Verzamelingenleer

Leereenheid 5

Verzamelingenleer

INTRODUCTIE

Deze leereenheid behandelt basisbegrippen uit de verzamelingenleer. Deze gebruiken we om begrippen precies te maken, zodat computers met begrippen kunnen redeneren. De term 'verzameling', en de verwante term 'collectie', kennen we uit het dagelijkse leven. Een museum kan een mooie collectie schilderijen van Rembrandt bezitten. Iemand kan een uitgebreide verzameling postzegels bezitten. Een instituut kan een archief hebben dat bestaat uit een verzameling historisch belangrijke foto's. We zullen zien dat het wiskundige begrip 'verzameling' vrij nauw aansluit bij deze alledaagse betekenis.

Verzamelingen zijn tot de 'standaardtaal' van de wiskunde en informatica zijn gaan behoren. Ze worden voortdurend gebruikt om nieuwe begrippen te introduceren, resultaten te formuleren, definities exact te maken, enzovoort. Enige kennis van de verzamelingenleer is dan ook onmisbaar, zowel voor wiskundigen als informatici.

LEERDOELEN

Na het bestuderen van deze leereenheid wordt verwacht dat u:

- het begrip verzameling kunt omschrijven
- de volgende begrippen uit de verzamelingenleer kent en kunt toepassen en de bijbehorende notaties kunt hanteren: element en geen element van, gelijkheid van verzamelingen, de lege verzameling, (echte) deelverzameling
- eenvoudige expliciete en impliciete definities van verzamelingen kunt begrijpen en zelf kunt geven
- de machtsverzameling van een verzameling kunt bepalen
- doorsneden, verenigingen en verschil van verzamelingen kunt bepalen
- het complement van een verzameling ten opzichte van een universum kunt bepalen
- kunt nagaan of verzamelingen disjunct zijn
- het verschil tussen eindige en oneindige verzamelingen kent
- de notaties kent voor de deelverzamelingen van de positieve en de negatieve elementen in de oneindige getalverzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$
- eenvoudige eigenschappen van verzamelingen kunt bewijzen
- verzamelingen met behulp van Venndiagrammen kunt representeren.

Studeeraanwijzingen

In deze leereenheid gebruiken we de term 'object' zoals gangbaar is in het Nederlands, in tegenstelling tot eerdere leereenheden.

FIGUUR 5.1 Een verzameling Rembrandts

De studielast van deze leereenheid bedraagt circa 8 uur.

LEERKERN

1 Verzamelingen

Een verzameling in de alledaagse betekenis van het woord heeft als kenmerkende eigenschap dat er een aantal van elkaar te onderscheiden objecten zijn samengenomen tot één geheel. We kunnen bijvoorbeeld in een museum alle schilderijen van Rembrandt samennemen tot de verzameling Rembrandts van dat museum. Merk op dat er niet meer dan één unieke 'Nachtwacht van Rembrandt' bestaat. Het is in de wereld van de kunst juist van groot belang dat de echte unieke Rembrandt onderscheiden kan worden van bijvoorbeeld een reproductie of een 'perfecte' kopie in verf. Iets dergelijks geldt ook voor een postzegelverzameling waarbij alle individuele postzegels die een verzamelaar in bezit heeft tot één geheel is samengenomen. Iedere verzamelaar zal er naar streven (zo veel mogelijk) verschillende voorwerpen of objecten in de verzameling te hebben ('dubbele' zijn er om te ruilen). De omschrijving van het begrip 'verzameling' in de wiskunde sluit hier goed bij aan.

Verzameling

Een *verzameling* is het resultaat van het samennemen tot één geheel van een aantal onderscheidbare objecten.

Deze omschrijving van verzameling geven we met opzet niet de status van een definitie, omdat zij eigenlijk nogal vaag is. Voordat we hier wat meer over zeggen, kijken we eerst naar wat voorbeelden.

Er zijn voorbeelden te over van verzamelingen die we in het dagelijkse leven tegenkomen, zoals de eerder genoemde verzameling Rembrandts of een postzegelverzameling. Een voorbeeld waar we wat vaker op terug zullen komen, is dat van een alfabet en ook de taal die op dat alfabet gebaseerd wordt. Hierbij valt te denken aan ‘natuurlijke talen’, zoals Nederlands, Grieks of Russisch, maar ook aan ‘formele talen’, zoals de programmeertalen Java, C of Haskell.

