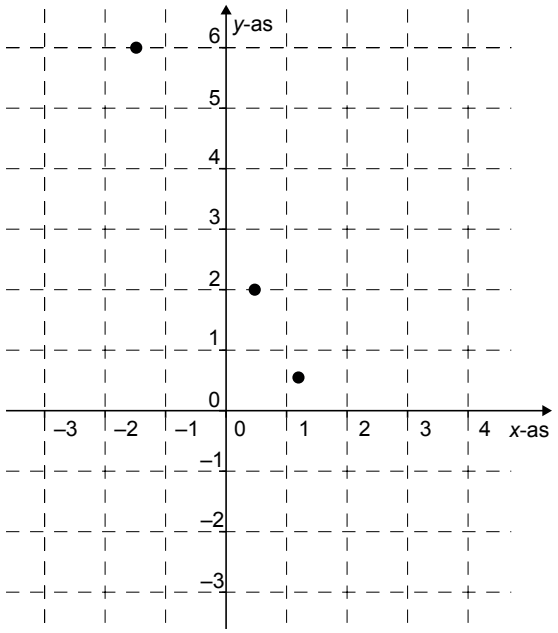
1 Uitwerking van de opgaven

2.1 **a** Vul achtereenvolgens $t = 2$ en $t = 2\frac{1}{2}$ in, in de formule $H(t) = 45 - 5\ t^2$. Er volgt dan:
$H(2) = 45 - 5 \cdot 2^2 = 25$
$H(2\frac{1}{2}) = 45 - 5 \cdot (2\frac{1}{2})^2 = 13\frac{3}{4}$
b Als $t = 4$ wordt ingevuld, volgt $H(4) = -35$. Dit is een negatieve waarde: de steen zou onder de grond door moeten vallen. Dat kan niet, dus zal de steen op de grond liggen en de hoogte zal 0 zijn. Dus: $H(4) = 0$.

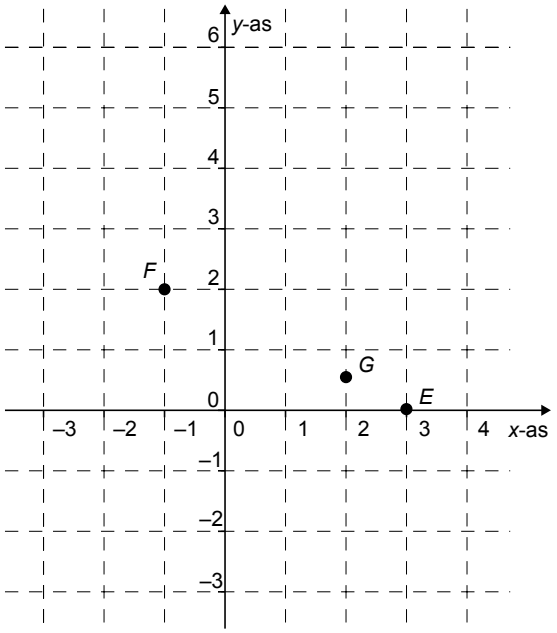
2.2 **a** Vul achtereenvolgens $t = \frac{1}{2}$ en $t = 2$ in, in de formule $H(t) = 45 + 12\frac{1}{2}\ t - 5\ t^2$. Er volgt dan:
$H(\frac{1}{2}) = 45 + 12\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot (\frac{1}{2})^2 = 45 + 6\frac{1}{4} - 1\frac{1}{4} = 50$
$H(2) = 45 + 12\frac{1}{2} \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 45 + 25 - 20 = 50$
b $H(1\frac{1}{2}) = 45 + 12\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} - 5 \cdot (1\frac{1}{2})^2 = 45 + 18\frac{3}{4} - 11\frac{1}{4} = 52\frac{1}{2}$
$H(2\frac{1}{2}) = 45 + 12\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} - 5 \cdot (2\frac{1}{2})^2 = 45 + 31\frac{1}{4} - 31\frac{1}{4} = 45$
c Op $t = \frac{1}{2}$ en $t = 2$ is de steen op dezelfde hoogte.
d Op $t = 1\frac{1}{2}$ is de steen op dezelfde hoogte als op $t = 1$, zoals berekend in voorbeeld 2.2. En op $t = 2\frac{1}{2}$ is de steen op dezelfde hoogte als op $t = 0$.

2.3 **a** $f(\frac{1}{2}) = 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$
$f(-1\frac{1}{2}) = 3 - 2 \cdot (-1\frac{1}{2}) = 3 + 3 = 6$
$f(1\frac{1}{4}) = 3 - 2 \cdot 1\frac{1}{4} = 3 - 2\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b



2.4 **a**



b *A*, *B*, *C*, *D* liggen op een rechte lijn. *E*, *F* en *G* liggen op een andere rechte lijn.

2.5 **a** $f(\frac{1}{4}) = 3 - 2 \cdot \frac{1}{4} = 3 - \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$. Het punt $(\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2})$ ligt ook op de lijn.
b Indien u de berekeningen goed uitvoert en de punten goed intekent, dan liggen alle punten op de lijn.

2.6 **b** $f(2\frac{1}{2}) = 3 - 2 \cdot 2\frac{1}{2} = 3 - 5 = -2$.
c Bijvoorbeeld kunnen we zien dat (3, –3) op de lijn ligt.
Controle: $f(3) = 3 - 2 \cdot 3 = 3 - 6 = -3$. Dit klopt.
Ook $(-\frac{1}{2}, 4)$ ligt op de lijn. Controle: $f(-\frac{1}{2}) = 3 - 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = 3 + 1 = 4$.

2.7 **a** De x-coördinaat van S is $1\frac{1}{2}$.
b $f(1\frac{1}{2}) = 3 - 2 \cdot 1\frac{1}{2} = 3 - 3 = 0$. Het punt $(1\frac{1}{2}, 0)$ is dus inderdaad het snijpunt van de lijn met de x-as.

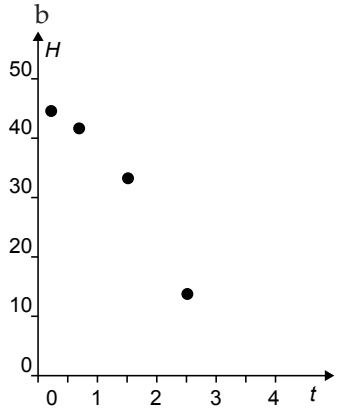
2.8 a $H(\frac{1}{4}) = 45 - 5 \cdot (\frac{1}{4})^2 = 45 - \frac{5}{16} = 44\frac{11}{16}$

$H(\frac{3}{4}) = 45 - 5 \cdot (\frac{3}{4})^2 = 45 - \frac{45}{16} = 42\frac{3}{16}$

$H(1\frac{1}{2}) = 45 - 5 \cdot (1\frac{1}{2})^2 = 45 - 11\frac{1}{4} = 33\frac{3}{4}$

$H(2\frac{1}{2}) = 45 - 5 \cdot (2\frac{1}{2})^2 = 45 - 31\frac{1}{4} = 13\frac{3}{4}$

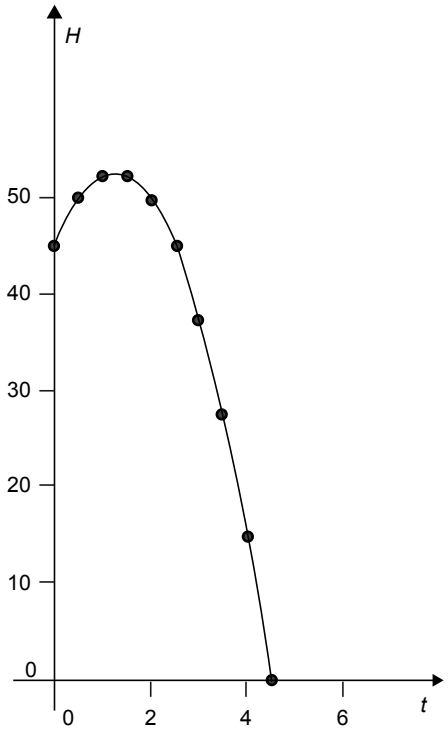
b



2.9 **a**

t	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$
$H(t)$	45	50	$52\frac{1}{2}$	$52\frac{1}{2}$	50	45	$37\frac{1}{2}$	$27\frac{1}{2}$	15	0	$52\frac{13}{16}$

b, **c**



d Op $t = 4\frac{1}{2}$ is de hoogte 0, en ligt de steen op de grond. Op $t = 5$ zal de hoogte ook 0 zijn.

2.10 Hier geldt ook dat de hoogte alleen met de formule kan worden berekend met positieve t, en totdat de steen de grond raakt, dus tot $t = 4\frac{1}{2}$. De mogelijke invoerwaarden zijn dus $0 \le t \le 4\frac{1}{2}$.

2.11 **a** Er geldt $x - 3 \ge 0$ als $x \ge 3$.
b Domein van f is het interval $[3, \rightarrow\rangle$.
c Op het domein van g moet gelden $3 - x \ge 0$. Dit is het geval als $x \le 3$. Het domein van g is dus $\langle \leftarrow, 3]$.

2.12 **a** De functie bestaat als $3 - x \neq 0$, ofwel als $x \neq 3$.
b Het domein van de functie h is $\langle \leftarrow, 3\rangle \cup \langle 3, \rightarrow\rangle$.

2.13 Er moet zowel gelden dat $x \ge 0$, want anders is de wortel niet gedefinieerd, als $-9 < x < 9$. Voor $0 \le x < 9$ wordt aan beide eisen voldaan, dus het domein is $[0, 9\rangle$.

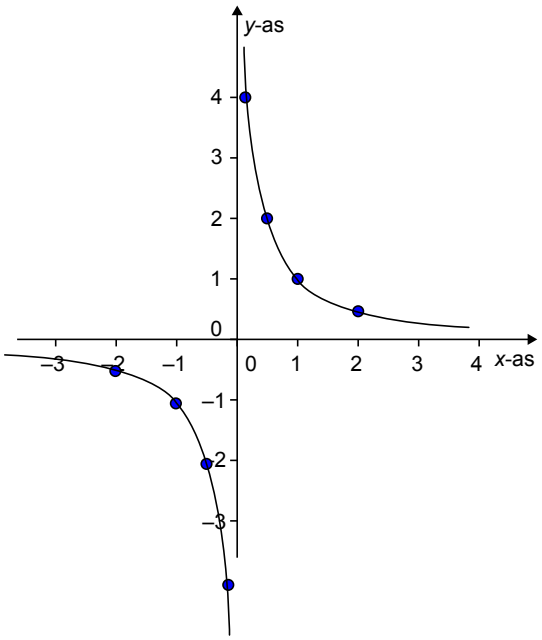
2.14 **a** De steen wordt omhoog geschoten; de hoogte is dus enige tijd meer dan 45.
b De steen bereikt het hoogste punt als $t = 1\frac{1}{4}$. De hoogte is dan $52\frac{13}{16}$. Het bereik is dus $\left[0, 52\frac{13}{16}\right]$.

cc BY NC ND

2.15 **a**

x	1	2	4	6	9	10	12	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
$g(x)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12}$	2	4	5	10

b



c Als het domein $[1,9]$ is dan liggen de functiewaarden tussen 1 en $\frac{1}{9}$, dus dan is het bereik $[\frac{1}{9},1]$.
d Alle reële waarden worden aangenomen, behalve $y = 0$. Het bereik is dus $\langle\leftarrow,0\rangle \cup \langle 0,\rightarrow\rangle$.
e Als $0 < x < 9$ dan neemt $g(x)$ alle waarden aan groter dan $\frac{1}{9}$. En als $-9 < x < 0$, dan neemt $g(x)$ alle waarden aan kleiner dan $-\frac{1}{9}$.
Het bereik is dan dus: $\langle\leftarrow,-\frac{1}{9}\rangle \cup \langle\frac{1}{9},\rightarrow\rangle$.

2.16 **a** Bij iedere waarde voor het volume V hoort steeds precies één waarde voor de druk P.
b Als P stijgt wordt het volume kleiner en als P daalt wordt het volume groter. Dat geldt voor het hele bereik van P.
c Als het volume verdubbelt van 0,25 naar 0,50 m^3 halveert de druk van 4,00 naar 2,00 bar.
En als het volume halveert, bijvoorbeeld van 2,00 m^3 naar 1,00 m^3, verdubbelt de druk van 0,50 naar 1,00 bar.
d Als de getallen in de tabel als breuken worden geschreven, dan horen bijvoorbeeld bij elkaar $V = \frac{1}{4}$ en $P = 4$, of $V = \frac{1}{2}$ en $P = 2$. Nu is het makkelijk te zien dat steeds geldt: $P = 1/V$.

2.17 **a** Invullen van bij elkaar horende waarden in $P = 1/V$ leidt steeds tot een gelijkheid; dus de formule klopt. Bijvoorbeeld: als $P = 1{,}25$ en $V = 0{,}80$, dan volgt $1/V = \frac{1}{0{,}80} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1{,}25$; en dat is gelijk aan P.

b

volume (m^3)	*volume* (deciliter)	*luchtdruk* (bar)	*luchtdruk* (hectopascal)
0,25	2500	4,00	4000
0,50	5000	2,00	2000
0,75	7500	1,33	1333
1,00	10 000	1,00	1000
1,25	12 500	0,80	800
1,50	15 000	0,67	667
1,75	17 500	0,57	571
2,00	20 000	0,50	500
2,25	22 500	0,44	444
2,50	25 000	0,40	400

c Als de druk twee keer zo hoog wordt zodra het volume halveert, betekent dat dat $P \cdot V$ constant is. In onderdeel a was dat ook al het geval, immers $P \cdot V$ is daar steeds gelijk aan 1.
Als we werken met de eenheden deciliter en hectopascal, dan is $P \cdot V = 10\,000\,000$. Hieruit leiden we af:

$$P = \frac{10\,000\,000}{V}$$

2.18 De getallen passen het best als we ze met 10 vermenigvuldigen. In plaats van 1 m^3 hebben we dan 10 hectoliter en in plaats van 1 bar hebben we dan 10 decibar. De tabel wordt dan:

volume (m^3)	*volume* (hectoliter)	*luchtdruk* (bar)	*luchtdruk* (decibar)
0,25	2,5	4,00	40,0
0,50	5,0	2,00	20,0
0,75	7,5	1,33	13,3
1,00	10,0	1,00	10,0
1,25	12,5	0,80	8,0
1,50	15,0	0,67	6,7
1,75	17,5	0,57	5,7
2,00	20,0	0,50	5,0
2,25	22,5	0,44	4,4
2,50	25,0	0,40	4,0

2.19 **a** Als $P = 100/V$, dan is $P \cdot V = 100$. Door steeds de waarden van P in decibar en V in hectoliter in de tabel in de uitwerking van opgave 2.18 met elkaar te vermenigvuldigen, valt de gelijkheid makkelijk te verifiëren.
Voor de eerste regel geldt bijvoorbeeld $P = 40$ en $V = 2{,}5$, zodat $P \cdot V = 40 \cdot 2{,}5 = 100$.
b Met P in bar en V in liter volgt in de eerste regel $P = 4$ en $V = 250$, dus $P \cdot V = 4 \cdot 250 = 1000$. De waarde van a is dus 1000.

2.20 **a** Voor V groter dan 4 is de benadering goed, dus op het domein $\langle 4, \rightarrow \rangle$.
b Als $V = 4$, dan is $P = 1000/4 = 250$. Het bereik is dus $\langle 0, 250 \rangle$.

cc BY NC ND

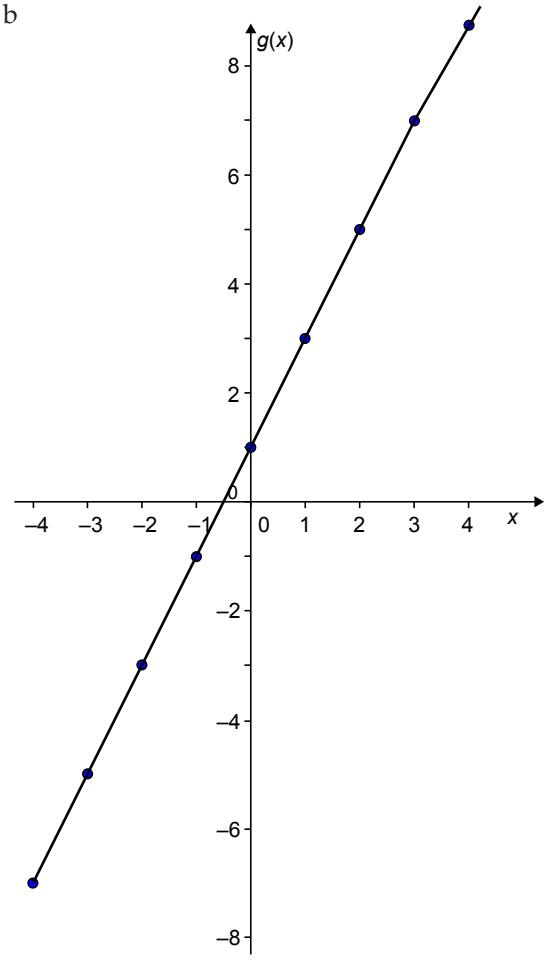
2 Antwoorden op de zelftoets

1 **a** We kunnen de functiewaarden berekenen voor iedere waarde van x. Het domein is dan de hele verzameling $\mathbb{R}$.
b De grootste uitvoerwaarde wordt verkregen als x^2 zo klein mogelijk is. Dat is het geval voor $x = 0$, dus de grootste uitvoerwaarde is 4.
c Er is geen kleinste uitvoerwaarde, want x kan steeds groter worden gekozen, zodat $4 - x^2$ steeds kleiner wordt.
d Het bereik is $\langle \leftarrow, 4]$.

2 a

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	$\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$
$f(x)$	–7	–5	–3	–1	1	3	5	7	9	$1\frac{1}{2}$	6

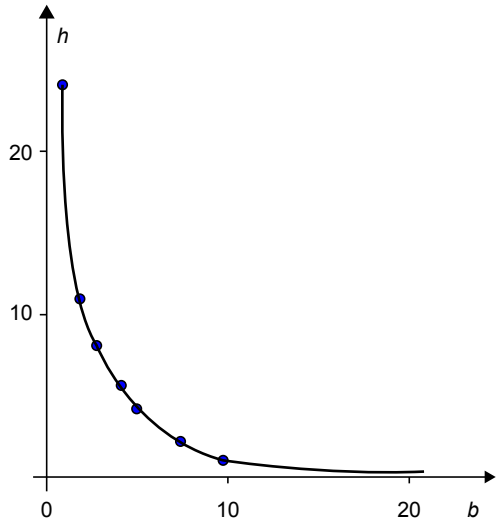
b



c Voor iedere waarde x kan $g(x)$ worden berekend. Ieder punt $(x, g(x))$ ligt op de lijn.

3 a $f(-3) = 4 - (-3)^2 = 4 - 9 = -5$
$f(1) = 4 - (1)^2 = 4 - 1 = 3$
Uit de tabel volgt $g(-3) = -5$ en $g(1) = 3$, dus $f(-3) = g(-3)$ en f(1) = g(1).
b Uit de grafiek leiden we af dat het bereik van g bij het domein $[-3,1]$ gelijk is aan $[-5,3]$.
c De grootste waarde van f is gelijk aan 4 en wordt bereikt als $x = 0$, en $x = 0$ ligt in het domein. De kleinste waarde wordt bereikt als $x = -3$, dan is $f(-3) = -5$. Het bereik is dus $[-5,4]$.

4 a De breedte is altijd positief, dus $b > 0$. Het domein is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
b De hoogtes zijn achtereenvolgens: 24, 12, 8, 6, 4, 3, 2, $1\frac{1}{3}$, 1.
c



d Hoe dichter b bij 0 komt, hoe groter de waarde van h.
e Hoe groter b wordt, hoe kleiner h, totdat h vlak bij 0 komt.
f Alle waarden groter dan 0 worden door h aangenomen, dus het bereik is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
g De breedte is nu beperkt tot 21 cm, dus $b < 21$. De hoogte is dan $h = 24/21 = 1{,}14$. De hoogte mag niet groter zijn dan 29,7. Dat betekent dat de breedte niet kleiner mag zijn dan $24/29{,}7 = 0{,}81$.
We hebben nu gevonden dat het domein gelijk is aan $\langle 0{,}81; 21 \rangle$ en het bereik is $\langle 1{,}14; 29{,}7 \rangle$.
h In een vierkant zijn breedte en hoogte gelijk. Er moet dus gelden $b^2 = 24$. Ofwel $b \approx 4{,}90$.

cc BY NC ND

Terugkoppeling bij leereenheid 3

1 Uitwerking van de opgaven

3.1 **a** $g(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$. Het bijbehorende punt is (0, 1) en ligt op de grafiek van g.
$g(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Het bijbehorende punt is (2, 5) en ligt op de grafiek van g.
$g(3\frac{1}{4}) = 2 \cdot 3\frac{1}{4} + 1 = 7\frac{1}{2}$. Het bijbehorende punt is $(3\frac{1}{4}, 7\frac{1}{2})$ en zal ook op de grafiek van g liggen als deze verder wordt getekend.
b $h(0) = 4 - 0 = 4$. (0, 4) ligt op de grafiek van h.
$h(2) = 4 - 2 = 2$. (2, 2) ligt op de grafiek van h.
$h(3\frac{1}{4}) = 4 - 3\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \cdot (3\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ ligt op de grafiek van h.
c Alle uitvoerwaarden zijn gelijk aan 4, ongeacht de invoerwaarde.