А а	Ж ж	Н н	Ф ф	Ы ы
б Б	З з	О о	Х х	Ь ь
В в	И и	П п	Ц ц	э Э
Г г	Й й	Р р	Ч ч	ю Ю
Д д	К к	С с	Ш ш	Я я
Е е	Л л	Т т	Щ щ	
Ё ё	М м	У у	Ъъ	

FIGUUR 5.2 De verzameling letters uit het Russische alfabet

In een alfabet nemen we een aantal ‘letters’ die in een bepaalde taal gebruikt worden, samen tot één geheel. Het is duidelijk dat de objecten die we samennemen, van elkaar te onderscheiden zijn: er worden geen volkomen identieke letters opgenomen. Een alfabet is dus inderdaad een verzameling. Hoe een taal als verzameling is op te vatten, zullen we in voorbeeld 5.5 zien.

Volgorde speelt geen rol

Objecten allemaal verschillend

Op twee belangrijke aspecten van een verzameling vestigen we de aandacht. Allereerst is het duidelijk uit onze omschrijving, dat de volgorde waarin we de objecten samennemen, geen enkele rol speelt. Het is wel zo handig om het alfabet van a tot en met z op te noemen, maar we krijgen geen ander alfabet als we een andere volgorde van de letters aanhouden. Verder moet het in een verzameling gaan om ‘onderscheidbare’ objecten, met andere woorden, objecten in een verzameling moeten op één of andere manier van elkaar verschillen. In een alfabet wordt niet tweemaal de letter a opgenomen.

Indexnotatie

Typisch wordt een verzameling met een hoofdletter aangeduid, zoals $A, B, C, \ldots$. Ook wordt vaak voor een concrete verzameling een suggestieve benaming gekozen, zoals P voor een postzegelverzameling of NL voor de verzameling letters in het Nederlands. Deze voorkeur voor suggestieve namen is erg sterk. Zijn er meerdere postzegelverzamelingen in het spel, dan kunnen we toch vasthouden aan de letter P door er een zogenaamde index aan toe te voegen: P_1, P_2, P_3, enzovoort. We noemen dit de *indexnotatie*.

De objecten die in een verzameling zijn samengenomen, worden de elementen van die verzameling genoemd. De elementen van een postzegelverzameling zijn de individuele postzegels. De elementen van een alfabet zijn de letters waaruit dat alfabet bestaat. Een element geven we meestal aan met een kleine letter. Ook hier kiezen we suggestieve letters. Voor een element uit een verzameling P kiezen we bijvoorbeeld de letter p.

Hebben we meer elementen uit P nodig, dan is weer de indexnotatie te gebruiken. Om handig over verzamelingen en elementen te kunnen spreken, voeren we de volgende begrippen en notaties in.

Element van
Notatie $a \in A$
Geen element van
Notatie $a \notin A$

Definitie 5.1: Element van verzameling. Zij A een verzameling. We zeggen dat a een element is van A, als a één van de objecten van A is. Dit noteren we met $a \in A$. We zeggen dat a geen element is van A, als a niet één van de objecten van A is. Dit noteren we met $a \notin A$.

Het symbool $\in$ is te zien als een gestyleerde letter 'e', wat de eerste letter is van 'element'. Als $a \in$A , dan zeggen we ook wel dat 'a tot A behoort'. Evenzo zeggen we dat a niet tot A behoort als $a \notin A$.

VOORBEELD 5.1
α, spreek uit 'alpha', is de Griekse letter a

Laat $\mathbb{NL}$ de verzameling zijn waarin alle letters van het Nederlandse alfabet zijn samengenomen. Dan geldt dat $q \in \mathbb{NL}$. Daarentegen behoort de Griekse letter α niet tot $\mathbb{NL}$, ofwel $\alpha \notin \mathbb{NL}$.

OPGAVE 5.1
Laat K de verzameling zijn waarin alle klinkers van het Nederlandse alfabet zijn samengenomen. Geldt er dat $m \in K$? En $u \in K$? En $i \notin K$?

Kardinaliteit
Notatie: $|A|$

Definitie 5.2: Kardinaliteit van een verzameling. Het aantal elementen in een verzameling wordt *kardinaliteit* genoemd. We noteren de kardinaliteit van een verzameling A als $|A|$. Voor een eindige verzameling A is $|A|$ dus een getal.

VOORBEELD 5.2

De verzameling $A = \{1, 2, 3\}$ bevat 3 elementen. Dus: $|A| = 3$. Het Nederlandse alfabet bevat 26 letters (trema's buiten beschouwing gelaten). Dat betekent dat $|\mathbb{NL}| = 26$.

OPGAVE 5.2
Wat is $|K|$? Oftewel: wat is de kardinaliteit van de verzameling van alle klinkers van het Nederlandse alfabet?

Expliciete definitie

Een veelgebruikte manier om een verzameling aan te geven, is het simpelweg opsommen van alle elementen. Dit wordt de *expliciete definitie* van een verzameling genoemd. Een expliciete definitie van de verzameling $\mathbb{NL}$ zou bestaan uit het opsommen van alle 26 letters van het Nederlandse alfabet. Voor het opsommen van de elementen van een verzameling voeren we een aparte notatie in. Zijn in een verzameling bijvoorbeeld de elementen a, b, c en d samengenomen, dan wordt die verzameling als $\{a, b, c, d\}$ genoteerd. We zeggen dan dat de verzameling 'uit de elementen a, b, c en d bestaat'.

Notatie van verzameling: $\{\dots\}$

Let op!
Verzameling in een verzameling

Verzamelingen kunnen zelf ook als object beschouwd worden en dus als elementen van een nieuwe verzameling dienen.

VOORBEELD 5.3

Laat $\mathbb{NL}$ en G de verzamelingen zijn bestaande uit alle letters van het

Nederlandse respectievelijk het Griekse alfabet. De verzameling $\{NL, G\}$ heeft dan als elementen NL en G. (Let goed op het onderscheid tussen NL als verzameling en NL als element van $\{NL, G\}$).

OPGAVE 5.3
Laat K de verzameling zijn bestaande uit alle klinkers van het Nederlandse alfabet en G de verzameling bestaande uit alle letters van het Griekse alfabet. Beschouw nu $\{a, \alpha, K, \{K, G\}, \{a, b, c, o\}\}$.

a Is G een element van deze verzameling?
b Is $\{K, G\}$ een element van deze verzameling?
c Is K een element van deze verzameling?
d Is $\{a, \alpha\}$ een element van deze verzameling?
e Is o een element van deze verzameling? Is o een element van K?
f Geef een expliciete definitie van K.

Gelijkheid van verzamelingen

Notatie $A = B$

Notatie $A \neq B$

Willen we de verzameling $\{a, b, c, d\}$ een aparte naam geven, zeg A, dan schrijven we $A = \{a, b, c, d\}$. Met het gelijkteken '$=$' bedoelen we natuurlijk dat A uitsluitend uit de elementen a, b, c en d bestaat en geen andere elementen bevat. Algemener volgt er uit de omschrijving van het begrip verzameling dat twee verzamelingen A en B gelijk zijn als ze dezelfde elementen bevatten, notatie $A = B$. Twee verzamelingen A en B zijn dan ongelijk als we in één van beide verzamelingen minstens één element kunnen aangeven dat niet tot de andere verzameling behoort. Dit noteren we met $A \neq B$.

Zij K de verzameling bestaande uit alle klinkers in het Nederlandse alfabet, M de verzameling bestaande uit alle medeklinkers in het Nederlandse alfabet en $A = \{a, e, i, o, u\}$. Dan geldt dat $K = A$. Verder geldt $M \neq A$, omdat $b \in M$, maar $b \notin A$.

OPGAVE 5.4
Zij $B = \{a, b, d, r\}$. Geldt er dat $B = \{d, r, a, b\}$? En $B = \{b, d, \{r\}, a\}$? Motiveer uw antwoorden.

Zoals we al eerder opmerkten, is de volgorde van de elementen in een verzameling niet van belang. De verzamelingen $\{b, a, r, d\}$ en $\{d, r, a, b\}$ zijn bijvoorbeeld gelijk. Ook moeten de objecten in een verzameling van elkaar verschillen. Het is dus niet toegestaan om elementen meerdere keren op te sommen en het is daarom onjuist om bijvoorbeeld van de verzameling $\{b, a, a, r, d\}$ te spreken.