3.2 **a** $g(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, dus (1, 3) ligt op de grafiek van g.
$h(1) = 4 - 1 = 3$, dus (1, 3) ligt ook op de grafiek van h.
b In figuur 3.2 lezen we af dat het punt $(1\frac{1}{2}, 4)$ snijpunt is van de grafieken van g en k.
c We berekenen: $g(1\frac{1}{2}) = 2 \cdot 1\frac{1}{2} + 1 = 4$, en $k(1\frac{1}{2}) = 4$, dus $(1\frac{1}{2}, 4)$ ligt inderdaad op beide grafieken en is het snijpunt.

3.3 In voorbeeld 3.1 is g stijgend en f en h zijn dalend.

3.4 In voorbeeld 3.1 zijn f en g het steilst, zij hebben de grootste richtingscoëfficiënten, respectievelijk –2 en 2. In voorbeeld 3.1 zijn geen evenwijdige grafieken.

3.5 **a** In de grafiek van g in figuur 3.2 lezen we af dat de volgende punten op de grafiek liggen: (–2, –3), (1, 3), (2, 5). Als we deze punten in de vergelijking invullen, dan zijn linker- en rechterlid gelijk:
$y = -3$ en $x = -2$: $-3 = 2 \cdot -2 + 1 = -4 + 1 = -3$
$y = 3$ en $x = 1$: $3 = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$
$y = 5$ en $x = 2$: $5 = 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5$.
b Voor h vinden we de punten (–1, 5), (2, 2), (4, 0). Invullen geeft weer een gelijkheid:
$y = 5$ en $x = -1$: $5 = 4 - (-1) = 4 + 1 = 5$
$y = 2$ en $x = 2$: $2 = 4 - 2 = 2$
$y = 0$ en $x = 4$: $0 = 4 - 4 = 0$.
c De y-coördinaat is steeds 4.

3.6 **a** $f(0) = -2 \cdot 0 + 10 = 10$; $A(0, 10)$ ligt op de grafiek.
$f(1) = -2 \cdot 1 + 10 = -2 + 10 = 8$; $B(1, 8)$ ligt op de grafiek.
$f(2) = -2 \cdot 2 + 10 = -4 + 10 = 6$; $C(2, 6)$ ligt op de grafiek.
$f(4) = -2 \cdot 4 + 10 = -8 + 10 = 2$; $D(4, 2)$ ligt op de grafiek.
b De punten (3, 4) en (5, 0) lijken op de grafiek te liggen, controle bevestigt dit:
$f(3) = -2 \cdot 3 + 10 = 4$ en $f(5) = -2 \cdot 5 + 10 = 0$.

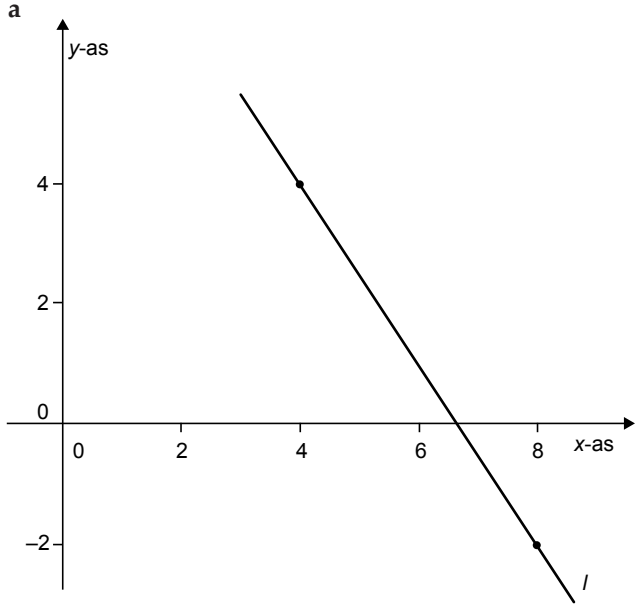
3.7 **a** Op $t = 3$ is de concentratie $f(3) = 4$; en op $t = 5$ is dat $f(5) = 0$.
b Als we het functievoorschrift toepassen vinden we $f(6) = -2 \cdot 6 + 10 = -2$. Maar een concentratie kan niet negatief zijn, dus voor $t > 5$ zal de concentratie steeds 0 zijn.
c Tussen $t = 0$ en $t = 5$ is de grafiek dalend: de concentratie neemt af.
d We beperken het domein tot de tijdstippen waarop de reactie verloopt: $0 \leq t \leq 5$; het domein is dus [0, 5]. De concentratie vermindert van 10 tot 0, dus het bereik is [0, 10].

BY NC ND

3.8 Invullen van $x = 4$ en $y = 5$ in de vergelijking leidt tot een gelijkheid: $5 = 1\frac{1}{2} \cdot 4 - 1 = 6 - 1 = 5$.

3.9 **a** De richtingscoëfficiënt is $a = \frac{4-3}{2-0} = \frac{1}{2}$. De vergelijking wordt dus: $y = \frac{1}{2}x + b$. Invullen van $x = 0$ en $y = 3$ geeft: $3 = \frac{1}{2} \cdot 0 + b$. Dus $b = 3$. De vergelijking is: $y = \frac{1}{2}x + 3$.
b De richtingscoëfficiënt is $a = \frac{0-3}{6-0} = -\frac{1}{2}$. De vergelijking wordt dus: $y = -\frac{1}{2}x + b$. Invullen van $x = 0$ en $y = 3$ geeft: $3 = -\frac{1}{2} \cdot 0 + b$. Dus $b = 3$. De vergelijking is: $y = -\frac{1}{2}x + 3$.
c De richtingscoëfficiënt is $a = \frac{6-(-2)}{2-(-2)} = \frac{8}{4} = 2$. De vergelijking wordt dus: $y = 2x + b$. Invullen van $x = -2$ en $y = -2$ geeft: $-2 = 2 \cdot -2 + b$. Dus $b = 2$. De vergelijking is: $y = 2x + 2$.

3.10 **a**



FIGUUR De lijn l door de punten (4, 4) en (8, –2)

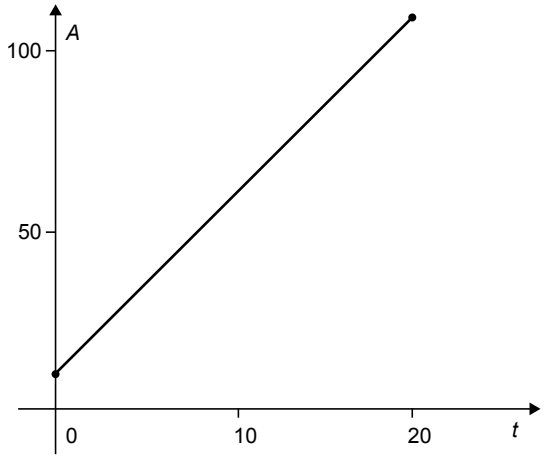
b De richtingscoëfficiënt is $a = \frac{-2-4}{8-4} = \frac{-6}{4} = -1\frac{1}{2}$. De vergelijking wordt dus: $y = -1\frac{1}{2}x + b$. Invullen van $x = 4$ en $y = 4$ geeft: $4 = -1\frac{1}{2} \cdot 4 + b$. Dus $b = 10$. De vergelijking wordt: $y = -1\frac{1}{2}x + 10$.

3.11 Uit het gegeven leiden we af dat de punten (12, 20) en (16, 30) op de grafiek liggen. We bepalen de richtingscoëfficiënt:

$$a = \frac{30-20}{16-12} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$$

De vergelijking wordt dus: $y = 2\frac{1}{2}x + b$. Invullen van $x = 12$ en $y = 20$ geeft: $20 = 2\frac{1}{2} \cdot 12 + b = 30 + b$. Dus $b = -10$. De vergelijking wordt $y = 2\frac{1}{2}x - 10$.

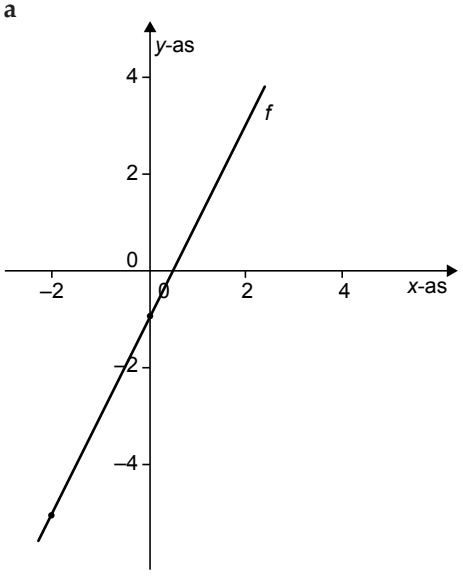
3.12 **a** Vul in $t = 20$, in $A = 5t + 10$. Dan volgt $A = 5 \cdot 20 + 10 = 110$.
b



c We bekijken de trein tussen $t = 0$ en $t = 20$. Het domein is dus [0, 20]. Op $t = 0$ geldt $A = 10$, en als $t = 20$ dan is $A = 110$. Het domein is dus [10, 110].

3.13 **a** De auto rijdt bij het oprijden van de snelweg niet direct 120 km/h.
b De richtingscoëfficiënt is 2. Het functievoorschrift is dus $A(t) = 2 \cdot t + b$. Als $t = 2$, dan is $A(2) = 12$. Dan volgt: $12 = 2 \cdot 2 + b$, dus $b = 8$. Het functievoorschrift is $A(t) = 2 \cdot t + 8$.

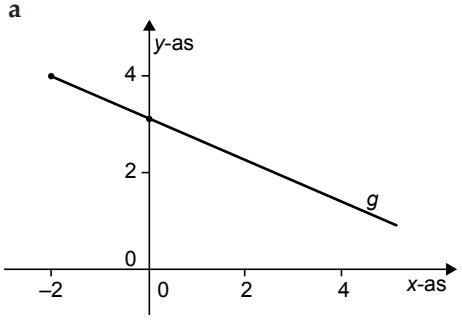
3.14 **a**



b De richtingscoëfficiënt is 2, dus het functievoorschrift is $f(x) = 2x + b$. Er geldt $f(-2) = -5$, dus $-5 = 2 \cdot -2 + b = -4 + b$. Dus $b = -1$ en het functievoorschrift is $f(x) = 2x - 1$.

cc BY NC ND

3.15 **a**



b De richtingscoëfficiënt is $-\frac{1}{2}$, dus het functievoorschrift is $g(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + b$. Er geldt $g(-2) = 4$, dus $4 = -\frac{1}{2} \cdot -2 + b = 1 + b$. Dus $b = 3$ en het functievoorschrift is $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.

3.16 **a** Op 15 km diepte is de druk 3,75 kbar en de temperatuur is 150 °C.
b Beide functies zijn stijgend, dus de druk en temperatuur nemen toe, naarmate de diepte groter wordt.
c De richtingscoëfficiënt voor de druk is:

$$a = \frac{\Delta P}{\Delta d} = \frac{5-0}{20-0} = \frac{1}{4}$$

De richtingscoëfficiënt voor de temperatuur is:

$$a = \frac{\Delta T}{\Delta d} = \frac{200-0}{20-0} = 10$$

De interpretatie is dat de druk met 1/4 kbar toeneemt per kilometer, en de temperatuur 10 °C per kilometer.
d Het domein is [0, 30]. Het bereik van de druk is [0, 7,5] en het bereik van de temperatuur is [0, 300].
e Voor de druk geldt: $P = \frac{1}{4}d + b$. Omdat (0, 0) op de grafiek ligt volgt $P = \frac{1}{4}d$. Soortgelijk volgt voor de temperatuur: $T = 10 \cdot d$.

3.17 **a** De evenredigheidsconstante is $A/R = 200$.
b $Q = 200 \cdot \Delta T$
c De eenheid van Q is W.

3.18 **a** Oplossen van $f(x) = g(x)$ gaat als volgt.
$f(x) = g(x)$
$\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2} = -\frac{1}{3}x + 6$
$3x + 15 = -2x + 36$
$5x = 21$
$x = 4\frac{1}{5}$
Invullen in f en g bevestigt dat het snijpunt is gevonden.
$f(4\frac{1}{5}) = \frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{5} + 2\frac{1}{2} = 2\frac{1}{10} + 2\frac{1}{2} = 4\frac{3}{5}$
$g(4\frac{1}{5}) = -\frac{1}{3} \cdot 4\frac{1}{5} + 6 = -\frac{7}{5} + 6 = 4\frac{3}{5}$
b Oplossen van $g(x) = h(x)$ gaat als volgt.
$g(x) = h(x)$
$-\frac{1}{3}x + 6 = 4x - 8$
$-x + 18 = 12x - 24$
$-13x = -42$
$x = \frac{-42}{-13} = 3\frac{3}{13}$
Invullen in g en h bevestigt dat het snijpunt is gevonden.
$g(3\frac{3}{13}) = -\frac{1}{3} \cdot 3\frac{3}{13} + 6 = -1\frac{1}{13} + 6 = 4\frac{12}{13}$
$h(3\frac{3}{13}) = 4 \cdot 3\frac{3}{13} - 8 = 12\frac{12}{13} - 8 = 4\frac{12}{13}$

3.19 We moeten oplossen $g(x) = 0$, ofwel $-\frac{1}{3}x + 6 = 0$. Dit gaat als volgt.
$-\frac{1}{3}x + 6 = 0$
$-x + 18 = 0$
$-x = -18$
$x = 18$
Controle: $g(18) = -\frac{1}{3} \cdot 18 + 6 = -6 + 6 = 0$. Klopt.

3.20 **a** $h(x) = 0$
$4x - 8 = 0$
$4x = 8$
$x = 2$
b De y-coördinaat van een punt op de lijn $y = 5$ is 5. We moeten dus oplossen $h(x) = 5$, ofwel $4x - 8 = 5$.
$4x - 8 = 5$
$4x = 13$
$x = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$
c Als $x = 2$, dan volgt $h(2) = 4 \cdot 2 - 8 = 0$. Klopt.
Als $x = 3\frac{1}{4}$, dan volgt $h(3\frac{1}{4}) = 4 \cdot 3\frac{1}{4} - 8 = 13 - 8 = 5$. Klopt.
d In de grafiek kunnen we zien dat de x-coördinaten van de snijpunten met de x-as en de lijn $y = 5$ inderdaad 2 en $3\frac{1}{4}$ zijn.

3.21 **a** We berekenen $P \cdot V$ voor alle drie de situaties:
$1 \cdot 0{,}910 = 0{,}910$
$2 \cdot 0{,}455 = 0{,}910$
$3 \cdot 0{,}303 = 0{,}909$
b Als $T = 0$, dan is $PV = 0{,}91$.
Als $T = 27$, dan is $PV = 1$.
Nu volgt:

$$a = \frac{\Delta PV}{\Delta T} = \frac{1 - 0{,}91}{27 - 0} = \frac{0{,}09}{27} = \frac{0{,}01}{3} = \frac{1}{300}$$

Voor $T = 27$, geldt $1 = \frac{1}{300} \cdot 27 + b$, dus $b = \frac{273}{300}$.
Het functievoorschrift is dus $PV = \frac{1}{300} \cdot T + \frac{273}{300}$
c Als we in onderdeel b voor V invullen $V = 1$, dan volgt:

$$P = \frac{1}{300} \cdot T + \frac{273}{300}$$

d Als $V = 2$, dan volgt, dan volgt , $P \cdot 2 = \frac{1}{300} \cdot T + \frac{273}{300}$ ofwel:

$$P = \frac{1}{600} \cdot T + \frac{273}{600}$$

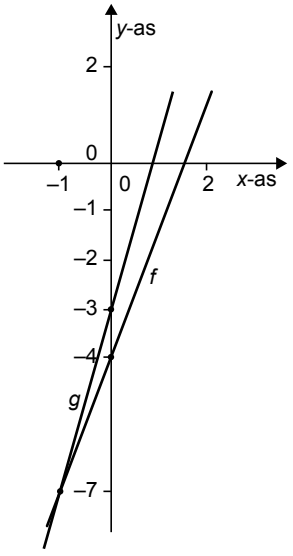
e Als de druk voor beide situaties gelijk moet zijn, dan moet gelden:
$\frac{1}{300} \cdot T + \frac{273}{300} = \frac{1}{600} \cdot T + \frac{273}{600}$
$2T + 546 = T + 273$
$T = -273$
De druk is dan: $P = \frac{1}{300} \cdot -273 + \frac{273}{300} = 0$
f Als $V = 0{,}5$ m^3, dan volgt:
$P \cdot 0{,}5 = \frac{1}{300} T + \frac{273}{300}$
$P = \frac{1}{150} T + \frac{273}{150}$
Ook hier geldt dat als $T = -273$, dat dan $P = 0$.
g Bij een temperatuur van –273 °C is de druk gelijk aan 0.

cc BY NC ND

3.22 **a** Het domein is steeds [5, 20].
b We zien steeds dat $a = \Delta y/\Delta x = 1/5$.
c Het bereik in casus 1 is [3, 6]
d Als de functie de x-as snijdt is er geen verlies (en ook geen 'winst'), er is dan geen warmtetransport van binnen naar buiten, of van buiten naar binnen.
e In casus 4 is de buitentemperatuur 20 °C en in casus 3 is de buitentemperatuur 10 °C.
f In onderdeel b hebben we gezien dat de richtingscoëfficiënt 1/5 is, dus $y = \frac{1}{5} \cdot x + b$. Als $x = 10$, dan is $y = 0$, dus
$0 = \frac{1}{5} \cdot 10 + b = 2 + b$, ofwel $b = -2$. Het functievoorschrift is
$y = \frac{1}{5} \cdot x - 2$.
g Als het verschil tussen binnen- en buitentemperatuur met 1 °C toeneemt, dan neemt het energieverlies toe met 1/5 kW, ofwel 200 W. Daar kunnen 200/6 ≈ 33 spaarlampen van 6 W op branden.

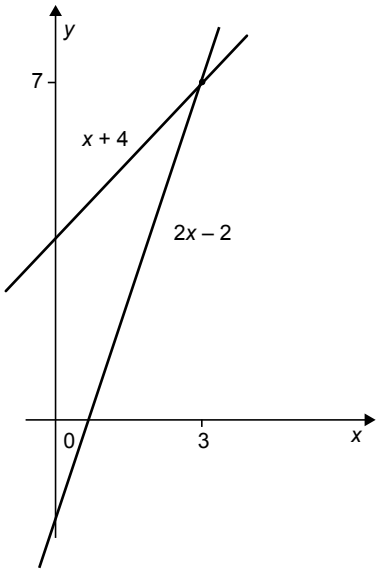
3.23 Voor $T < 10$, is $Q < 0$. Een negatief energieverlies betekent dat er energie van buiten naar binnen gaat, ofwel, het is dan binnen kouder dan buiten. De buitentemperatuur zal 10 °C zijn.

3.24 **a** $3x - 4 = 4x - 3$
$3x - 4x = -3 - (-4)$
$-x = 1$
$x = -1$
Controle: $3 \cdot -1 - 4 = -7$ en $4 \cdot -1 - 3 = -7$. Klopt.
b

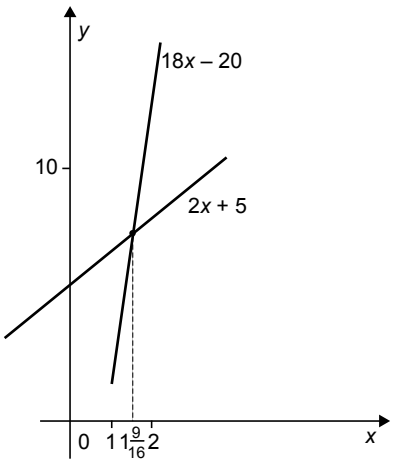


c Voor $x \leq -1$ geldt $f(x) \geq g(x)$.

3.25 **a** $3x - 2 = x + 4$
$3x - x = 4 - (-2)$
$2x = 6$
$x = 3$
Controle: $3 \cdot 3 - 2 = 7$ en $3 + 4 = 7$. Klopt.