OPGAVE 5.5
In een spel bestaat een 'beurt' uit het twee maal achter elkaar met een geldstuk gooien. We noemen de twee verschillende kanten van het geldstuk 'kop' en 'munt'. Na elke keer gooien noteren we een K of een M, al naar gelang de kop, dan wel de munt zichtbaar is. Het resultaat van een beurt (2 worpen) noemen we de 'uitkomst' van de beurt.

a Een deelnemer aan dit spel gooit de eerste keer kop en de tweede keer munt. Is het correct om deze beurt weer te geven door $\{K, M\}$?
b Bij dit spel zijn er voor een deelnemer vier mogelijke uitkomsten van een beurt. Welke zijn dit? Is het correct om te spreken van de verzameling van alle mogelijke uitkomsten?

Een verzameling aangeven door alle elementen op te sommen, is niet zo handig als deze veel elementen heeft. Het opsommen van alle landen op aarde is bijvoorbeeld een vervelende taak. In plaats hiervan kan een verzameling door middel van een definiërende voorwaarde gegeven worden. We schrijven dan bijvoorbeeld:

$\{x \mid x \text{ is een land op aarde}\}$.

Impliciete definitie

We bedoelen hiermee de verzameling bestaande uit alle (objecten) x waarvoor geldt dat x een land op aarde is. Dit wordt de *impliciete definitie* van een verzameling genoemd. In het algemeen is deze van de vorm $\{x \mid P(x)\}$, waarbij $P(x)$ een uitspraak is die de objecten van de verzameling vastlegt. In ons voorbeeld is dit: 'x is een land op aarde'.

Het gebruik van het symbool x is niet essentieel. We hadden bijvoorbeeld even goed kunnen schrijven $\{\alpha \mid \alpha \text{ is een land op aarde}\}$ of $\{@ \mid @ \text{ is een land op aarde}\}$. In feite is stilzwijgend al gebruik gemaakt van impliciete definities, zonder daarbij de notatie $\{x \mid P(x)\}$ te gebruiken. Als we het bijvoorbeeld hebben over 'de verzameling $\mathbb{NL}$ bestaande uit alle letters van het Nederlandse alfabet', dan is dit een impliciete definitie die we kunnen noteren als $\mathbb{NL} = \{\alpha \mid \alpha \text{ is een letter van het Nederlandse alfabet}\}$. De uitspraak '$\alpha$ is een letter van het Nederlandse alfabet' is dan $P(\alpha)$.

OPGAVE 5.6

a Geef twee voorbeelden uit de voorafgaande tekst waarin stilzwijgend een impliciete definitie werd gebruikt. Geef die impliciete definities ook in de vorm $\{x \mid P(x)\}$.

b Geef een expliciete definitie van $\{x \mid x \text{ is een woord in de zin 'de zin van deze zin ontgaat me'}\}$.

Eindige verzameling
Aantal elementen
Notatie $|V|$
Oneindige verzameling
Natuurlijke getallen

Tot nu toe hebben we alleen gewerkt met verzamelingen die we, als we dat werkelijk wilden, konden opsommen. Met andere woorden, we konden steeds tellen hoeveel elementen tot zo'n verzameling behoorden. Zulke verzamelingen noemen we *eindig* en het is duidelijk wat we in dit geval bedoelen met het *aantal elementen* van die verzameling (waarbij we een beroep doen op het intuïtief aanwezige idee van 'tellen'). Is V een eindige verzameling, dan geven we het aantal elementen van V aan met $|V|$. Dus $|\{a, b, c\}| = 3$. Belangrijke verzamelingen in de wiskunde zijn *oneindig*, dat wil zeggen, we kunnen niet tellen hoeveel elementen de verzameling bevat. We roepen een aantal voorbeelden van oneindige verzamelingen in herinnering. Allereerst de verzameling $\mathbb{N}$ van *natuurlijke getallen*:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Gehele getallen

Als we hieraan de getallen $-1, -2, -3, \ldots$ toevoegen, dan ontstaat de verzameling $\mathbb{Z}$ van *gehele getallen*:

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Rationale getallen

Laten we ook breuken toe, dan spreken we van de verzameling $\mathbb{Q}$ van *rationale getallen*. De schrijfwijze van een rationaal getal is niet uniek; zo zijn bijvoorbeeld $1/2$, $2/4$ en $5/10$ drie verschillende notaties voor hetzelfde rationale getal.

Niet alle getallen die ‘van nature’ optreden, behoren tot $\mathbb{Q}$. Een vierkant met zijden van lengte 1 heeft een diagonaal van lengte $\sqrt{2}$. Een cirkel met straal 1 heeft oppervlakte π. Er kan aangetoond worden dat $\sqrt{2}$ en π niet tot $\mathbb{Q}$ behoren. Men zou dus kunnen zeggen dat $\mathbb{Q}$ ‘gaten vertoont’ of ‘niet volledig is’. Worden ‘alle gaten in $\mathbb{Q}$ opgevuld’, dan ontstaat de verzameling $\mathbb{R}$ van *reële getallen*.

Reële getallen

We gaan ervan uit dat u met voorgaande getalverzamelingen bekend bent en dat u vlot met getallen uit deze verzamelingen kunt rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, tot gehele machten verheffen en delen). We gaan dan ook niet verder in op de precieze definities van deze verzamelingen.

OPGAVE 5.7
Beschouw de verzameling $V = \{a, b, \{a, b\}, \{a\}\}$.
a Som de elementen op waaruit V bestaat. Wat is $|V|$?
b Zij $W = \{\{a\}, \{a, \{a, b\}\}, b\}$. Geldt er dat $V = W$? En $|V| = |W|$? Motiveer uw antwoorden.

OPGAVE 5.8
Een getal in $\mathbb{Z}$ heet even als het deelbaar is door 2 en oneven als dit niet het geval is. Geef een impliciete definitie van de verzameling van alle even getallen en van de verzameling van alle oneven getallen. Is een expliciete definitie van deze verzamelingen mogelijk?

OPGAVE 5.9
In een lottospel wordt een bak met 30 ballen gebruikt waarop de cijfers 1 tot en met 30 zijn aangebracht. Bij een ‘trekking’ voor de lotto worden in één keer 6 ballen uit de bak gehaald.
a Is het correct om na een trekking te spreken van de verzameling $\{x \mid x \text{ is een getal dat in de trekking voorkomt}\}$?
b Iemand noteert gedurende een jaar alle trekkingen als een rij van 6 getallen. Is het correct om te spreken van de verzameling van alle trekkingen uit dat jaar?

2 Deelverzamelingen

Uit de beschrijvingen van bijvoorbeeld $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$ zien we dat ieder element van $\mathbb{N}$ ook tot $\mathbb{Z}$ behoort. De verzameling $\mathbb{N}$ kan dus opgevat worden als een deel van de verzameling $\mathbb{Z}$. Daarmee is $\mathbb{N}$ een deelverzameling van $\mathbb{Z}$.

Deelverzameling
Notatie $A \subset B$

Definitie 5.3: Deelverzameling. Laat A en B twee verzamelingen zijn, waarbij voor iedere $x \in A$ geldt dat $x \in B$. Dan heet A een deelverzameling van B. We noteren dit als $A \subset B$.

OPGAVE 5.10

a Geldt er dat $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ of dat $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}$? En geldt er dat $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$? Motiveer uw antwoorden.
b Geef vier verschillende deelverzamelingen van $V = \{\$, 7, \{@\}\}$.

Bevat in

Als $A \subset B$ en $B \subset A$, dan volgt $A = B$

Is A een deelverzameling van B, dan zeggen we ook wel: *A is bevat in B*. Als geldt dat $A \subset B$ en geldt bovendien dat $B \subset A$, dan behoort ieder element van A tot B en ieder element van B behoort ook tot A. De verzamelingen A en B bevatten dan dezelfde elementen en zijn dus gelijk. Kort geformuleerd: als $A \subset B$ en $B \subset A$, dan geldt dat $A = B$. Dit wordt vaak gebruikt om te bewijzen dat twee verzamelingen gelijk zijn. Het voordeel is dat een bewijs hiermee een duidelijke structuur krijgt, omdat het in twee delen wordt gesplitst, die ieder op zich eenvoudiger te bewijzen zijn.

In de definitie van 'deelverzameling' wordt het speciale geval $A = B$ niet uitgesloten. Wil men dit per se uitsluiten, dan wordt het begrip 'echte deelverzameling' gebruikt.