Uit de grafiek lezen we af $3x - 2 < x + 4$ als $x < 3$.
b $2x + 5 = 18x - 20$
$2x - 18x = -20 - 5$
$-16x = -25$
$x = \frac{25}{16} = 1\frac{9}{16}$
Controle:
$2 \cdot 1\frac{9}{16} + 5 = 3\frac{1}{8} + 5 = 8\frac{1}{8}$ en $18 \cdot 1\frac{9}{16} - 20 = 28\frac{1}{8} - 20 = 8\frac{1}{8}$. Klopt.



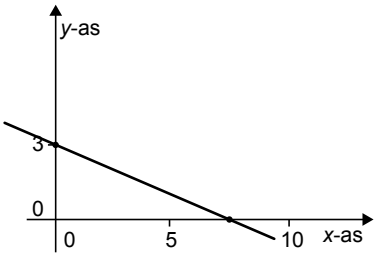
Uit de grafiek lezen we af $2x + 5 \geq 18x - 20$ als $x \leq 1\frac{9}{16}$.

cc BY NC ND

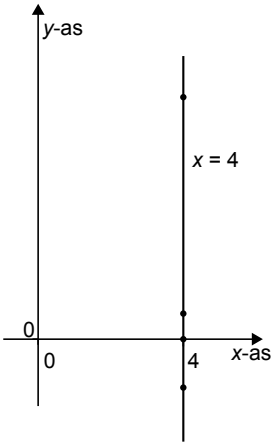
3.26 De ongelijkheid uit voorbeeld 3.10 is $\frac{1}{2}x + 2 > 2x - 1$. Die lossen we als volgt op:
$\frac{1}{2}x + 2 > 2x - 1$
$\frac{1}{2}x - 2x > -1 - 2$
$-\frac{3}{2}x > -3$
$-3x > -6$
$-x > -2$
$x < 2$ (Let op, we delen door –1 en dan klapt het teken om!)
De eerste ongelijkheid uit opgave 3.28 is $3x - 2 < x + 4$.
$3x - 2 < x + 4$
$3x - x < 4 - (-2)$
$2x < 6$
$x < 3$
De tweede ongelijkheid uit opgave 3.28 is $2x + 5 \geq 18x - 20$.
$2x + 5 \geq 18x - 20$
$2x - 18x \geq -20 - 5$
$-16x \geq -25$
$16x \leq 25$ (teken klapt om!)
$x \leq \frac{25}{16} = 1\frac{9}{16}$

3.27 **a** We berekenen $f(x)$ voor $x = -6$, -3 en 6. We krijgen: $f(-6) = 6$, $f(-3) = 4$ en $f(6) = -2$. Dat geeft als oplossingen van de vergelijking (–6, 6), (–3, 4) en (6, –2).
b Eenvoudig is te zien dat de oplossingen op de lijn liggen.
c Voor (6, –2) geldt: $f(6) = 2 - \frac{2}{3} \cdot 6 = 2 - 4 = -2$.
d Invullen van (6, –2), dus $x = 6$ en $y = -2$ geeft:
$2 \cdot 6 + 3 \cdot -2 = 12 - 6 = 6$.

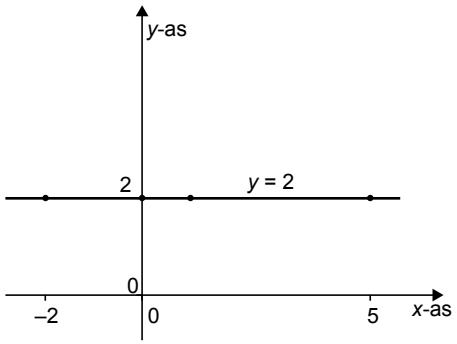
3.28 **a** $2 \cdot 0 + 5y = 15$ ofwel $5y = 15$ en $y = 3$.
b $2 \cdot x + 5 \cdot 0 = 15$ ofwel $2x = 15$ en $x = 7\frac{1}{2}$.
c $2x + 5y = 15$
$5y = -2x + 15$
$y = -\frac{2}{5}x + 3$
d Bij $x = 5$ vinden we $y = 1$, bij $x = 10$ vinden we $y = -1$.
e



3.29 **a** (4, 0), (4, 1), (4, 10), (4, –2) voldoen alle aan de vergelijking $x = 4$.



b (0, 2), (1, 2), (5, 2), (–2, 2) voldoen alle aan de vergelijking $y = 2$.



3.30 Dan zou de noemer van de breuken gelijk aan 0 zijn, en delen door 0 is niet toegestaan.

3.31 We kunnen $x = 5$ en $y = 1$ invullen in de vergelijkingen $2x + 5y = 15$ en $7x – 10y = 25$:
$2 \cdot 5 + 5 \cdot 1 = 10 + 5 = 15$; klopt!
$7 \cdot 5 – 10 \cdot 1 = 35 – 10 = 25$; klopt!

3.32 De bovenste vergelijking wordt: $14x + 35y = 105$.
De onderste vergelijking wordt: $14x – 20y = 50$.
Aftrekken van de vergelijkingen geeft $55y = 55$, dus $y = 1$. Ook nu volgt $x = 5$.

3.33 **a** Vermenigvuldig de bovenste vergelijking met 2, en tel de vergelijkingen op:
$\begin{cases} -4x + 6y = 10 \\ 4x + 5y = 8 \end{cases}$
Optellen geeft $11y = 18$, ofwel $y = \frac{18}{11}$.
Uit de tweede vergelijking volgt:
$4x = 8 – 5y = 8 – \frac{90}{11} = 8 – 8\frac{2}{11} = -\frac{2}{11}$
$x = \frac{1}{4} \cdot -\frac{2}{11} = -\frac{1}{22}$
b Vermenigvuldig de bovenste vergelijking met 3 en de onderste met 2:
$\begin{cases} 6x + 9y = 36 \\ 6x + 4y = 26 \end{cases}$
Aftrekken geeft $5y = 10$, ofwel $y = 2$.
Uit de eerste vergelijking volgt:
$2x = 12 – 3y = 12 – 3 \cdot 2 = 12 – 6 = 6$, dus $x = 3$.

cc BY NC ND

3.34 **a** Vermenigvuldig in (i) de eerste vergelijking met 2:

$$\begin{cases} -4x + 6y = -12 \\ 4x - 6y = 24 \end{cases}$$

Optellen geeft: 0 = 12. Dit is onjuist. De conclusie is dat er geen enkele (x, y) te vinden is die beide vergelijkingen kloppend maakt.
Vermenigvuldig ook in (ii) de eerste vergelijking met 2:

$$\begin{cases} -4x + 6y = -12 \\ 4x - 6y = 12 \end{cases}$$

Optellen geeft 0 = 0. En dit klopt altijd. De conclusie is dat als we een (x, y) hebben die aan de ene vergelijking voldoet, die ook zal voldoen aan de andere vergelijking.

b $-2x + 3y = -6 \Leftrightarrow 3y = 2x - 6 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - 2$

$4x - 6y = 24 \Leftrightarrow -6y = -4x + 24 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - 4$

$4x - 6y = 12 \Leftrightarrow -6y = -4x + 12 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - 2$

c Het eerste stelsel geeft functies weer met grafieken die evenwijdig zijn (gelijke richtingscoëfficiënt) maar niet samenvallen en dus geen snijpunt hebben.
Het tweede stelsel geeft twee identieke functies weer.

2 Antwoorden op de zelftoets

1 **a** $f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$

$f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$

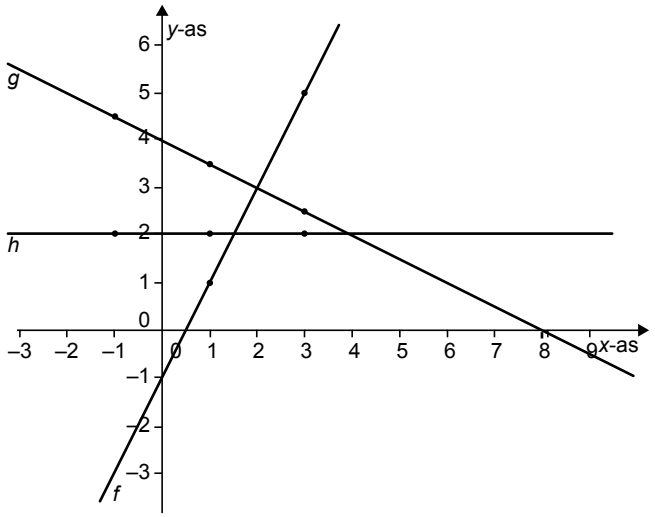
$f(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -2 - 1 = -3$

b $g(1) = 4 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 4 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$

$g(3) = 4 - \frac{1}{2} \cdot 3 = 4 - 1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$

$g(-1) = 4 - \frac{1}{2} \cdot (-1) = 4 + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$

c $h(x) = 2$ heeft uitvoerwaarde 2 voor alle invoerwaarden x.



2 **a** In de grafiek zien we S(2, 3).

b $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$;

$g(2) = 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 4 - 1 = 3$.

c $f(1\frac{1}{2}) = 2 \cdot 1\frac{1}{2} - 1 = 3 - 1 = 2$; $g(4) = 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 = 4 - 2 = 2$; $h(x)$ is voor alle x gelijk aan 2.

d $4 - \frac{1}{2}x = 0 \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow x = 8$. Het snijpunt is (8, 0).

3 $f(x) = ax + b$ met a = richtingscoëfficiënt en b = de y-waarde van het snijpunt met de y-as.

a a en b zijn direct gegeven.

$f(x) = -\frac{2}{3}x + 3$.

b $a = \frac{0-3}{6-0} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$, b is direct gegeven.

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.

c $a = \frac{7-1}{5-2} = \frac{6}{3} = 2$;

b berekenen we door in $f(x) = ax + b$ in te vullen: $a = 2$ en $f(2) = 1$;

dit geeft $1 = 2 \cdot 2 + b$, dus $1 = 4 + b$ ofwel $b = -3$.

$f(x) = 2x - 3$.

d $a = \frac{4\frac{1}{2}-1}{4-(-1)} = \frac{3\frac{1}{2}}{5} = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$;

b berekenen we door in $f(x) = ax + b$ in te vullen: $a = 0{,}7$ en $f(-1) = 1$;

dit geeft $1 = 0{,}7 \cdot (-1) + b$, dus $1 = -0{,}7 + b$ ofwel $b = 1{,}7$.

$f(x) = 0{,}7x + 1{,}7$.

e a is direct gegeven;

b berekenen we door in $f(x) = ax + b$ in te vullen: $a = 3$ en $f(3) = 2$;

dit geeft $2 = 3 \cdot 3 + b$, dus $2 = 9 + b$ ofwel $b = -7$.

$f(x) = 3x - 7$.

f a is direct gegeven;

b berekenen we door in $f(x) = ax + b$ in te vullen: $a = -\frac{2}{3}$ en $f(3) = 2$; dit geeft $2 = -\frac{2}{3} \cdot 3 + b$, dus $2 = -2 + b$ ofwel $b = 4$. $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$.

4 **a** In opgave 1 is f stijgend. In opgave 3 de functies van onderdelen c, d en e. In opgave 1 is g dalend en in opgave 3 zijn de functies van onderdelen a, b en f dalend.

b Als in het functievoorschrift de richtingscoëfficiënt positief is, dan is de functie stijgend. Als de richtingscoëfficiënt negatief is, dan is de functie dalend.

c De grootste richtingscoëfficiënt is 3 in opgave 3e en daarmee de steilste.

5 **a** $f(x) = g(x)$

$\frac{1}{4}x + 7 = 2x - 14$

$x + 28 = 8x - 56$

$-7x = -84$

$x = 12$

We vullen x in in $f(x) = \frac{1}{4}x + 7$:

$f(12) = \frac{1}{4} \cdot 12 + 7 = 10$

Het snijpunt is dus (12, 10).

b $f(x) - g(x) = 28$

$\frac{1}{4}x + 7 - 2x + 14 = 28$

$x + 28 - 8x + 56 = 112$

$-7x = 28$

$x = -4$

6 **a** $x > 2$

b $x \geq 4$

cc BY NC ND

7 **a** $x + 3 > 7x - 5$
$x - 7x > -5 - 3$
$-6x > -8$
$6x < 8$
$x < \frac{8}{6}$
b $\frac{1}{3}x - 7 \leq \frac{1}{2}x + 5$
$2x - 42 \leq 3x + 30$
$2x - 3x \leq 30 + 42$
$-x \leq 72$
$x \geq -72$
c $5(x + 4) \geq 3x + 25$
$5x + 20 \geq 3x + 25$
$5x - 3x \geq 25 - 20$
$2x \geq 5$
$x \geq \frac{5}{2}$

8 **a** $2x + 5y = 15$
$5y = -2x + 15$
$y = -\frac{2}{5}x + 3$
$4x - 3y = 4$
$-3y = -4x + 4$
$y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$
b $-\frac{2}{5}x + 3 = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$
$-6x + 45 = 20x - 20$
$-6x - 20x = -20 - 45$
$-26x = -65$
$x = \frac{65}{26} = 2\frac{1}{2}$
$y = -\frac{2}{5}x + 3 = -\frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{2} + 3 = -1 + 3 = 2.$
Het snijpunt is $(2\frac{1}{2}, 2)$.

9 Vermenigvuldig de eerste vergelijking met 2. Dan volgt:
$\begin{cases} 4a + 2b = 10 \\ 4a + b = -1 \end{cases}$
Aftrekken van deze vergelijkingen geeft $b = 11$. Dan volgt voor de eerste vergelijking $2a + 11 = 5$, dus $2a = -6$ en $a = -3$.
De vergelijking is dus $y = -3x + 11$.
Invullen van (2, 5) en (4, –1) in deze vergelijking geeft
$5 = -3 \cdot 2 + 11 = -6 + 11 = 5$; klopt.
$-1 = -3 \cdot 4 + 11 = -12 + 11 = -1$; klopt.

10 **a** De richtingscoëfficiënt van de lijn door A en B vinden we met:
$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2-3}{3-2} = \frac{-5}{1} = -5$$
De vergelijking is nu $y = -5x + b$. Met $x = 2$ en $y = 3$ vinden we:
$3 = -5 \cdot 2 + b = -10 + b$, dus $b = 13$. De vergelijking is $y = -5x + 13$.
b Op gelijke wijze vinden we voor de lijn door A en C:
$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-3}{3-2} = \frac{0}{1} = 0$$
De richtingscoëfficiënt is 0, dus we hebben een horizontale lijn. De lijn gaat door punten met y-coördinaat 3, dus de vergelijking is $y = 3$.

Voor de lijn door B en C vinden we:
$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-(-2)}{3-3} = \frac{5}{0}$$

We moeten hier door 0 delen, dat mag niet, dus de richtingscoëfficiënt bestaat niet. We hebben te maken met een verticale lijn (met vergelijking $x = 3$).

c De lijn door A en B heeft richtingscoëfficiënt -5 en is dus een dalende lijn.

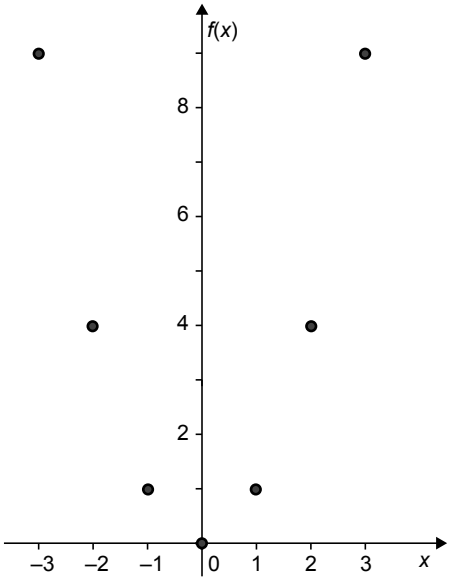
De lijn door A en C is horizontaal (richtingscoëfficiënt = 0), en de lijn door B en C is verticaal.

BY NC ND

Terugkoppeling bij leereenheid 4

1 Uitwerking van de opgaven

4.1 De punten van $f(x)$ zijn in onderstaande figuur getekend.



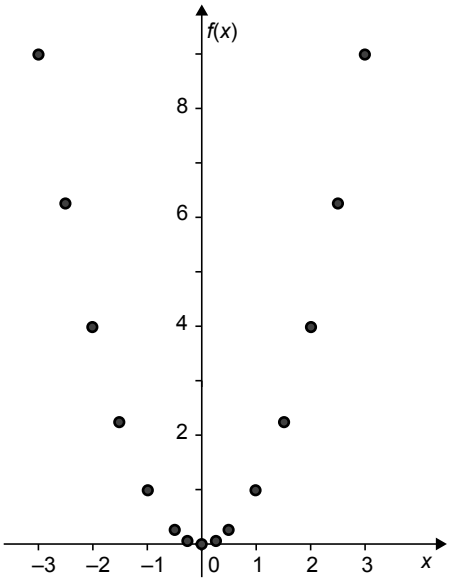
FIGUUR 4.11 Punten van $f(x) = x^2$

De punten liggen duidelijk niet op een rechte lijn. De vorm van de grafiek is een symmetrische boog.

4.2 Als we de tabel verder aanvullen ontstaat de volgende tabel.

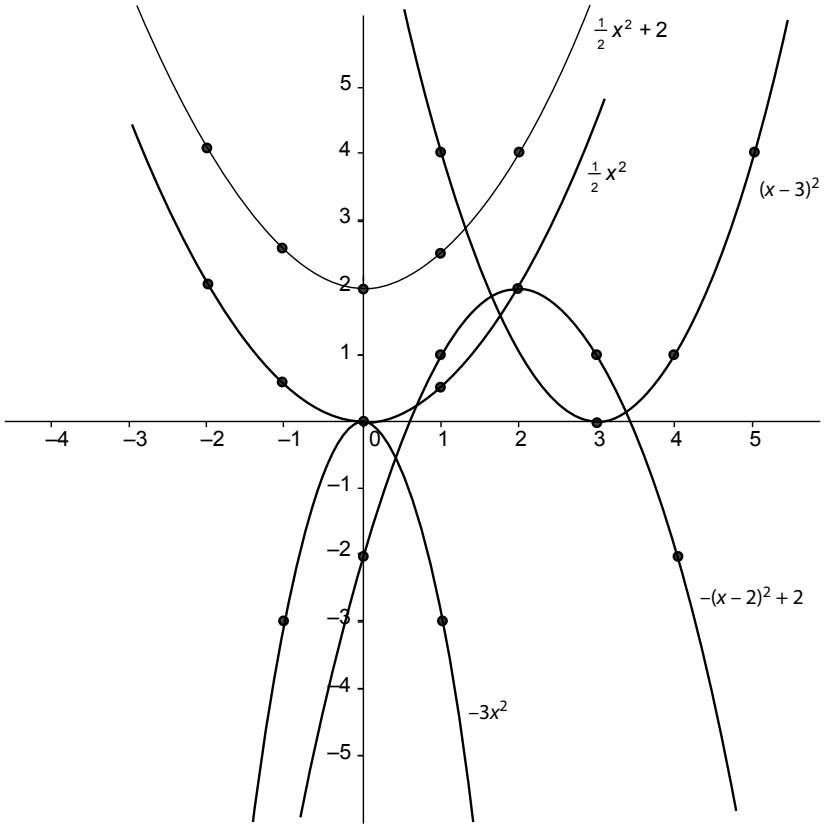
x	$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
$f(x)$	$6\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$	$6\frac{1}{4}$

Als we de punten erbij tekenen in figuur 4.11, krijgen we onderstaande figuur.



4.3 **a** We berekenen enkele punten van de grafieken.

x	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$\frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2			
$-3x^2$	–12	–3	0	–3	–12			
$\frac{1}{2}x^2 + 2$	4	$2\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	4			
$(x-3)^2$				4	1	0	1	4
$-(x-2)^2 + 2$			–2	1	2	1	–2	



4.4 **a** Als we de grafiek van $f(x) = x^2$ spiegelen in de x-as, dan krijgen we $f(x) = -x^2$.
Door twee naar rechts te verschuiven, krijgen we de grafiek van $f(x) = -(x-2)^2$. En met twee omhoog schuiven krijgen we de grafiek van $f(x) = -(x-2)^2 + 2$.
b Het functievoorschrift in standaardvorm is:
$f(x) = -(x-2)^2 + 2 = -(x^2 - 4x + 4) + 2 = -x^2 + 4x - 4 + 2 = -x^2 + 4x - 2$

4.5 We voeren de controle uit door de haakjes weg te werken:

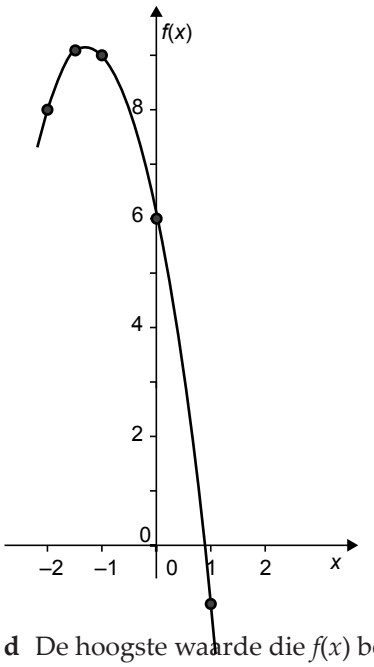
$$\begin{aligned} & a\left(x + \frac{b}{2a}\right) + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

4.6 **a** De aangevulde tabel ziet er als volgt uit:

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	4	-2	-4	-2	4	14

b De kleinste waarde -4 wordt gevonden voor $x = 1$. Links en recht van deze x zijn de functiewaarden steeds gelijk, dus de symmetrieas is $x = 1$.