Echte deelverzameling

Definitie 5.4: Echte deelverzameling. Laat A en B twee verzamelingen zijn. Dan heet A een echte deelverzameling van B als $A \subset B$, maar $A \neq B$.

Voor dit begrip voeren we geen aparte notatie in. Om aan te tonen dat een deelverzameling A van B een echte deelverzameling van B is, is het voldoende om één element aan te geven dat wel tot B behoort, maar niet tot A.

VOORBEELD 5.4

Laat $\mathbb{NL}$ de verzameling letters uit het Nederlandse alfabet zijn en K de verzameling klinkers in het Nederlandse alfabet. Dan is $\{a, e, i, o, u\}$ een deelverzameling van K, maar geen echte deelverzameling. De verzameling K is wel een echte deelverzameling van $\mathbb{NL}$, immers $K \subset \mathbb{NL}$ en $K \neq \mathbb{NL}$ omdat $b \in \mathbb{NL}$, maar $b \notin K$.

OPGAVE 5.11

Geef aan waarom $\mathbb{N}$ een echte deelverzameling is van $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ een echte deelverzameling is van $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ een echte deelverzameling is van $\mathbb{R}$.

OPGAVE 5.12

Geef acht verschillende echte deelverzamelingen van $\{a, b, \{a, b\}, \{a\}\}$.

Machtsverzameling

Powerset

In bovenstaande opgave blijkt dat een verzameling meerdere deelverzamelingen heeft. De verzameling van alle deelverzamelingen van een verzameling A noemen we de *machtsverzameling* van A of de *powerset* van A.

Definitie 5.5: machtsverzameling. De machtsverzameling of powerset van een verzameling A is de verzameling van alle deelverzamelingen van A, inclusief de lege verzameling $\emptyset$ en A zelf.

Wat de lege verzameling precies is, komen we iets verderop nog op terug. Voor nu volstaat te weten dat $\emptyset$ een element is van iedere machtsverzameling. Er zijn verschillende notaties voor de machtsverzameling van een verzameling A. De twee meestvoorkomende notaties zijn $\mathcal{P}(A)$ en 2^A.

OPGAVE 5.13

a Wat is de machtsverzameling van $\{1, 2\}$?
b Hoeveel elementen heeft de machtsverzameling van $\{1, 2\}$?
c Wat is de machtsverzameling van de verzameling $\{1, 2, 3\}$?
d Hoeveel elementen heeft de machtsverzameling van $\{1, 2, 3\}$?

In voorbeeld 5.5 wordt het begrip deelverzameling gebruikt om een definitie te geven van de term 'formele taal'. In de loop van deze leereenheid komen we diverse malen op dit voorbeeld terug.

VOORBEELD 5.5
Formele taal

Σ, spreek uit 'sigma', is de Griekse hoofdletter *s*

Taal

Veel 'natuurlijke' talen, zoals het Nederlands, zijn gebaseerd op een alfabet. De letters uit het alfabet worden gecombineerd tot woorden en daarna tot zinnen. Ook bij formele talen, zoals de programmeertalen Java of Haskell, is het uitgangspunt een alfabet. Een alfabet kan daarbij iedere eindige verzameling zijn die minstens één element bevat. Zo'n alfabet wordt meestal genoteerd met Σ. De elementen van Σ worden symbolen genoemd. Deze symbolen kan men combineren tot eindige rijtjes die men 'symboolrijtjes', 'woorden' of 'strings' over het alfabet Σ noemt. Voor het Nederlands geldt dat $\Sigma = \{a, b, c, \dots, z\}$ en de symbolen zijn in dit geval de letters `a` t/m `z`. Woorden over dit alfabet zijn bijvoorbeeld `baard`, `bard`, `drab`, en ook `ddbbraaaz`. Kiezen we bijvoorbeeld $\Sigma = \{0, 1\}$, dan kan men hiermee woorden maken als $0, 1, 00, 01, 10, 11, 1101100$. Gegeven een alfabet Σ, dan noteren we de verzameling van alle mogelijke woorden over het alfabet Σ met Σ^*. Nemen we als voorbeeld voor Σ het Nederlandse alfabet, dat we verder met *NL* zullen aangeven, dan behoren de woorden `baard`, `bard`, `drab` en `ddbbraaaz` allemaal tot $\Sigma^* = NL^*$. Omdat we altijd door kunnen blijven gaan met het toevoegen van nieuwe letters, kunnen we oneindig veel woorden maken. Denk bijvoorbeeld aan de oneindig veel woorden `a`, `aa`, `aaa`, `aaaa`, enzovoort, in NL^*. De verzameling NL^* heeft dus oneindig veel elementen. Let er wel op dat een woord in NL^* (per definitie) uit een eindig aantal symbolen bestaat. Het oneindige rijtje `aaaa...` behoort dus niet tot NL^*. Kiezen we bijvoorbeeld weer $\Sigma = \{0, 1\}$, dan bestaat $\Sigma^* = \{0, 1\}^*$ uit alle mogelijke eindige rijtjes van nullen en enen. We zien uit het voorbeeld van het Nederlandse alfabet *NL*, dat NL^* zeer veel woorden bevat die wij niet tot de Nederlandse taal zouden rekenen (zoals `ddbbraaaz`). De Nederlandse taal vormt dus een echte deelverzameling van NL^*. Bovendien moeten in een taal als het Nederlands de woorden in een bepaalde volgorde staan: er gelden allerlei grammaticaregels. Een natuurlijke taal als het Nederlands is nooit helemaal in regels vast te leggen. Bij formele talen als Python of