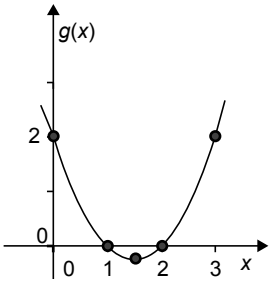
4.7 **a** Met $x = 0$ volgt $f(0) = 6$. We lossen nu op $f(x) = 6$, ofwel:
$-2x^2 - 5x + 6 = 6$
$-2x^2 - 5x = 0$
$-x(2x + 5) = 0$
$x = 0$ of $x = -2\frac{1}{2}$
De symmetrieas is dus $x = -1\frac{1}{4}$
b De x-coördinaat van de top is $x = -1\frac{1}{4}$. Daarbij hoort de y-coördinaat $f(-1\frac{1}{4}) = -2(-1\frac{1}{4})^2 - 5(-1\frac{1}{4}) + 6 = 9\frac{1}{8}$.
We kiezen vier x-waarden rondom $x = -1\frac{1}{4}$, namelijk $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$ en $x = 1$. Daarom volgt: $f(-2) = 8$, $f(-1) = 9$, $f(0) = 6$, $f(1) = -1$.
c



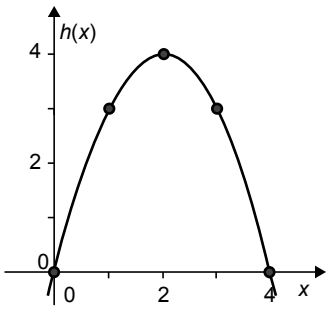
d De hoogste waarde die $f(x)$ bereikt is $9\frac{1}{8}$. Het domein is dus $\left\langle \leftarrow, 9\frac{1}{8} \right]$.

cc BY NC ND

4.8 Met $x = 0$ vinden we $g(0) = 2$. We lossen op $g(x) = 2$:
$x^2 - 3x + 2 = 2$
$x^2 - 3x = 0$
$x(x - 3) = 0$
$x = 0$ of $x = 3$.
De symmetrieas is $x = 1\frac{1}{2}$. We berekenen vervolgens $g(0) = 2$, $g(1) = 0$, $g(1\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$, $g(2) = 0$, $g(3) = 2$.



De coördinaten van de top zijn $(1\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$. Het bereik is $\left[-\frac{1}{4}, \rightarrow\right\rangle$.
Met $x = 0$ vinden we $h(0) = 0$. We lossen op $h(x) = 0$:
$4x - x^2 = 0$
$x(4 - x) = 0$
$x = 0$ of $x = 4$
De symmetrieas is $x = 2$, en de top is (2, 4).
We berekenen verder $h(0) = 0$, $h(1) = 3$, $h(3) = 3$, $h(4) = 0$.



Het bereik is $\left\langle \leftarrow, 4\right]$.

4.9 **a** De waarde van a in deze functies is respectievelijk 1, –3, $\frac{1}{2}$ en –1.
b De grafiek van een kwadratische functie is een bergparabool als a negatief is, dus als $f(x) = -(x - 2)^2 + 2$ en $f(x) = -2x^2 - 5x + 6$.
c Als $a = 0$ dan volgt: $f(x) = bx + c$. Dit is een lineaire functie, waarvan de grafiek een rechte lijn is.

4.10 **a** We berekenen $H(0) = 45$ en lossen op $H(t) = 45$:
$45 + 12\frac{1}{2}t - 5t^2 = 45$
$12\frac{1}{2}t - 5t^2 = 0$
$t(12\frac{1}{2} - 5t) = 0$
$t = 0$ of $2\frac{1}{2}$.
De symmetrieas is $t = 1\frac{1}{4}$.
b De top vinden we door te berekenen $H(1\frac{1}{4}) = 52\frac{13}{16}$.
c Met $\mathbb{R}$ als domein is het bereik $\left\langle \leftarrow, 52\frac{13}{16}\right]$.
d Als het domein $[0, 4\frac{1}{2}]$ is, dan is het bereik $[0, 52\frac{13}{16}]$.

4.11 **a** Als het domein $\mathbb{R}$ is, dan is het bereik van $f(x) = 2x^2 + x + 1$ gelijk aan $\left[\frac{7}{8}, \rightarrow\right\rangle$.
Als het domein $\mathbb{R}$ is, dan is het bereik van $f(x) = -2x^2 - 5x + 6$ gelijk aan $\left\langle \leftarrow, 9\frac{1}{8}\right]$.
b Op het domein [–1, 1] is het bereik van $f(x) = 2x^2 + x + 1$ gelijk aan $[\frac{7}{8}, 4]$.
Op het domein [–1, 1] is het bereik van $f(x) = -2x^2 - 5x + 6$ gelijk aan [–1, 9].
NB: in deze laatste situatie ligt de top buiten het domein.

4.12 **a** We zien alleen de halve parabool, rechts van de symmetrieas.
b Het domein is [0, 50], het bereik is [0, 1625].
c De symmetrieas is $x = 0$.
d Met $\rho = 1{,}3$ en $A = 1$ volgt:
$E_{\text{lucht}} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}3 \cdot 1 \cdot v^2 = 0{,}65\, v^2$.
e Per eenheid afstand (1 meter) is het energieverbruik: $0{,}65 \cdot 30^2 =$ 585 joule. Over 80 km is het energieverbruik:
$80.000 \cdot 585 = 46.800.000$ joule = 46,8 megajoule.
f Als per liter 9 megajoule wordt geproduceerd, dan is nodig:
46,8/9 = 5,2 liter benzine.
g Als de automobilist 2 keer zo langzaam rijdt, dan doet hij er 2 keer zo lang over. Het energieverbruik per meter wordt:
$0{,}65 \cdot 15^2 = 0{,}65 \cdot 225 = 146{,}25$ joule. Het energieverbruik is afgenomen met een factor 585/146,25 = 4.
h De snelheid wordt nu 33 m/s. Het energieverbruik per meter $0{,}65 \cdot 33^2 = 707{,}85$ joule. Dit is een toename met een factor 707,85/585 = 1,21. Het energieverbruik is dus 21% toegenomen.

4.13 **a** $2x - 6 = x^2 - 3x + 2$
$-x^2 + 5x - 8 = 0$
$x^2 - 5x + 8 = 0$
Voor de discriminant $b^2 - 4ac$ van de *abc*-formule volgt:
$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 25 - 32 = -7$. De discriminant is negatief, dus zijn er geen oplossingen.
b $2x - 4\frac{1}{4} = x^2 - 3x + 2$
$-x^2 + 5x - 6\frac{1}{4} = 0$
$x^2 - 5x + 6\frac{1}{4} = 0$
$(x - 2\frac{1}{2})^2 = 0$
$x = 2\frac{1}{2}$

4.14 Welke vergelijking bij welke lijn hoort zien we aan de waarde van b in $y = 2x + b$. De waarde van b is –6, $-4\frac{1}{4}$ of –2. De bovenste lijn heeft $b = -2$; de middelste $-4\frac{1}{4}$ en de onderste lijn heeft $b = -6$.
Voor de bovenste lijn zijn de snijpunten (1, 0) en (4, 6), zoals gegeven in voorbeeld 4.5.
De middelste lijn heeft een snijpunt voor $x = 2\frac{1}{2}$. Er geldt dan $f(2\frac{1}{2}) = 2 \cdot 2\frac{1}{2} - 4\frac{1}{4} = 5 - 4\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Dus het snijpunt is $(2\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.
De onderste lijn heeft geen snijpunt met de parabool.

cc BY NC ND

4.15 **a** $f(x) = g(x)$
$3x^2 + 5x - 4 = 3x + 1$
$3x^2 + 2x - 5 = 0$
$(3x + 5)(x - 1) = 0$
$x = -\frac{5}{3}$ of $x = 1$
$g(-\frac{5}{3}) = 3 \cdot -\frac{5}{3} + 1 = -4$
$g(1) = 3 \cdot 1 + 1 = 4$
De snijpunten zijn $(-\frac{5}{3}, -4)$ en $(1, 4)$.
b $f(x) = g(x)$
$3x - 2x^2 = 2x$
$-2x^2 + x = 0$
$2x^2 - x = 0$
$x(2x - 1) = 0$
$x = 0$ of $x = \frac{1}{2}$
$g(0) = 0$ en $g(\frac{1}{2}) = 1$
De snijpunten zijn $(0, 0)$ en $(\frac{1}{2}, 1)$.
c $f(x) = g(x)$
$5 - 6x - 9x^2 = 12x + 14$
$-9x^2 - 18x - 9 = 0$
$x^2 + 2x + 1 = 0$
$(x + 1)^2 = 0$
$x = -1$
Er is één snijpunt: $(-1, 2)$.
d $f(x) = g(x)$
$(x - 3)(2x + 5) = x - 20$
$2x^2 - x - 15 = x - 20$
$2x^2 - 2x + 5 = 0$
Voor de discriminant in de *abc*-formule geldt:
$b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 4 - 40 = -36$. Deze is kleiner dan 0, dus zijn er geen oplossingen. De grafieken hebben geen snijpunt.

4.16 **a** De richtingscoëfficiënt is –5 en de beginwaarde is 100, dus het functievoorschrift is $H_R = 100 - 5 \cdot t$.
b We lossen op: $100 - 5t = 0 \Leftrightarrow t = 20$.
c Voor $t = 20$ geldt: $H_S(20) = 80 + 20 \cdot 20 - 5 \cdot (20)^2 = -1520$. Deze waarde is negatief, dus de steen zal eerder de grond hebben bereikt (dan is $H_S(t) = 0$).
d We lossen op:
$100 - 5t = 80 + 20t - 5t^2$
$5t^2 - 25t + 20 = 0$
$t^2 - 5t + 4 = 0$
$(t - 1)(t - 4) = 0$
$t = 1$ of $t = 4$.
Op $t = 1$ (als de steen nog omhoog gaat) en op $t = 4$ zijn de regendruppel en de steen op gelijke hoogte.

4.17 We lossen de volgende vergelijking op:
$x^2 - 3x = -x^2 + 5x - 8$
$2x^2 - 8x + 8 = 0$
$x^2 - 4x + 4 = 0$
$(x - 2)^2 = 0$
$x = 2$
Er is een oplossing voor $x = 2$.
De waarde van y is dan $2^2 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$, dus het snijpunt is $(2, -2)$.

4.18 **a** Nu lossen we op:
$x^2 - 3x - 8 = -x^2 + 5x - 8$
$2x^2 - 8x = 0$
$2x(x - 4) = 0$
$x = 0$ of $x = 4$
Er zijn twee oplossingen, voor $x = 0$ en $x = 4$. De y-waarden zijn dan $0^2 - 3 \cdot 0 - 8 = -8$ en $4^2 - 3 \cdot 4 - 8 = -4$. De snijpunten zijn dus $(0, -8)$ en $(4, -4)$.
b We proberen op te lossen:
$x^2 - 3x = -x^2 + 5x - 10$
$2x^2 - 8x + 10 = 0$
$x^2 - 4x + 5 = 0$
De waarde van de discriminant in de *abc*-formule is
$b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$. Deze is negatief, dus is er geen oplossing en geen snijpunt van de grafieken.

4.19 **a** We lossen op:
$3x^2 + 5x - 4 = x^2 + 2x + 1$
$2x^2 + 3x - 5 = 0$
$(2x + 5)(x - 1) = 0$
$x = -2\frac{1}{2}$ of $x = 1$
Voor $x = -2\frac{1}{2}$ en $x = 1$ volgen respectievelijk
$y = (-2\frac{1}{2})^2 + 2 \cdot -2\frac{1}{2} + 1 = 6\frac{1}{4} - 5 + 1 = 2\frac{1}{4}$ en $y = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 4$. De snijpunten zijn $(-2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4})$ en $(1, 4)$.
b We lossen op:
$3x - 2x^2 = x^2$
$3x - 3x^2 = 0$
$3x(1 - x) = 0$
$x = 0$ of $x = 1$
Voor $x = 0$ en $x = 1$ volgen respectievelijk $y = 0$ en $y = 1$. De snijpunten zijn $(0, 0)$ en $(1, 1)$.
c We lossen op:
$5 - 6x - 9x^2 = 10 - 6x - 9x^2$
$5 = 10$
Deze vergelijking heeft geen oplossing, dus is er geen snijpunt. Dit is ook in te zien omdat de vergelijkingen gelijk zijn, afgezien van de constante termen 5 en 10. De ene grafiek is dus een verticale verschuiving van de andere.
d We lossen op:
$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)^2$
$x^2 - 3x + 2 = x^2 - 4x + 4$
$x - 2 = 0$
$x = 2$
Voor x volgt $y = 0$. Er is dus één snijpunt $(2, 0)$.

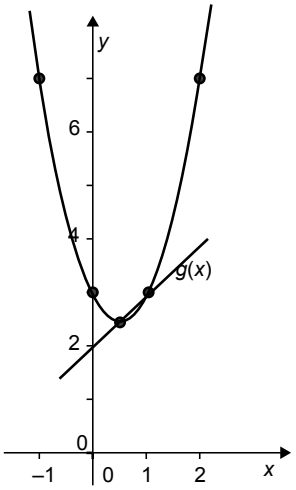
4.20 **a** De maximale uitwijking is 10 cm.
b In de grafiek lezen we af: E_p is maximaal 500 mJ.
Het functievoorschrift is van de vorm ax^2. Met $x = 10$ moet dit 500 zijn, dus $a = 5$ en het functievoorschrift is $5x^2$.
c $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 = 5x^2$, dus $k = 10$.
$E_p(x)$ is gegeven in mJ, en x in cm. De eenheid van k is dus mJ/cm^2.
d $E_b = E_{tot} - E_p = 500 - 5x^2$.
e E_b is de bergparabool, E_p is de dalparabool.
f De symmetrieas is de lijn $x = 0$, ofwel de y-as. De fysische interpretatie is dat de energieniveaus symmetrisch zijn rondom het evenwichtspunt.
g De top van E_b is $(0, 500)$. De fysische interpretatie is dat de bewegingsenergie maximaal is in het evenwichtspunt.

BY NC ND

h Het domein en bereik van beide functies is gelijk: domein is [–10, 10], bereik is [0, 500].
i We lossen op:
$5x^2 = 500 - 5x^2$
$10x^2 = 500$
$x^2 = 50$
$x = \pm 5\sqrt{2}$
j We lossen op:
$500 - 5x^2 = 250$
$5x^2 = 250$
$x^2 = 50$
$x = \pm 5\sqrt{2}$

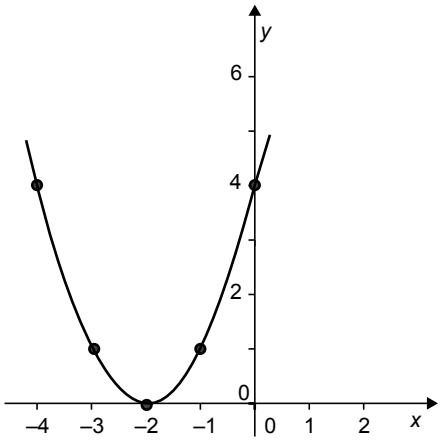
4.21 **a** $2x^2 - 2x + 3 = x + 2$
$2x^2 - 3x + 1 = 0$
$(2x - 1)(x - 1) = 0$
$x = \frac{1}{2}$ of $x = 1$

b



c $f(x) \leq g(x)$ geldt voor $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

4.22 **a** We lossen op:
$x^2 + 4x + 4 \leq 0$
$(x + 2)^2 \leq 0$
$x = -2$
Een schets van de grafiek geeft:



In de grafiek lezen we af dat $x^2 + 4x + 4 = 0$ als $x = -2$, dus $x^2 + 4x + 4 \leq 0$ als $x = -2$.

b We lossen op:

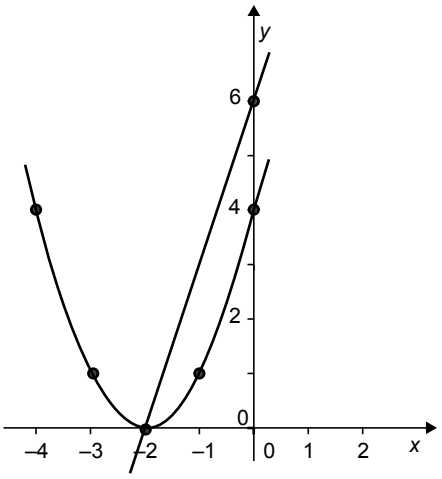
$x^2 + 4x + 4 = 3x + 6$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x + 2)(x - 1) = 0$

$x = -2$ of $x = 1$

We tekenen in een grafiek $f(x) = x^2 + 4x + 4$ en $g(x) = 3x + 6$.



De snijpunten zijn $(-2, 0)$ en $(1, 9)$. Er geldt $f(x) \leq g(x)$ geldt als $-2 \leq x \leq 1$.

c We lossen op:

$x^2 + 4x + 4 = x - 4$

$x^2 + 3x + 8 = 0$

Voor de discriminant in de *abc*-formule geldt:

$b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 9 - 32 = -23$. De waarde is negatief, dus er zijn geen snijpunten en geen oplossingen. De parabool is een dalparabool en voor iedere x groter dan $x - 4$.

Voor geen enkele x geldt dus $x^2 + 4x + 4 \leq x - 4$.

d We lossen op:

$x^2 + 4x + 4 = 4 - x^2$

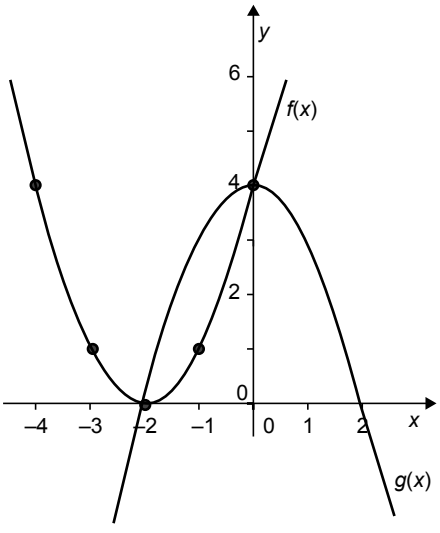
$2x^2 + 4x = 0$

$2x(x + 2) = 0$

$x = 0$ of $x = -2$

De snijpunten zijn $(0, 4)$ en $(-2, 0)$.

We schetsen de grafieken:



cc BY NC ND

Als $f(x) = x^2 + 4x + 4$ en $g(x) = 4 - x^2$, dan zien we in de grafiek dat $f(x) \leq g(x)$ geldt als $-2 \leq x \leq 0$.

e We lossen op:

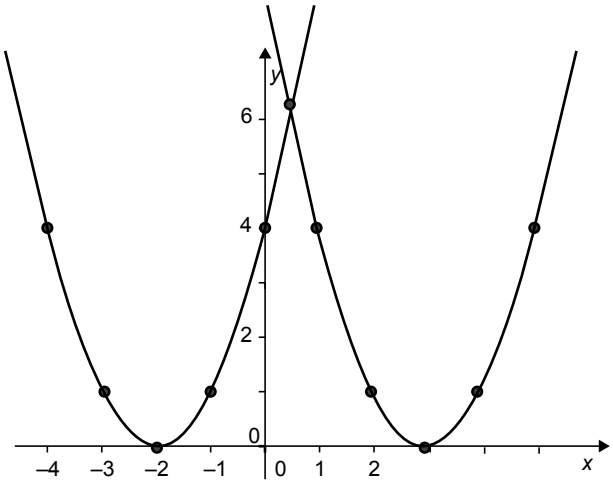
$x^2 + 4x + 4 = x^2 - 6x + 9$

$10x - 5 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

Er is één snijpunt $(\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4})$.

We schetsen de grafieken:



We zien dat $x^2 + 4x + 4 \leq x^2 - 6x + 9$ als $x \leq \frac{1}{2}$.

f We lossen op:

$x^2 + 4x + 4 = -(x + 1)^2 + 1$

$x^2 + 4x + 4 = -x^2 - 2x - 1 + 1$

$2x^2 + 6x + 4 = 0$

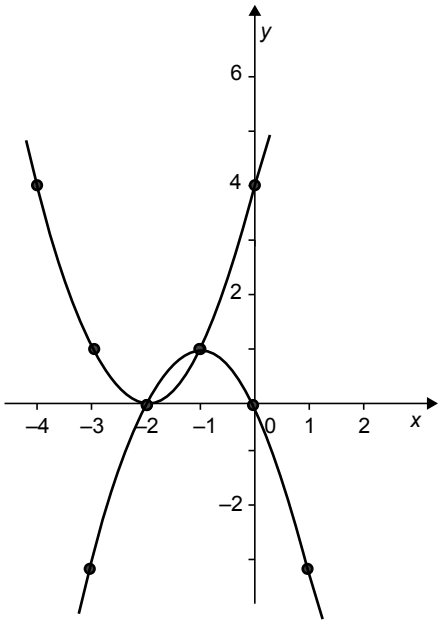
$x^2 + 3x + 2 = 0$

$(x + 1)(x + 2) = 0$

$x = -1$ of $x = -2$

De snijpunten zijn $(-2, 0)$ en $(-1, 1)$.

De grafieken worden:



In de grafiek zien we $x^2 + 4x + 4 \leq -(x + 1)^2 + 1$ als $-2 \leq x \leq -1$.

4.23 **a** $E_{rol} = C_{rol} \cdot m_{voertuig}$ = 0,02 N/kg · 400.000 kg = 8000 N = 8000 J/m
b Met ρ = 1,3 en A = 11 volgt:
$E_{lucht} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}3 \cdot 11 \cdot v^2 = 7{,}15v^2$
c We lossen op:
$8000 = 7{,}15\ v^2$
$v^2 = 8000/7{,}15 = 1188{,}9$
$v = \sqrt{1188{,}9} = 33{,}45$ m/s = 120,4 km/h
d Op het interval $\langle 33{,}45, \rightarrow \rangle$ is de luchtweerstand groter; op het interval $[\,0,\ 33{,}45\rangle$ is de rolweerstand groter.
e We moeten nu oplossen:
$32.000 = 7{,}15\ v^2$
$v^2 = 32.000/7{,}15 = 4475{,}5$
$v = \sqrt{4475{,}5} = 66{,}90$ m/s
Op het interval $\langle 66{,}90, \rightarrow \rangle$ is de luchtweerstand dominant.
f De rolweerstand is hier het grootst, dus zullen ze proberen het gewicht van de trein te verlagen, of de wielen beter te slijpen.
g Nu is de luchtweerstand dominant en zal vooral gelet worden op de aerodynamica, of het verlagen van de snelheid (maar ja, waar heb je dan een hogesnelheidstrein voor...).

2 Antwoorden op de zelftoets

1 **a** Er geldt $f(0) = -2$. We bepalen een tweede x-waarde waarvoor $f(x) = -2$, door op te lossen:
$2x^2 + 3x - 2 = -2$
$2x^2 + 3x = 0$
$x(2x + 3) = 0$
$x = 0$ of $x = -\frac{3}{2}$
De x-coördinaat van de top ligt midden tussen deze twee x-waarden, dus $x_{top} = -\frac{3}{4}$. Verder is $f(-\frac{3}{4}) = 2 \cdot (-\frac{3}{4})^2 + 3(-\frac{3}{4}) - 2 = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} - 2 = -3\frac{1}{8}$. De top van f is het punt $(-\frac{3}{4}, -3\frac{1}{8})$.
Er geldt $g(0) = -1$. We bepalen een tweede x-waarde waarvoor $g(x) = -1$, door op te lossen:
$-3x^2 + 4x - 1 = -1$
$-3x^2 + 4x = 0$
$-x(3x - 4) = 0$
$x = 0$ of $x = \frac{4}{3}$
De x-coördinaat van de top ligt midden tussen deze twee x-waarden, dus $x_{top} = \frac{2}{3}$.
Verder geldt: $g(\frac{2}{3}) = -3 \cdot (\frac{2}{3})^2 + 4 \cdot \frac{2}{3} - 1 = -\frac{4}{3} + \frac{8}{3} - 1 = \frac{1}{3}$.
De top van g is het punt $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.
b De top van f ligt niet in het domein, dus de grenzen van het bereik worden bereikt voor $x = 0$ en $x = 2$. Dan geldt $f(0) = -2$ en $f(2) = 12$. Het bereik is $[-2, 12]$.
c De top ligt in het domein, en de parabool is een bergparabool. Alle waarden kleiner of gelijk aan de y-coördinaat van de top worden aangenomen, dus het bereik is $\langle \leftarrow, \frac{1}{3}]$.
d We lossen op:
$f(x) = g(x)$
$2x^2 + 3x - 2 = -3x^2 + 4x - 1$
$5x^2 - x - 1 = 0$
Met de *abc*-formule volgt:

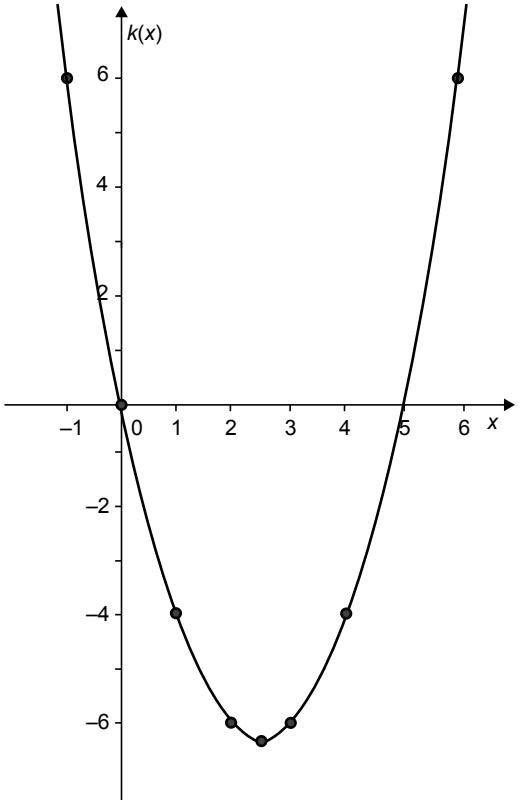
$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 5 \cdot (-1)}}{2 \cdot 5} = \frac{1}{10} \pm \frac{1}{10}\sqrt{21}$$

CC BY NC ND

2 **a** De coëfficiënt voor x^2 is negatief, dus de parabool is een bergparabool.
b $h(0) = 5$, $h(4) = 5 + 4 - \frac{1}{4} \cdot 4^2 = 5$.
c De parabool is een bergparabool, dus als we de y-waarde van de top kennen, kunnen we het domein bepalen. De x-coördinaat van de top is 2, en $h(2) = 5 + 2 - \frac{1}{4} \cdot 2^2 = 6$.
Het bereik is $\langle \leftarrow, 6]$.
d De top ligt in het domein, en $h(0) = 5$ en $h(3\frac{1}{2}) = 5\frac{7}{16}$. Het bereik is [5, 6].

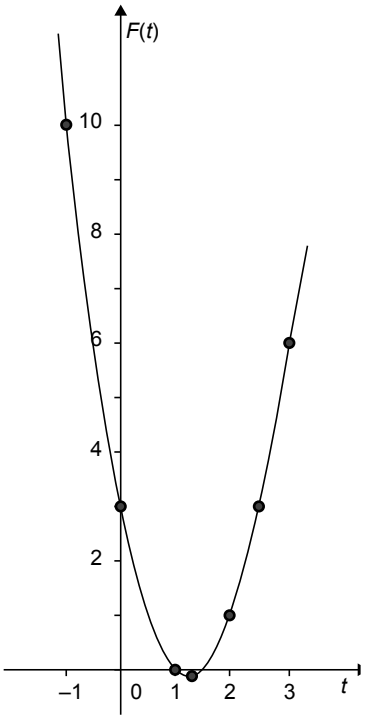
3 Er geldt $k(0) = 0$ en $k(5) = 0$. De symmetrieas is $x = 2\frac{1}{2}$ en de top is $(2\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4})$.
We berekenen nog enkele functiewaarden in de tabel en schetsen vervolgens de grafiek.

x	-1	0	1	2	$2\frac{1}{2}$	3	4	5	6
$k(x)$	6	0	-4	-6	$-6\frac{1}{4}$	-6	-4	0	6

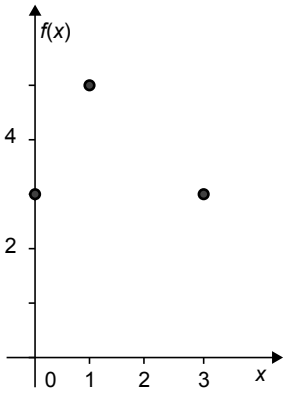


4 Er geldt $F(0) = 3$. We lossen op:
$F(t) = 2t^2 - 5t + 3 = 3$
$2t^2 - 5t = 0$
$t(2t - 5) = 0$
$t = 0$ of $t = \frac{5}{2}$
De symmetrieas is $t = \frac{5}{4}$. De coördinaten van de top zijn $(\frac{5}{4}, -\frac{1}{8})$. We berekenen enkele functiewaarden en schetsen de grafiek.

t	-1	0	1	$\frac{5}{4}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$F(t)$	10	3	0	$-\frac{1}{8}$	1	3	6



5 **a**



b In de figuur is duidelijk te zien dat de punten niet op één lijn liggen, dus kan f geen eerstegraads functie zijn.
c De grafiek zal een bergparabool zijn.
d De symmetrieas zal precies tussen $x = 0$ en $x = 3$ liggen, want $f(0) = f(3)$. De symmetrieas is $x = 1\frac{1}{2}$. Omdat $x = 1$ en $x = 2$ evenver af liggen van $x = 1\frac{1}{2}$, geldt $f(2) = f(1)$, dus $f(2) = 5$.

cc BY NC ND

6 **a** De grafiek van de functie is een dalparabool. Er geldt $f(0) = 10$. We lossen op:
$f(x) = 10$
$3x^2 - 6x + 10 = 10$
$3x^2 - 6x = 0$
$3x(x - 2) = 0$
$x = 0$ of $x = 2$
De symmetrieas is $x = 1$ en de top is (1, 7).
b In het vorige onderdeel hebben we opgelost $f(x) = 10$. We vonden $x = 0$ en $x = 2$. Omdat de grafiek een dalparabool is, geldt $f(x) \leq 10$ voor $0 \leq x \leq 2$.
c We lossen op:
$3x^2 - 6x + 10 = 4x + 7$
$3x^2 - 10x + 3 = 0$
$(3x - 1)(x - 3) = 0$
$x = \frac{1}{3}$ of $x = 3$
De snijpunten zijn $(\frac{1}{3}, 8\frac{1}{3})$ en (3, 19).

7 **a** Omdat $f(0) = -7$, is het snijpunt met de y-as (0, –7). Het snijpunt met de x-as vinden we door op te lossen:
$3x - 7 = 0$
$3x = 7$
$x = \frac{7}{3}$
Het snijpunt met de x-as is $(\frac{7}{3}, 0)$.
b Omdat $g(0) = 23$, is het snijpunt met de y-as (0, 23). De snijpunten met de x-as vinden we door op te lossen:
$2x^2 - 13x + 23 = 0$.
De discriminant uit de *abc*-formule is
$b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 23 = -15$. De discriminant is negatief, dus zijn er geen oplossingen en geen snijpunten met de x-as.
c We lossen op:
$g(x) = 23$
$2x^2 - 13x + 23 = 23$
$2x^2 - 13x = 0$
$x(2x - 13) = 0$
$x = 0$ of $x = 6\frac{1}{2}$
De symmetrieas is $x = 3\frac{1}{4}$. Er geldt $g(3\frac{1}{4}) = 1\frac{7}{8}$.
De top is $(3\frac{1}{4}, 1\frac{7}{8})$.
d We lossen op:
$f(x) = g(x)$
$3x - 7 = 2x^2 - 13x + 23$
$-2x^2 + 16x - 30 = 0$
$x^2 - 8x + 15 = 0$
$(x - 3)(x - 5) = 0$
$x = 3$ of $x = 5$
Omdat g een dalparabool is, geldt $f(x) < g(x)$, als $x < 3$ of $x > 5$.

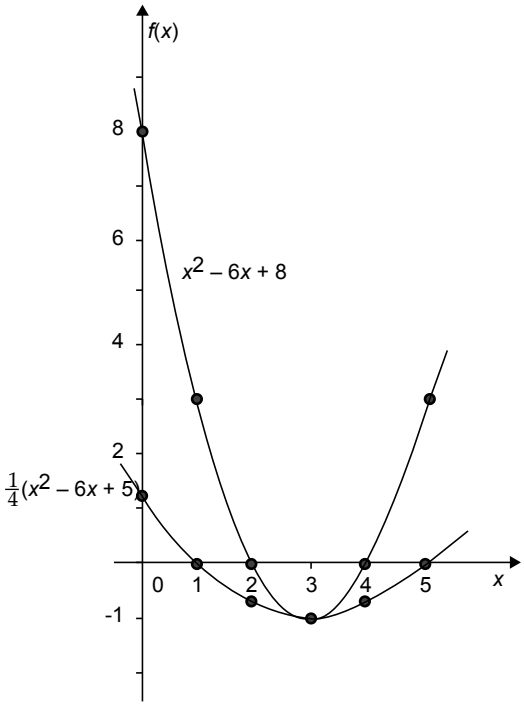
8 We lossen op:

$$x^2 - 6x + 8 = \frac{x^2 - 6x + 5}{4}$$

$4x^2 - 24x + 32 = x^2 - 6x + 5$
$3x^2 - 18x + 27 = 0$
$x^2 - 6x + 9 = 0$
$(x - 3)^2 = 0$
$x = 3$

Er is één oplossing, dus 1 snijpunt (3, –1). We berekenen enkele functiewaarden en schetsen de grafieken.

x	0	1	2	3	4	5
$x^2 - 6x + 8$	8	3	0	−1	0	3
$\frac{1}{4}(x^2 - 6x + 5)$	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	−1	$-\frac{3}{4}$	0



Uit de figuur leiden we af dat $x^2 - 6x + 8 > \frac{x^2 - 6x + 5}{4}$ altijd geldt, behalve voor $x = 3$.

cc BY NC ND

Terugkoppeling bij leereenheid 5

1 Uitwerking van de opgaven

5.1 **a** In 9 jaar wordt Bart 45 cm langer, dat is dus gemiddeld 5 cm per jaar.
b De richtingscoëfficiënt is 5, dus $L = 5 \cdot l + b$. Als $l = 3$, dan is $L = 100$, dus $100 = 5 \cdot 3 + b = 15 + b$. Hieruit volgt dat $b = 85$ en $L = 5 \cdot l + 85$.
c Het domein is [3, 12] en het bereik [100, 145].
d Ieder jaar is de toename even groot. Dat verband kunnen we weergeven met een lineaire functie, zodat we spreken van lineaire groei.

5.2 Op $t = 2$ zijn er 4 bacteriën. Op $t = 3$ dubbel zoveel, dus 8. Op $t = 4$ zijn er 16 en op $t = 5$ zijn er 32. Vervolgens gaat het hard. Doorrekenen geeft dat op $t = 10$ er 1024 bacteriën zijn en op $t = 15$ zijn dat er 32.768.

5.3 **a** Op soortgelijke wijze als in opgave 5.2 berekenen we dat het aantal bacteriën op $t = 1$ gelijk is aan 2000. Op $t = 2$ zijn er 4000 en op $t = 3$ zijn er 8000. Op $t = 4$ zijn er 16.000. Op ieder tijdstip zijn er 1000 keer zoveel.
b Ook op $t = 10$ en $t = 15$ zullen er 1000 keer zoveel zijn, dus op $t = 10$ zijn er 1.024.000, en op $t = 15$ zijn er 32.768.000.

5.4 **a** De toename in mg in het eerste uur is 100. Vervolgens 300, 900, 2700, 8100, 24.300.
b In een uur is de toename steeds twee keer het begingewicht.
c Tussen twee opeenvolgende tijdstippen neemt het gewicht steeds met een factor 3 toe.

5.5 **a** We moeten met een factor 3 blijven vermenigvuldigen, dus het gewicht op $t = 7$ is 109.350.
b Steeds vermenigvuldigen met 3 geeft 109.350, 328.050, 984.150 en 2.952.450.

5.6 In voorbeeld 5.3 is de beginhoeveelheid b op $t = 0$ gelijk aan 1. De groeifactor is 2.
In opgave 5.3 is de beginhoeveelheid op $t = 0$ gelijk aan 1000 en de groeifactor is 2.
In opgave 5.4 is de beginhoeveelheid 50 en de groeifactor is 3.

5.7 **a** Iedere 20 minuten verdubbelt de oppervlakte, de groeifactor is constant en er is dus exponentiële toename.
b De groeifactor is 2.
c Na een uur is de oppervlakte 8 keer zo groot, dus dan is de groeifactor 8.
d De beginhoeveelheid is 1,5, de groeifactor is 2, dus het functievoorschrift is $V(t) = 1{,}5 \cdot 2^t$.
e Na 3 uur is $t = 9$, en het oppervlak is $V(a) = 1{,}5 \cdot 2^9 = 1{,}5 \cdot 512 = 768$ km^2 (in de veronderstelling dat de oppervlakte steeds blijft verdubbelen).

5.8 **a** Na nog eens 75.000 jaar is de straling weer gehalveerd, dus 50.000 MBq. Na nog twee periodes is het 12.500 MBq.
b $b = 400.000$; $g = ½$.
c De straling zal nooit helemaal verdwijnen; altijd blijft de helft over. Na 750.000 is $t = 10$ en de straling gelijk aan $400.000 \cdot (½)^{10} = 400.000/1024 \approx 400$ MBq.

cc BY NC ND

5.9 **a** De factor is $N(1)/N(0) = 0{,}707$.
b $N(1) \cdot 0{,}707 = 0{,}707 \cdot 0{,}707 = 0{,}499849$. Dit is niet precies gelijk aan $N(2)$. Omdat we met meetfouten en afrondingseffecten te maken hebben, is er enig verschil.
c Omdat geldt $H(0) = b = 1$, vinden we direct $b = 1$. Voor $t = 2$ vinden we: $H(2) = b \cdot g^2 = g^2 = 0{,}5 = \frac{1}{2}$. Dus $g^2 = \frac{1}{2}$, ofwel $g = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
d Omdat de concentratie steeds halveert, blijft er steeds wat over, en zal de stof nooit helemaal verdwijnen (maar wel ooit zo goed als 0 zijn).

5.10 **a** 3% van 6,8 miljoen is 204.000 inwoners komen er in 1960 bij. Op 1 januari 1961 waren er dus ongeveer 7 miljoen inwoners.
b 3% van 7 miljoen is 210.000 inwoners. Op 1 januari 1962 waren er dus ongeveer 7,2 miljoen inwoners.

5.11 We berekenen $A(t) = 6{,}8 \cdot 1{,}03^t$ voor $t = 10$: $A(10) = 6{,}8 \cdot 1{,}03^{10} \approx 9{,}139$.

5.12 **a** We berekenen $1{,}0323^{10} \approx 1{,}374$. In 10 jaar neemt de bevolking dus toe met ongeveer 37%.
b Enig uitproberen geeft dat $1{,}0323^{22} \approx 2{,}01$. In ongeveer 22 jaar verdubbelt het aantal inwoners van Oeganda.

5.13 **a** Na 1 jaar wordt 50.000 euro bijgeschreven en het saldo is dan 1.050.000 euro.
b Nu is 5% rente van het saldo gelijk aan 52.500. Na 2 jaar is het saldo 1.102.500 euro.
c De groeifactor is 1,05 en het functievoorschrift is $1.000.000 \cdot (1{,}05)^t$.
d Op 1 januari 2042 geldt $t = 25$. Het saldo is dan $1.000.000 \cdot (1{,}05)^{25} = 3.386.354{,}94$.
e Enig uitproberen geeft $(1{,}05)^{14} \approx 1{,}98$. Het saldo verdubbelt dus in ongeveer 14 jaar.

5.14 **a** 10% van 500.000 ton is 50.000 ton.
b Op $t = 1$ is de haringstand 450.000 ton.
c Nu is 10% van 450.000 ton gelijk aan 45.000 ton. Op $t = 2$ is de haringstand 405.000 ton.

5.15 De afname is 95.000 ton, dat is 19% van 500.000.

5.16 **a** Op $t = 10$ en met $p = 0{,}9$ geldt $A(10) = 500.000 \cdot (0{,}9)^{10} = 174.339$ ton.
b Enig uitproberen laat zien dat bij $t = 16$ de haringstand voor het eerst onder de 100.000 ton is.

5.17 **a** De groei is 10%, dus zonder bevissing zou de haringstand op $t = 3$ gelijk zij aan $1{,}1 \cdot A(2)$. Er wordt echter 50.000 ton gevist, dus $A(3) = 1{,}1 \cdot A(2) - 50.000$.
b Op $t = 2$ is $A(2) = 405.000$.
Nu volgen:
$A(3) = 1{,}1 \cdot 405.000 - 50.000 = 395.500$
$A(4) = 1{,}1 \cdot 395.500 - 50.000 = 385.050$
$A(5) = 1{,}1 \cdot 385.050 - 50.000 = 373.555$.
c Om groei te bereiken mag er niet meer gevist worden dan de geboorte. De geboorte is 10% en op $t = 2$ is dat 40.500 ton. De haringstand neemt toe als het vangstquotum kleiner is dan 40.500 ton.

5.18 **a** De rente wordt niet bijgeschreven en in 2017 wordt 5% opgenomen. 5% is 50.000 euro, dus eind 2017 staat er nog 950.000 euro op de rekening.
b 5% rente van 950.000 euro is 47.500 euro. Als hij ook 5% opneemt, dan ontvangt hij dus 95.000 euro.
c Hij neemt steeds 5% op van het bedrag dat er nog staat. Dat wordt steeds minder en daarvan zal er na 20 jaar nog geld op de rekening staan.
d Paul neemt steeds 5% op, dus de groeifactor is 0,95.
e De beginwaarde is 1.000.000 en de groeifactor is 0,95. Er geldt dus $S(t) = 1.000.000 \cdot (0{,}95)^t$ en $S(20) = 1.000.000 \cdot 0{,}95^{20}$. Dit is gelijk aan 358.485 euro.
f Paul ontvangt minder dan 10.000 euro als het saldo onder de 100.000 euro komt, ofwel zodra $0{,}95^t$ kleiner is dan 0,1. Dit is het geval voor $t = 45$.

2 Antwoorden op de zelftoets

1 **a** Per tijdseenheid is de groei gelijk aan 5. De formule is dus $H(t) = 5 \cdot t + b$. Met $H(0) = 15$, volgt dat $15 = b$, dus $H(t) = 5 \cdot t + 15$.
b De groeifactor is 20/15 = 4/3. De formule is nu $H(t) = b \cdot g^t = 15 \cdot (4/3)^t$.
c De formule in onderdeel a heeft als resultaat $H(1) = 20$ en $H(2) = 25$. De formule blijft dus gelijk.
d De groeifactor is nu 25/20 = 5/4. Omdat $H(1) = 20$ volgt $b \cdot g = 20$ ofwel $b = 20/g = 20/(5/4) = 16$. De formule wordt dus $H(t) = 16 \cdot (5/4)^t$.

2 **a** Het gewicht zal gelijk zijn aan $350 \cdot (1{,}02)^2 = 364{,}14$.
b De groeifactor is 1,02 per uur. In 24 uur is de groeifactor $(1{,}02)^{24} \approx 1{,}61$. De groei per dag is dus ongeveer 61%.

3 **a** Er geldt $(1{,}15)^{10} \approx 4{,}04555$. Het aantal inwoners in 2020 is 404.555.
b Er geldt $(1{,}15)^5 \approx 2{,}011$. Na 5 jaar is het aantal inwoners voor het eerst meer dan 200.000.

4 **a** De groeifactor is 0,93. Er geldt $10.000 \cdot 0{,}93^{10} = 4.840$.
b Na 9 jaar is het aantal inwoners nog meer dan 5.000. Na 10 jaar is het voor het eerst minder.

5 Een rente van 1% geeft een groeifactor van 1,01. Omdat $1{,}01^{12} \approx 1{,}127$ is het rentepercentage op jaarbasis ongeveer 12,7%. De Volksbank biedt met 13% meer rente.

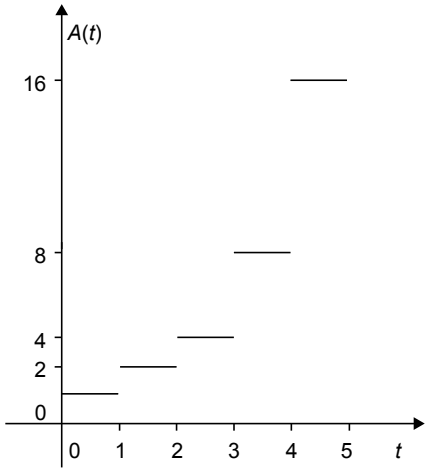
6 **a** De toename in iedere periode van 5 jaar is respectievelijk 25.000, 37.500 en 56.250. Dit is niet een constante toename, dus er is niet sprake van een lineair groeimodel.
b De groeifactor in de periodes is steeds 1,5. Er is dus exponentiële groei. In 1975 is het aantal inwoners $168.750 \cdot 1{,}5 = 253.125$.

cc BY NC ND

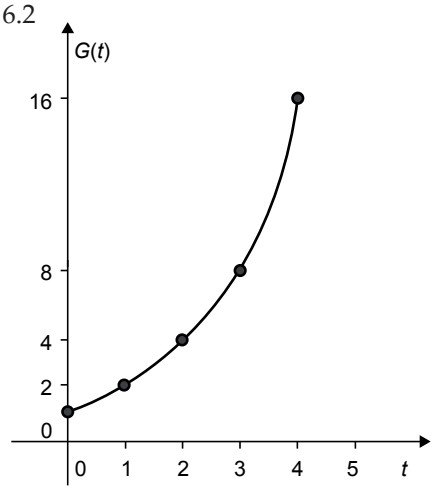
Terugkoppeling bij leereenheid 6

1 Uitwerking van de opgaven

6.1 **a** Na 10 minuten is er nog steeds 1 bacterie. En na 30 minuten zijn er nog steeds 2. De deling vindt pas plaats kort voor het einde van de intervallen van 20 minuten. Na 2 uur en 10 minuten zitten we 10 minuten na $t = 6$, dus dan zijn er nog 64 bacteriën. De grafiek ziet er als volgt uit:



6.2



6.3

tijdstip t (tijdseenheid 75.000 jaar)	3	4	5	6	7	8	9	10
gewicht $S(t)$ (in MBq)	50.000	25.000	12.500	6250	3125	1563	781	390

6.4 Voor $t > 10$ neemt de grafiek steeds verder af, maar blijft altijd groter dan 0.

6.5 Drie uur is gelijk aan 9 periodes van 20 minuten. Iedere 20 minuten is er een verdubbeling, dus na 3 uur is het gewicht $2^9 = 512$ keer zo groot.

6.6 Op tijdstip $t - 1$ is het gewicht half zo groot, dus $G(t - 1) = \frac{1}{2} \cdot G(t)$.

cc BY NC ND

6.7 Er volgt: $G(-1) = \frac{1}{2} \cdot G(0) = \frac{1}{2}$
$G(-2) = \frac{1}{2} \cdot G(-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
$G(-3) = \frac{1}{2} \cdot G(-2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$
$G(-6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot G(-3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$
$G(-9) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot G(-6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{512}$.

6.8 Voor $a = 0$ zou moeten gelden $1/a = 1/0$. Maar delen door 0 heeft geen betekenis, dus dat kunnen we niet toestaan.

6.9 Eigenschap 5 kan worden toegepast:
$$\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1n}{a^n}$$
Omdat $1^n = 1$ volgt nu:
$$\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

6.10 **a** Op $t = -1$ zal het gewicht $50/3 \approx 17$ mg geweest zijn. Op $t = -4$ was het gewicht $50/3^4 = 50/81 \approx 0{,}62$ mg.
b We moeten vermenigvuldigen met een factor 1/3 om het gewicht op $t = -1$ te krijgen en met $(1/3)^4 = 1/81$ om het gewicht op $t = -4$ te krijgen.
c $G(-1) = 50 \cdot 3^{-1} = 50 \cdot (1/3) \approx 17$ en $G(-4) = 50 \cdot 3^{-4} \approx 0{,}62$.

6.11 **a** In 1959 hebben we $t = -1$ en $A(-1) = 6{,}8 \cdot 1{,}0323^{-1} = 6{,}5872$.
In 1958 geldt: $A(-2) = 6{,}8 \cdot 1{,}0323^{-2} = 6{,}3811$.
In 1950 geldt: $A(-10) = 6{,}8 \cdot 1{,}0323^{-10} = 4{,}9482$.
b We delen steeds door 1,0323. Dat is hetzelfde als vermenigvuldigen met een factor 1/1,0323 = 0,9687.

6.12 **a** In 2010 waren er 50% meer inwoners, dus 9.000.000 + 4.500.000 = 13.500.000.
b In 1990 was het aantal 2/3 van het aantal in 2000, dus $2/3 \cdot 9.000.000 = 6.000.000$. In 1980 was het $2/3 \cdot 6.000.000 = 4.000.000$.
c Om tien jaar terug te gaan moet het aantal steeds met 2/3 worden vermenigvuldigd.
d De groeifactor is 3/2, ofwel in 10 jaar komt er de helft van het aantal bij. Dat is 50%.
e We berekenen: $A(-1) = 9.000.000 \cdot (\frac{3}{2})^{-1} = 9.000.000 \cdot \frac{2}{3} = 6.000.000$.
$A(-2) = 9.000.000 \cdot (\frac{3}{2})^{-2} = 9.000.000 \cdot (\frac{2}{3})^2 = 9.000.000 \cdot \frac{4}{9} = 4.000.000$.
Het tijdstip $t = -1$ correspondeert met het jaar 1990 en $t = -2$ correspondeert met 1980.

6.13 **a** Voor 2009 berekenen we $A(-1) = 10.000 \cdot 0{,}93^{-1} = 10.753$.
Voor 2000 berekenen we $A(-10) = 10.000 \cdot 0{,}93^{-10} = 20.662$.
b We delen steeds door 0,93. Dat is hetzelfde als vermenigvuldigen met een factor 1/0,93 = 1,0753.

6.14 We vinden:
$G(1/20) = 2^{1/20} = 1{,}0353$
$G(1/4) = 2^{1/4} = 1{,}1892$
$G(1/2) = 2^{1/2} = 1{,}4142$.

6.15 **a** De groeifactor is 48/3 = 16. Het functievoorschrift is dus $G(t) = 3 \cdot 16^t$.
b Omdat $\sqrt{16} = 4$, is de groeifactor over een halve dag gelijk aan 4. Het gewicht na een halve dag is dus $3 \cdot 4 = 12$. Nemen we opnieuw de wortel, nu van 4, dan vinden we de groeifactor over een kwart dag: die is 2. Het gewicht na een kwart dag is dus $3 \cdot 2 = 6$.
c Na 18 uur is het gewicht: $12 \cdot 2 = 24$.
d De groeifactor over 12 uur is 4, over 6 uur is ze 2.
e Als de groeifactor over 1 uur gelijk aan g, dan is de groei in 24 uur g^{24}. Dus $g^{24} = 16$. Dus $g = g^1 = \sqrt[24]{16} = 1{,}1225$.

6.16 **a** 37.500 is de helft van de tijdseenheid, en de groeifactor is $\frac{1}{2}$. De hoeveelheid radioactiviteit is dus:
$H(\frac{1}{2}) = 400.000(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = 282.842$.
b We moeten als exponent de fractie van de tijdseenheid nemen die hoort bij 1000 jaar, dus $t = 1000/75.000 = 1/75$. We vinden:
$H(1/75) = 400.000(\frac{1}{2})^{\frac{1}{75}} = 396.320$.
c De groeifactor over 1000 jaar is:
$(\frac{1}{2})^{\frac{1}{75}} = 0{,}9908$.

6.17 **a** $8^{\frac{1}{3}} = 2$, want $2^3 = 8$
b $9^{\frac{1}{2}} = 3$, want $3^2 = 9$
c $32^{\frac{1}{5}} = 2$, want $2^5 = 32$
d $8^{\frac{2}{3}} = (8^{\frac{1}{3}})^2 = 2^2 = 4$
e $9^{\frac{3}{2}} = (9^{\frac{1}{2}})^3 = 3^3 = 27$
f $32^{\frac{2}{5}} = (32^{\frac{1}{5}})^2 = 2^2 = 4$
g $4^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2}$
h $(\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{(\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$
i $(\frac{1}{4})^{-1\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{(\frac{1}{4})^{1\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{8}} = 8$

6.18 We voeren de berekeningen uit met een rekenmachine:
a $4^{\frac{1}{3}} = 1{,}5874$
b $10^{\frac{1}{2}} = 3{,}1623$
c $16^{\frac{1}{5}} = 1{,}7411$
d $4^{\frac{2}{3}} = 2{,}5198$
e $10^{\frac{3}{2}} = 31{,}6228$
f $16^{\frac{2}{5}} = 3{,}0314$
g $8^{-\frac{1}{2}} = 0{,}3536$
h $(\frac{1}{8})^{-\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{2}} = 2{,}8284$
i $(\frac{1}{8})^{-1\frac{1}{2}} = 22{,}6274$

6.19 Met een rekenmachine vinden we: $t = \sqrt{2} = 1{,}414214$ en $f(t) = 2^{\sqrt{2}} = 2{,}665144$.

cc BY NC ND

6.20 **a** We gaan na: $f(t-1) = 2^{t-1} = 2^t \cdot 2^{-1} = 2^t \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot f(t)$.
b We berekenen door steeds door 2 te delen:
$f(-5) = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32} = 0{,}03125$
$f(-6) = \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{64} = 0{,}01563$
$f(-7) = \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{128} = 0{,}00781$
$f(-8) = \frac{1}{128} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{256} = 0{,}00391$
$f(-9) = \frac{1}{256} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{512} = 0{,}00195$
$f(-10) = \frac{1}{512} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{1024} = 0{,}00098$
c De waarde van $f(t)$ wordt steeds kleiner als t steeds sterker negatief wordt, maar blijft wel groter dan 0. De grafiek gaat steeds dichter naar de x-as.

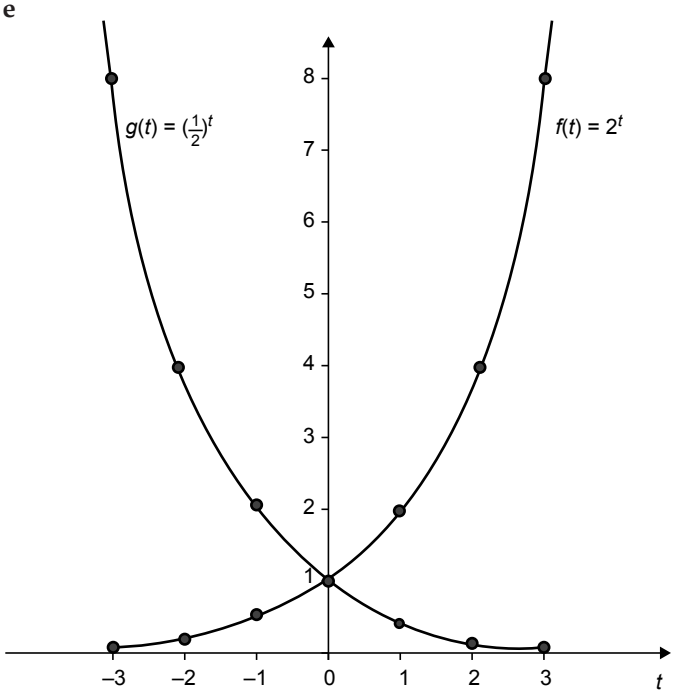
6.21 **a**

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
$(\frac{1}{2})^t$	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125

b

t	$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
$(\frac{1}{2})^t$	5,6569	2,8284	1,4142	0,7071	0,3536	0,1768

c Dezelfde waarden komen voor, alleen in de omgekeerde volgorde.
d Hoe groter t, hoe kleiner $g(t)$. Maar $g(t)$ blijft wel positief. Als t steeds sterker negatief wordt, worden de functiewaarden steeds groter.
e



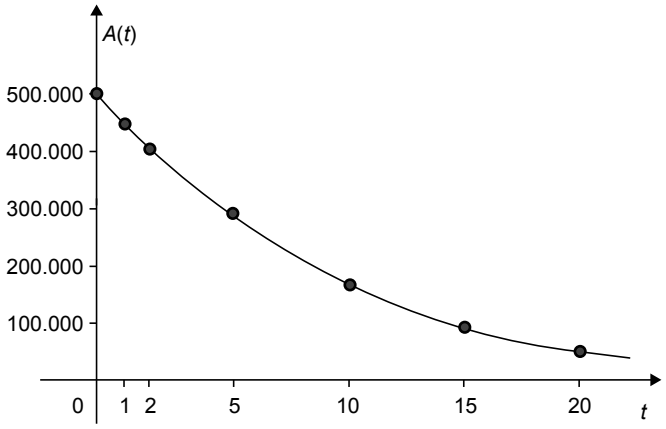
De grafieken van $f(t)$ en $g(t)$ zijn gespiegeld ten opzichte van de y-as.
f Het domein is $\mathbb{R}$. Het bereik is $\langle 0, \rightarrow \rangle$ en de asymptoot van $g(t)$ is de t-as, als t steeds groter wordt. De grafiek is overal dalend.

6.22 **a**

t	0	1	2	5	10	15	20
$A(t)$	500.000	450.000	405.000	295.245	174.339	102.946	60.788

b $A(\frac{1}{2}) = 500.000 \cdot (0,9)^{\frac{1}{2}} = 474.342$
$A(3\frac{1}{3}) = 500.000 \cdot (0,9)^{3\frac{1}{3}} = 351.920$

c



d Door ieder jaar heen varieert het gewicht met de seizoenen, dus de grafiek zal schommelen rondom de geschetste lijn.

6.23 Met de rekenmachine vinden we:
$2^{10} = 1024$
$2^{20} = 1.048.576$
$2^{30} = 1.073.741.824$
$2^{40} = 1.099.511.627.776$ of 1,099511628E12
$2^{50} = 1.125.899.906.842.642$ of 1,125899907E15

6.24 **a** $2^{20} = 1.048.576 > 1.000.000$
b $2^{40} = 2^{20} \cdot 2^{20} = (2^{20})^2$
c $2^{40} \approx (1.000.000)^2 \approx 1.000.000.000.000$; dit getal heeft 13 cijfers.

6.25 **a** In meters is de afstand: $149.600.000.000 = 1,496 \times 10^{11}$.
b De laatste cijfers zullen niet kloppen, immers de aarde heeft ook forse afmetingen en bovendien varieert de afstand tussen aarde en zon voortdurend.
c De af te leggen afstand is 149.600.000 kilometer. Delen door 2000 geeft: 74.800 uur. Dat zijn ongeveer 3100 dagen, ofwel ruim 8 $\frac{1}{2}$ jaar.

6.26 **a** Er staan 6 cijfers, dus 6 significante cijfers.
b In 2 mol zitten $2 \cdot 6,02214 \times 10^{23} = 12,04428 \times 10^{23} = 1,204428 \times 10^{24}$ deeltjes.
c In $\frac{1}{12}$ mol zitten $\frac{1}{12} \cdot 6,02214 \times 10^{23} = 0,501845 \times 10^{23} = 5,01845 \times 10^{22}$ deeltjes.

6.27 We berekenen:
$2^{-10} = \dfrac{1}{2^{10}} = 0,0009765625.$
$2^{-20} = \dfrac{1}{2^{20}} = 0,000000953674.$

cc BY NC ND

6.28 **a** Met een rekenmachine volgt: $2^{-300} = 4{,}90909347\text{E-}91$. Afgerond op 4 cijfers wordt dit: $2^{-300} = 4{,}909 \times 10^{-91}$.
b De rekenmachine geeft: $2^{-600} = 2{,}4099\text{E-}181$. De uitkomst is een afronding, dus niet exact gelijk.
c Er volgt: $(2^{-300})^2 = (4{,}90909347\text{E-}91)^2 = 2{,}4099\text{E-}181$.
d In vier significante cijfers vinden we $2^{-600} = 2{,}410 \times 10^{-181}$.

6.29 **a** Er geldt: 1 micrometer = 0,000001 m = 1×10^{-6} m. De lengte is dus $2{,}61 \times 10^{-6}$ m en de breedte is $0{,}63 \times 10^{-6} = 6{,}3 \times 10^{-7}$ m.
b Het volume is $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot (3{,}15 \times 10^{-5})^2 \cdot 2{,}61 \times 10^{-6}$
$= 3{,}14 \cdot (3{,}15)^2 \cdot 2{,}61 \times 10^{-16} = 81{,}3 \times 10^{-16} = 8{,}13 \times 10^{-15}$ m^3.

6.30 **a** De massa van een atoom is $1{,}99252 \times 10^{-23}$ g. Het aantal atomen vinden we met:
$$\frac{12}{1{,}99252 \times 10^{-23}} = 6{,}022524 \times 10^{23}$$
b De verhouding van de massa's van 1 molecuul HCl en C is 6,05252 staat tot 1,99252. De molmassa van zoutzuur is $(6{,}05252/1{,}99252) \cdot 12 = 36{,}4514$.
De massa van 3 mol HCl is $3 \cdot 36{,}4514 = 109{,}354$ gram.

6.31 **a** We vinden: $2^{-5} = 0{,}03125$, $2^{-10} = 0{,}0009765625$ en $2^{-20} = 0{,}000000953674$.
b 2^{-5} heeft 5 cijfers achter de komma.
c $2^{-10} = 2^{-5-5} = 2^{-5} \cdot 2^{-5} = (2^{-5})^2$.
d 2^{-10} heeft 10 cijfers achter de komma.
e $2^{-10} = 0{,}0009765625 = 9{,}765625 \times 10^{-4}$
$2^{-10} = \dfrac{1}{2^{10}} = \dfrac{1}{1024}$.

6.32 **b** $5^{-6} = \dfrac{1}{5^6} = \dfrac{1}{15.625}$
$6^{-5} = \dfrac{1}{6^5} = \dfrac{1}{7776}$
c $6^{-5} - 5^{-6} = 1{,}286 \times 10^{-4} - 6{,}4 \times 10^{-5}$
$= 1{,}286 \times 10^{-4} - 0{,}64 \times 10^{-4}$
$= 0{,}646 \times 10^{-4}$ (wetenschappelijke notatie)
$= 0{,}0000646$ (decimale breuk).

6.33 **a** $1200 = 1{,}2 \times 10^3$
$300{,}5 = 3{,}005 \times 10^2$
$0{,}0075 = 7{,}5 \times 10^{-3}$
b $1 \times 10^8 = 100.000.000$
$3{,}4 \times 10^5 = 340.000$
$6{,}7 \times 10^{-8} = 0{,}000000067$.

6.34 **a** $-45.000 = -4{,}5 \times 10^4$
$-0{,}00000000027 = -2{,}7 \times 10^{-10}$.
b $-1{,}2345678 \times 10^8 = -123456780$
$-1{,}2345678 \times 10^{-8} = -0{,}000000012345678$

2 Antwoorden op de zelftoets

1 **a** $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$.
b $64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2$.
c $4^{1\frac{1}{2}} = 4 \cdot 4^{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \sqrt{4} = 4 \cdot 2 = 8$.
d $27^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$.
e $64^{-\frac{5}{6}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[6]{64}\right)^5} = \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32}$.
f $4^{-2\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4^2 \cdot \sqrt{4}} = \dfrac{1}{16 \cdot 2} = \dfrac{1}{32}$.
g $(\frac{1}{27})^{1\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{27} \cdot \left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{27} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{27}} = \dfrac{1}{27} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{1}{27} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{81}$.
h $(\frac{9}{64})^{-\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{64}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{9}} = \dfrac{8}{3}$.
i $\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{2\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{9}{4}\right)^{2\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{9}{4}\right)^2 \sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{81}{16} \cdot \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \dfrac{81 \cdot 3}{16 \cdot 2} = \dfrac{243}{32}$.

2 **a** $\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}} = 1{,}1892$.
b $\sqrt[7]{7} = 7^{\frac{1}{7}} = 1{,}3205$.
c $\sqrt[5]{\frac{1}{5}} = 0{,}2^{\frac{1}{5}} = 0{,}7248$.

3 **a** De groeifactor over twee tijdseenheden is $\frac{1}{2}$.
b Voor die groeifactor g moet gelden: $g^2 = \frac{1}{2}$, dus $g = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}70710678$.
c $N(10) = 1 \cdot (\frac{1}{2})^5 = 0{,}03125$.

4 **a** Het verband is $g^3 = G$.
b $G(t) = 1{,}5 \cdot 8^t$
$G(\frac{1}{3}) = 1{,}5 \cdot 8^{\frac{1}{3}} = 1{,}5 \cdot 2 = 3$
$G(\frac{2}{3}) = 1{,}5 \cdot 8^{\frac{2}{3}} = 1{,}5 \cdot (8^{\frac{1}{3}})^2 = 1{,}5 \cdot 2^2 = 6$
$G(1\frac{1}{3}) = 1{,}5 \cdot 8^{1\frac{1}{3}} = 1{,}5 \cdot (8^{\frac{1}{3}})^4 = 1{,}5 \cdot 2^4 = 24$
$G(1\frac{2}{3}) = 1{,}5 \cdot 8^{1\frac{2}{3}} = 1{,}5 \cdot (8^{\frac{1}{3}})^5 = 1{,}5 \cdot 2^5 = 48$.

5 **a** 14,5 °C komt overeen met 273 + 14,5 = 287,5 K.
De uitgestraalde energie per m^2 is volgens de wet van Stefan Boltzman:
$5{,}67 \times 10^{-8} \times (287{,}5)^4$
Vermenigvuldigen we dit met de oppervlakte van de aarde, dan vinden we: $5{,}67 \times 10^{-8} \times (287{,}5)^4 \times \pi \times (12.756.000)^2 = 1{,}9802 \times 10^{17}$ W.
b Een jaar heeft $365 \times 24 \times 3600 = 31.536.000$ seconden, dus de uitgestraalde energie is $6{,}245 \times 10^{26}$ J.

cc BY NC ND

Terugkoppeling bij leereenheid 7

1 Uitwerking van de opgaven

7.1 **a** We berekenen een aantal waarden van $f(x) = x^3$ en zetten die in een tabel.

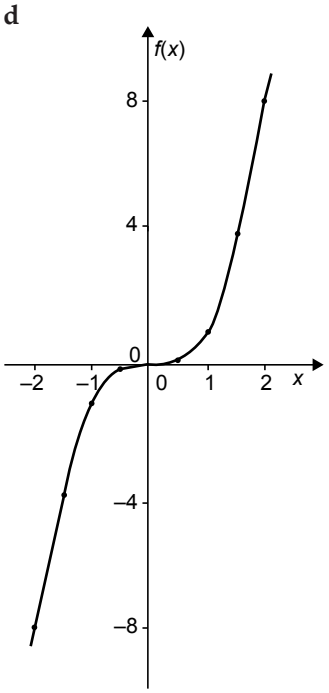
x	–10	–5	–3	–2	–1	0	1	2	3	5	10
$f(x)$	–1000	–125	–27	–8	–1	0	1	8	27	125	1000

b De symmetrie is dat links en rechts van 0 de functiewaarden gelijk zijn met tegengesteld teken.

c

x	$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$
$f(x)$	$-3\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$3\frac{3}{8}$

d



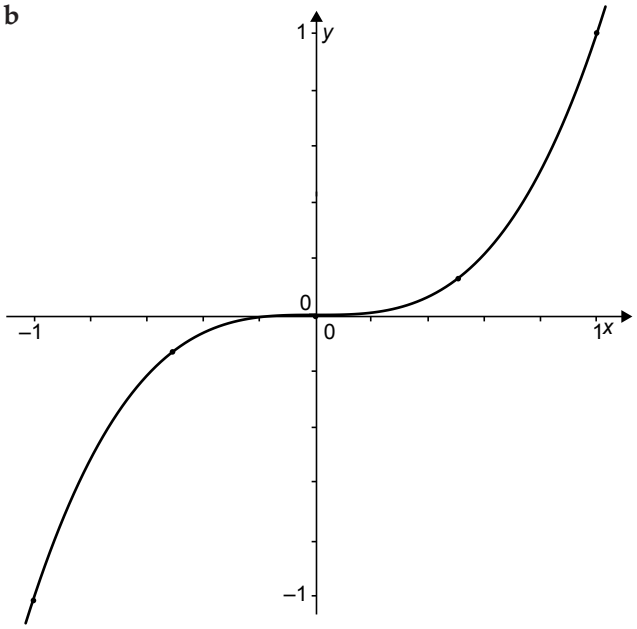
e Van $x < -2$ gaat de grafiek sterk naar beneden en van $x > 2$ sterk naar boven.

7.2 **a** We berekenen de waarden en zetten die in een tabel.

x	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$
$f(x)$	$-\frac{1}{64}$	$-\frac{1}{1000}$	$-\frac{1}{1.000.000}$	$\frac{1}{1.000.000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{64}$

cc BY NC ND

b



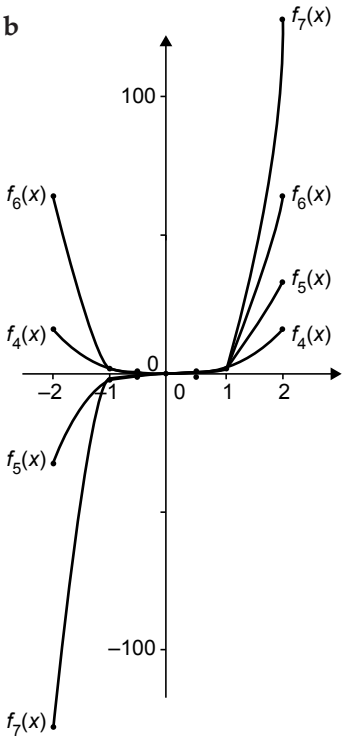
c De grafiek lijkt dicht bij (0, 0) horizontaal te lopen.

7.3 **a** De eenheid van $\rho \cdot A \cdot v^3$ is kg/m^3 · m^2 · (m/s)^3 = kg · m^2/s^3 en dat is gelijk aan Watt.
b We moeten de formule $E \approx \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^3 \cdot Eff$ opnieuw invullen, nu met $v = 20$. Dit geeft:
$E \approx \frac{1}{2} \cdot 1,3 \cdot 500 \cdot 20^3 \cdot 0,5 \approx 1300\,\text{kW}$
c De formule wordt
$E(v) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^3 \cdot Eff = \frac{1}{2} \cdot 1,3 \cdot 500 \cdot v^3 \cdot 0,5 = 162,5 \cdot v^3$
d $E(12) = 162{,}5 \cdot 12^3 = 280.800$. Dit is ongeveer 8 keer zoveel als het resultaat in onderdeel a.
Als het 2 keer zo hard gaat waaien neemt de energieopbrengst met een factor 8 toe.

7.4 **a**

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$f_4(x)$	16	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{10.000}$	0	$\frac{1}{10.000}$	$\frac{1}{16}$	1	16
$f_5(x)$	-32	-1	$-\frac{1}{32}$	$\frac{-1}{100.000}$	0	$\frac{1}{100.000}$	$\frac{1}{32}$	1	32
$f_6(x)$	64	1	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{1.000.000}$	0	$\frac{1}{1.000.000}$	$\frac{1}{64}$	1	64
$f_7(x)$	-128	-1	$-\frac{1}{128}$	$\frac{-1}{10.000.000}$	0	$\frac{1}{10.000.000}$	$\frac{1}{128}$	1	128

b



c De functies $f_4(x)$ en $f_6(x)$ hebben hetzelfde verloop als $f_2(x) = x^2$. En de functies $f_5(x)$ en $f_7(x)$ hebben hetzelfde verloop als $f_3(x) = x^3$.
d De functie $f_{10}(x) = x^{10}$ zal hetzelfde verloop hebben als $f_2(x) = x^2$, want de macht is even. De functie $f_{2013}(x) = x^{2013}$ zal hetzelfde verlopen als $f_3(x) = x^3$, want de macht is oneven.

7.5 **a** Alle grafieken gaan door (0, 0) en (1, 1).
b Alle functies met even u gaan door punt (–1, 1).
c Alle functie met oneven u gaan door punt (–1, –1).

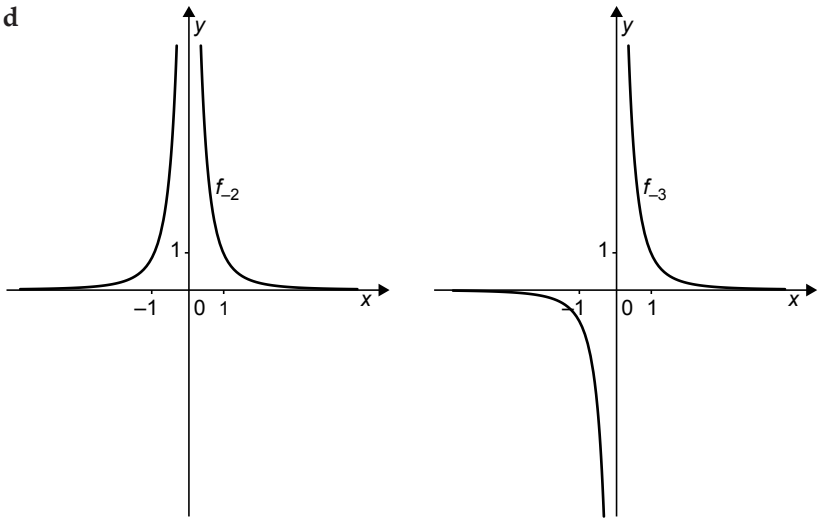
7.6 **a** In de volgende tabel staat 'BN' voor 'Bestaat Niet'.

x	-10	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	2	10
x^{-2}	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{4}$	1	4	100	BN	100	4	1	$\frac{1}{4}$	
x^{-3}	$-\frac{1}{1000}$	$-\frac{1}{8}$	-1	-8	-1000	BN	1000	8	1	$\frac{1}{8}$	
x^{-4}	$\frac{1}{10.000}$	$\frac{1}{16}$	1	16	10.000	BN	10.000	16	1	$\frac{1}{16}$	
x^{-5}	$-\frac{1}{100.000}$	$-\frac{1}{32}$	-1	-32	$-1.000.000$	BN	$1.000.000$	32	1	$\frac{1}{32}$	

b $f_{-2}(x) = x^{-2}$ is symmetrisch t.o.v. de y-as, ofwel $f_{-2}(x) = f_{-2}(-x)$.
$f_{-3}(x) = x^{-3}$ is symmetrisch t.o.v. de oorsprong, het punt (0, 0) ofwel $f_{-3}(-x) = -f_{-3}(x)$.
c Als we f_{-2} bekijken dan is de $f_{-2}(x)$ gedefinieerd voor alle waarden van x behalve 0; het domein is dus $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$. Voor alle x in het domein is $f_{-2}(x)$ positief; het bereik is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
De asymptoten van f_{-2} zijn de x-as en de (positieve y-as).
Ook het domein van f_{-3} is $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$. Het bereik van f_{-3} is eveneens $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$.
De asymptoten van f_{-3} zijn de x-as en de y-as.

BY NC ND

d



e De grafiek van f_{-4} verloopt globaal hetzelfde als de grafiek van f_{-2}, en de grafiek van f_{-5} verloopt globaal hetzelfde als die van f_{-3}.

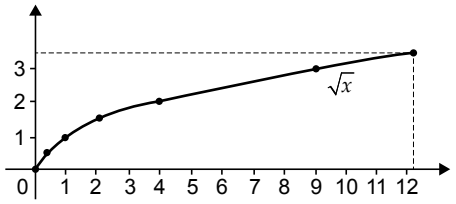
7.7 Alle functies $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ en $f(x) = x^n$ hebben het punt (1, 1) gemeenschappelijk.

7.8 **a**

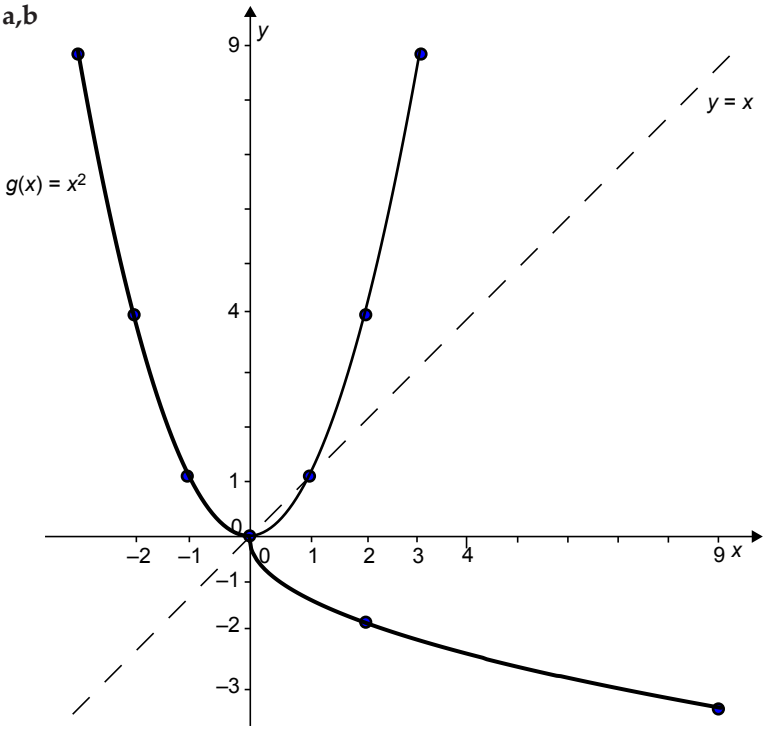
x	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{7}{9}$	4	$6\frac{1}{4}$	$7\frac{1}{9}$	9	$11\frac{1}{9}$	$12\frac{1}{4}$
$\sqrt{x}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{2}{3}$	2	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{2}{3}$	3	$3\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{2}$

Bijvoorbeeld: $\sqrt{7\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{9}} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

b $f(x) = \sqrt{x}$ op het domein $\left[0, 12\frac{1}{4}\right]$ heeft bereik $\left[0, 3\frac{1}{2}\right]$.



7.9 **a,b**



c De grafiek die verkregen wordt door de grafiek van x^2 voor $x \le 0$ te spiegelen in de lijn $y = x$ heeft functievoorschrift $f(x) = -\sqrt{x}$.

7.10 **a** $2x - 3 \ge 0 \Leftrightarrow 2x \ge 3 \Leftrightarrow x \ge 1\frac{1}{2}$.

b Het domein van $f(x) = \sqrt{2x-3}$ is dus $\left[1\frac{1}{2}, \rightarrow\right\rangle$.

c $3 - 2x \ge 0 \Leftrightarrow 3 \ge 2x \Leftrightarrow 1\frac{1}{2} \ge x$.

Het domein van $g(x) = \sqrt{3-2x}$ is dus $\left\langle \leftarrow, 1\frac{1}{2}\right]$.

7.11 **a**

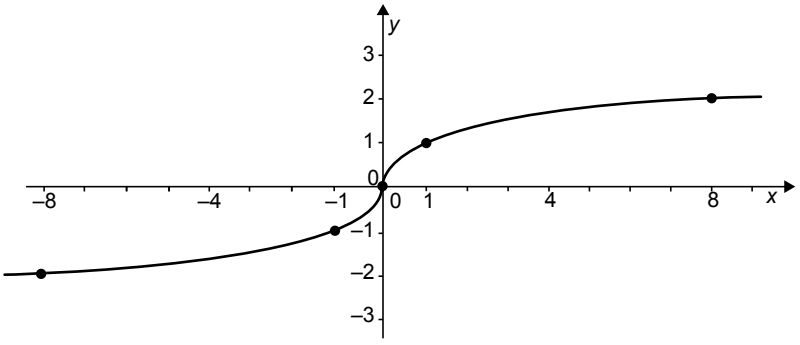
x	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{27}{64}$	1	$2\frac{10}{27}$	$3\frac{3}{8}$	$4\frac{17}{27}$	$5\frac{23}{64}$	$6\frac{859}{1000}$	8	$15\frac{5}{8}$
$\sqrt[3]{x}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{2}{3}$	$1\frac{3}{4}$	$1\frac{9}{10}$	2	$2\frac{1}{2}$

Bijvoorbeeld: $\sqrt[3]{5\frac{23}{64}} = \sqrt[3]{\frac{343}{64}} = \frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$.

7.12 $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} = -1\frac{1}{2}$

$\sqrt[3]{-1} = -1$ $\quad$ $\sqrt[3]{-8} = -2$

7.13



Het bereik van $f(x) = \sqrt[3]{x}$ op het interval [–8, 8] is [–2, 2].

cc BY NC ND

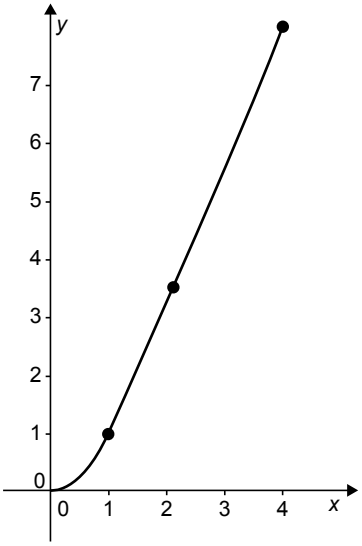
7.14 Omdat delen door 0 onmogelijk is, kan 0 niet als invoerwaarde voor functies van de vorm $f(x) = x^{-\frac{m}{n}}$ dienen.
Het domein van deze functies is dus $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

7.15 **a** $f(x) = x^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{x}\right)^3$

x	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{9}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	$6\frac{1}{4}$	9
$f(x)$	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{8}{125}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{8}{27}$	1	$3\frac{3}{8}$	8	$15\frac{5}{8}$	27

Bijvoorbeeld: $(2\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{2\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$

b

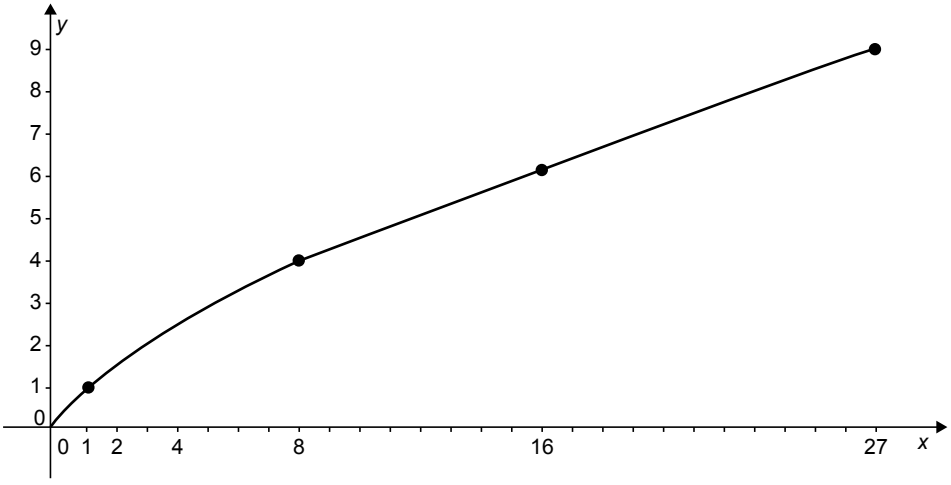


7.16 **a** $g(x) = x^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$

x	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{8}{125}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{8}{27}$	1	$3\frac{3}{8}$	8	$15\frac{5}{8}$	27
$g(x)$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{9}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	$6\frac{1}{4}$	9

Bijvoorbeeld: $(3\frac{3}{8})^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

b



7.17 **a** Als we de tabellen uit de opgaven 7.15a en 7.16a met elkaar vergelijken, dan zien we dat de tabellen dezelfde rijen bevatten, maar in omgekeerde volgorde.
b Als (a, b) een punt is op de grafiek van $f(x)$ dan is (b, a) een punt op de grafiek van $g(x)$.

7.18 **a** Grafiek *b* hoort bij $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$. (Vergelijk deze met de grafiek in opgave 7.16b.)
Dus grafiek *a* hoort bij de functie $g(x) = x^{\frac{2}{5}}$.
b $f(0,64) = \left(\sqrt{0,64}\right)^5 = \left(\sqrt{\frac{64}{100}}\right)^5 = \left(\frac{8}{10}\right)^5 = \frac{32.768}{100.000} = 0,32768.$
Dus het punt (0,64; 0,32768) ligt op de grafiek van *f*.
c De grafieken *a* en *b* in figuur 7.10 zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$. Dus als (a, b) een punt is op de grafiek van $f(x)$ dan is (b, a) een punt op de grafiek van $g(x)$. Hieruit volgt dat (0,32768; 0,64) op de grafiek van *g* ligt.

7.19 Gegeven is $g(x) = x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^3}$
a,c

x	0,01	0,16	0,25	0,49	4	9	16	100
$g(x)$	1000	$\frac{1000}{64}$	$\frac{1000}{125}$	$\frac{1000}{343}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{1000}$

b Voor $x > 4$ daalt de grafiek van *g* naar 0; de grafiek nadert 0 zo dicht als u maar wilt, maar bereikt 0 niet.
d Voor $x < 0,5$ (x vanaf rechts naar 0 naderend) stijgt de grafiek van *g* naar grote hoogte. Hoe dichter x bij 0 komt hoe hoger de grafiek.
e De x-as is een horizontale asymptoot van *g* voor $x > 4$, en de y-as is een verticale asymptoot van *g* voor $x < 0,5$.
f Het domein van *g* is $\langle 0, \rightarrow \rangle$, evenals het bereik.

7.20 **a** $x^{\frac{1}{2}} = 100 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 100 \Leftrightarrow x = 10.000.$
b $x^{\frac{3}{2}} = 1000 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^3 = 1000 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 10 \Leftrightarrow x = 100.$

7.21 **a** Voor een koe en een muis is gegeven dat de evenredigheidsconstanten gelijk zijn, dus geldt dat
$G_{\text{koe}} : G_{\text{muis}} = V_{\text{koe}} : V_{\text{muis}} = 500.000 : 50 = 10.000 : 1$, en
$A_{\text{koe}} : A_{\text{muis}} = W_{\text{koe}} : W_{\text{muis}} = V_{\text{koe}}^{\frac{2}{3}} : V_{\text{muis}}^{\frac{2}{3}} = 10.000^{\frac{2}{3}} : 1^{\frac{2}{3}} \approx 464 : 1.$
b Twee hondenrassen hebben dezelfde evenredigheidsconstanten. Stel $G_1 : G_2 = 8 : 1$, dan is $W_1 : W_2 = G_1^{\frac{2}{3}} : G_2^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} : 1 = 4 : 1.$
c Het warmteverlies bij grotere dieren is relatief kleiner dan bij kleinere dieren.

7.22 $A = 94 \cdot x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{94} \cdot A \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{94}} \cdot \sqrt{A}.$
Dus volgt $V = 60 \cdot x^3 = 60 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{94}} \cdot \sqrt{A}\right)^3 = 60 \cdot \left(\frac{1}{94}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot A^{\frac{3}{2}}.$
Ofwel in de formule $V = p \cdot A^r$ is $r = \frac{3}{2}$ en $p = 60 \cdot \left(\frac{1}{94}\right)^{\frac{3}{2}}$.

BY NC ND

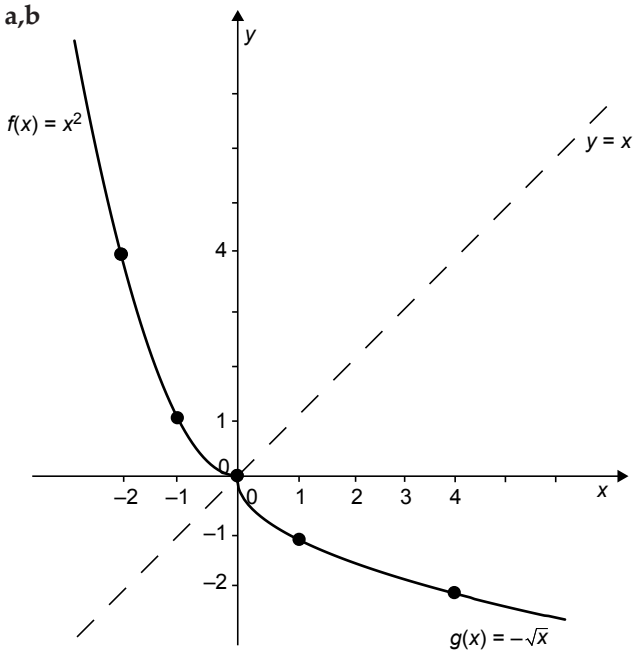
7.23 **a** De inhoud van een kubus met ribbe x is $V = x \cdot x \cdot x = x^3$.
b Elk zijvlak van deze kubus heeft oppervlak $A = x \cdot x = x^2$.
c Als $V = 8$ cm^3, dan is $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = 2$.
Het grondvlak heeft oppervlak $x^2 = 4$ cm^2.
d Als $V = v$ cm^3, dan is $x^3 = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{v}$.
Het grondvlak heeft oppervlak $x^2 = \left(\sqrt[3]{v}\right)^2 = v^{\frac{2}{3}}$.
e Als $A = 9$ cm^2, dan is $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \sqrt{9} \Leftrightarrow x = 3$.
De inhoud van de kubus is dan $x^3 = 3^3 = 27$ cm^3.
f Als $A = a$ cm^2, dan is $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$.
De inhoud van de kubus is dan $x^3 = \left(\sqrt{a}\right)^3 = a^{\frac{3}{2}}$.

7.24 $M = c \cdot G^{\frac{3}{4}}$ met M in kcal/dag en G in kg.
Bij benadering geldt $c = 100$ (kg)$^{-\frac{3}{4}}$ kcal/dag.
a Als $G = 63$ kg, dan is $M = 100 \cdot 63^{\frac{3}{4}} \approx 2236$ kcal/dag.
b $G_{\text{kat}} : G_{\text{muis}} = 100 : 1$
$M_{\text{kat}} : M_{\text{muis}} = G_{\text{kat}}^{\frac{3}{4}} : G_{\text{muis}}^{\frac{3}{4}} = 100^{\frac{3}{4}} : 1^{\frac{3}{4}} \approx 31{,}6 : 1$.
Het metabolisme van een kat is dus bijna 32 keer sneller dan dat van een muis.

7.25 De inverse functie van $f(x) = x^5$ is $g(x) = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$, want $f(g(x)) = f(x^{\frac{1}{5}}) = (x^{\frac{1}{5}})^5 = x$ en $g(f(x)) = (x^5)^{\frac{1}{5}} = x$. De inverse functie van $f(x) = x^{-5}$ is $g(x) = x^{-\frac{1}{5}}$.

7.26 Als we $f(x) = x^2$ beperken tot het interval $\langle \leftarrow, 0]$, dan is $f(-2) = 4$ en $f(-\sqrt{5}) = 5$.

7.27 **a,b**



c $g(x) = -\sqrt{x}$.
d Als (a, b) op de grafiek van f ligt, dan is $b = a^2$, ofwel met $a \leq 0$ is dus $a = -\sqrt{b}$. Met andere woorden (b, a) ligt op de grafiek van g.

7.28 **a** $f(x) = x^4$ met domein $[0, \to\rangle$ heeft inverse functie $g(x) = \sqrt[4]{x}$, eveneens met domein $[0, \to\rangle$.
b $g(x) = -\sqrt[6]{x}$ met domein $[0, \to\rangle$ is inverse van $f(x) = x^6$ met domein $\langle \leftarrow, 0]$.
c $f(0)$ bestaat niet, dus op dit domein heeft f geen inverse functie.
Nemen we als domein $\langle 0, \to\rangle$ dan is de inverse van $f(x) = x^{-6}$ gelijk aan $g(x) = x^{-\frac{1}{6}} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}$ met domein $\langle 0, \to\rangle$.
d $f(x) = x^7$ met domein $\mathbb{R}$ heeft inverse $g(x) = \sqrt[7]{x}$ met domein $\mathbb{R}$. De functie g bestaat immers ook voor $x \leq 0$.
e $f(0)$ bestaat niet, dus op dit domein heeft f geen inverse functie.
Nemen we als domein $\langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \to\rangle$ dan is de inverse van $f(x) = x^{-7}$ gelijk aan $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[7]{x}}$ met domein $\langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \to\rangle$.
f Niet alleen $f(0)$ bestaat niet, maar ook is $f(-a) = f(a)$ voor $a \neq 0$. Dus $f(x) = x^{-8}$ op domein $\mathbb{R}$ heeft geen inverse.

7.29 **a** $A = \dfrac{94}{60^{\frac{2}{3}}} \cdot (202,5)^{\frac{2}{3}} = 94 \cdot \left(\dfrac{405}{120}\right)^{\frac{2}{3}} = 94 \cdot \left(\dfrac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$
$= 94 \cdot \dfrac{27^{\frac{2}{3}}}{8^{\frac{2}{3}}} = 94 \cdot \dfrac{3^2}{2^2} = 94 \cdot \dfrac{9}{4} = 211,5.$

b $V = \dfrac{60}{94^{\frac{3}{2}}} \cdot (211,5)^{\frac{3}{2}} = 60 \cdot \left(\dfrac{423}{188}\right)^{\frac{3}{2}} = 60 \cdot \left(\dfrac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$
$= 60 \cdot \dfrac{9^{\frac{3}{2}}}{4^{\frac{3}{2}}} = 60 \cdot \dfrac{3^3}{2^3} = 60 \cdot \dfrac{27}{8} = 202,5.$

c $A = \dfrac{94}{60^{\frac{2}{3}}} \cdot V^{\frac{2}{3}}$ als de inhoud van de balk v m^3 is.
$V = \dfrac{60}{94^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\dfrac{94}{60^{\frac{2}{3}}} \cdot v^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{60}{94^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\dfrac{94^{\frac{3}{2}}}{\left(60^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(v^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right) = \dfrac{60}{94^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\dfrac{94^{\frac{3}{2}}}{60} \cdot v\right) = v.$

d $V = \dfrac{60}{94^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\dfrac{47}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = 60 \cdot \left(\dfrac{47}{2,94}\right)^{\frac{3}{2}} = 60 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = 60 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = 7\tfrac{1}{2}.$

e $A = \dfrac{94}{60^{\frac{2}{3}}} \cdot \left(\dfrac{15}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = 94 \cdot \left(\dfrac{15}{2,60}\right)^{\frac{2}{3}} = 94 \cdot \left(\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = 94 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 23\tfrac{1}{2}.$

f $V = \dfrac{60}{94^{\frac{3}{2}}} a^{\frac{3}{2}}$ als de oppervlakte van de balk a cm^2 is.
$A = \dfrac{94}{60^{\frac{2}{3}}} \cdot \left(\dfrac{60}{94^{\frac{3}{2}}} \cdot a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \dfrac{94}{60^{\frac{2}{3}}} \cdot \left(\dfrac{60^{\frac{2}{3}}}{\left(94^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}} \cdot \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\right) = \dfrac{94}{60^{\frac{2}{3}}} \cdot \left(\dfrac{60^{\frac{2}{3}}}{94} \cdot a\right) = a.$

7.30 **a** De functie $f(x) = x$ heeft zichzelf als inverse functie.
b $f(x) = 3x$ heeft als inverse functie $g(x) = \frac{1}{3}x$.

cc BY NC ND

7.31 **a** $x^{\frac{5}{6}} = 32 \Leftrightarrow x = 32^{\frac{6}{5}} = \left(\sqrt[5]{32}\right)^6 = 2^6 = 64.$

b $x^{-\frac{3}{4}} = 125 \Leftrightarrow x = (125)^{-\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{125}\right)^{-4} = 5^{-4} = \frac{1}{625}.$

c $5x^4 = 125 \Leftrightarrow x^4 = 25 \Leftrightarrow x = +\sqrt[4]{25}$ of $x = -\sqrt[4]{25}$
$\Leftrightarrow x = (25)^{\frac{1}{4}} = (5^2)^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ of $x = -\sqrt{5}.$

d $4x^{-3} = 2 \Leftrightarrow x^{-3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(2\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \approx 1,2599.$

e $3x^{\frac{3}{5}} - 1 = 80 \Leftrightarrow 3x^{\frac{3}{5}} = 81 \Leftrightarrow x^{\frac{3}{5}} = 27 \Leftrightarrow x = \left(27\right)^{\frac{5}{3}} = 3^5 = 243.$

f $3x^{-\frac{4}{5}} = 27^{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow 3x^{-\frac{4}{5}} = 3^4 = 81 \Leftrightarrow x^{-\frac{4}{5}} = 27$
$\Leftrightarrow x = 27^{-\frac{5}{4}} = (\frac{1}{27})^{\frac{5}{4}} \approx 0,0162.$

7.35 $H = 1000 \cdot G^{-\frac{1}{4}}$ slagen/min, G in gr.

a Verwachte hartritme van een hond van 10 kg = 10.000 gr is
$H = 1000 \cdot (10.000)^{-\frac{1}{4}} = 1000 \cdot (10^4)^{-\frac{1}{4}} = \frac{1000}{10} = 100.$

b Een dier met H = 200 slagen/min heeft een gewicht G waarvoor geldt dat $200 = 1000G^{-\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = G^{-\frac{1}{4}} \Leftrightarrow G = \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} = 5^4 = 625$ gr.

7.36 Voor de energieopbrengst E moet gelden $10,4 < E < 2533$.

$$E = 0,1625v^3 \Leftrightarrow \frac{E}{0,1625} = v^3 \Leftrightarrow \left(\frac{E}{0,1625}\right)^{\frac{1}{3}} = v.$$

Als E = 10,4, dan is $v = \left(\frac{10,4}{0,1625}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$ m/s.

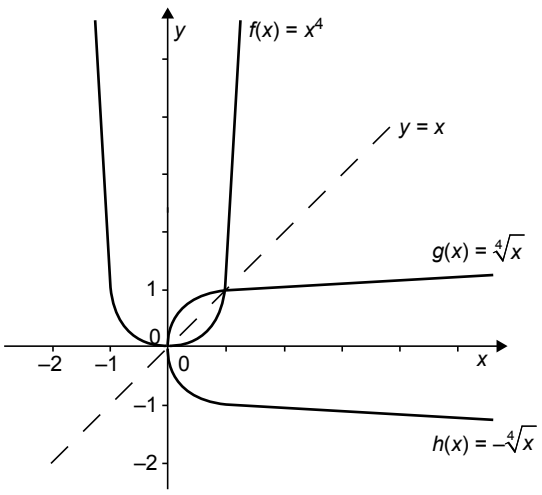
Als E = 2533, dan is $v = \left(\frac{2533}{0,1625}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 25$ m/s.

De windmolen draait dus bij windsnelheden v m/s waarbij $4 < v < 25$.

2 Antwoorden op de zelftoets

1 **a,b** Zie figuur 7.9.
De inverse functie $f(x) = x^3$ is $g(x) = \sqrt[3]{x}$.
c Als het domein van f wordt beperkt tot [–2, 2], dan is het domein van g gelijk aan [–8, 8].

2 **a,b,c**



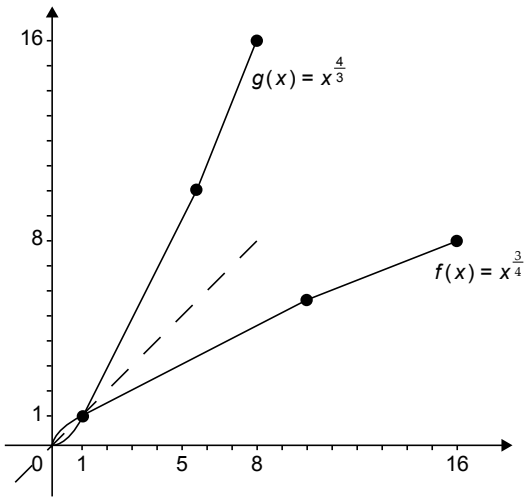
d De inverse van $f(x) = x^4$ op domein $\left[0, \rightarrow\right\rangle$ is $g(x) = \sqrt[4]{x}$.
De inverse van $f(x) = x^4$ op domein $\left\langle \leftarrow, 0\right]$ is $h(x) = -\sqrt[4]{x}$.

3 **a**

x	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	1	4	$5\frac{1}{16}$	10	16
$f(x)=x^{\frac{1}{4}}$	0	$\frac{1}{8}$	0,5946	1	2,8284	$3\frac{3}{8}$	5,6234	8

b $f(x)=27 \Leftrightarrow x^{\frac{3}{4}}=27 \Leftrightarrow x=27^{\frac{4}{3}}=3^4=81$
$f(x)=2 \Leftrightarrow x^{\frac{3}{4}}=2 \Leftrightarrow x=2^{\frac{4}{3}}=2\sqrt[3]{2} \approx 2,5198$

c,d



De inverse functie van $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$ is $g(x)=x^{\frac{4}{3}}$.

4 **a** $H=178\cdot G^{-\frac{1}{4}}$ slagen/minuut met G in kg.
Dus als $G=4000$, dan is $H=178\cdot(4000)^{-\frac{1}{4}} \approx 22$.

b $50=178\cdot G^{-\frac{1}{4}} \Leftrightarrow G^{-\frac{1}{4}}=\frac{50}{178} \Leftrightarrow G=\left(\frac{50}{178}\right)^{-4} \approx 160$.

c $L=c\cdot G^{\frac{1}{4}}$
Kies L in minuten, dan het aantal hartslagen gedurende het leven van een zoogdier gelijk aan $H\cdot L=178\cdot G^{-\frac{1}{4}}\cdot c\cdot G^{\frac{1}{4}}=178c$ en dat is onafhankelijk van het gewicht G.

d Het totale aantal hartslagen is ongeveer $1{,}5\cdot 10^9$. Dus $1{,}5\cdot 10^9 = 178\cdot c$, ofwel $c=8427\cdot 10^3$ min/kg$^{\frac{1}{4}}$.

cc BY NC ND