Java is dit wel mogelijk (en noodzakelijk). Hoe dit precies in zijn werk gaat, wordt in de theorie van de formele talen uit de doeken gedaan. De basis is steeds een alfabet Σ en de verzameling Σ^* van alle mogelijke eindige rijtjes symbolen uit Σ. Een 'taal L over het alfabet Σ' wordt dan heel algemeen gedefinieerd als een deelverzameling van Σ^*. Meestal zal L een echte deelverzameling van Σ^* zijn en bijvoorbeeld door middel van grammaticaregels worden opgebouwd.

L van het Engelse language

OPGAVE 5.14
Het uitleesvenster van een zekere zakrekenmachine heeft 8 velden beschikbaar voor de getallen 0 t/m 9. Daarnaast is er een veld voor een decimaalpunt en een veld voor een minteken. Een typisch getal dat weergegeven kan worden is -3.1415927. De verzameling van alle getallen die weergegeven kunnen worden, willen we als een taal L definiëren.

a Geef het alfabet Σ waarmee deze taal gedefinieerd kan worden.
b Geef een aantal voorbeelden van elementen in Σ^*. Is L een echte deelverzameling van Σ^*? Is L een eindige of oneindige verzameling?

Positieve gehele getallen

Voor een aantal veelgebruikte deelverzamelingen van $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ voeren we aparte notaties in. Allereerst definiëren we de *positieve gehele getallen* $\mathbb{Z}^+$ door:

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\},$$

Negatieve gehele getallen

en de *negatieve gehele getallen* $\mathbb{Z}^-$ door:

$$\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \ldots\}.$$

0 is noch positief, noch negatief

Positieve rationale getallen

Uit deze definities volgt in het bijzonder dat het getal 0 noch tot $\mathbb{Z}^+$ behoort, noch tot $\mathbb{Z}^-$, met andere woorden, 0 is noch positief, noch negatief. Net zo onderscheiden we de *positieve rationale getallen* $\mathbb{Q}^+$:

$$\mathbb{Q}^+ = \{p/q \mid p/q \in \mathbb{Q} \text{ met } p \in \mathbb{Z}^+ \text{en } q \in \mathbb{Z}^+\},$$

en de negatieve rationale getallen $\mathbb{Q}^-$:

$$\mathbb{Q}^- = \{-p/q \mid p/q \in \mathbb{Q} \text{ met } p \in \mathbb{Z}^+ \text{ en } q \in \mathbb{Z}^+\}.$$

In de beschrijving van $\mathbb{Q}^+$ en $\mathbb{Q}^-$ wordt meteen handig gebruik gemaakt van het feit dat $0 \notin \mathbb{Z}^+$. We noemen de elementen in $\mathbb{Z}^+$ wel de positieve elementen in $\mathbb{Z}$ en de elementen in $\mathbb{Z}^-$ de negatieve elementen in $\mathbb{Z}$. Hetzelfde geldt voor $\mathbb{Q}^+$ en $\mathbb{Q}^-$.

Groter dan
Kleiner dan

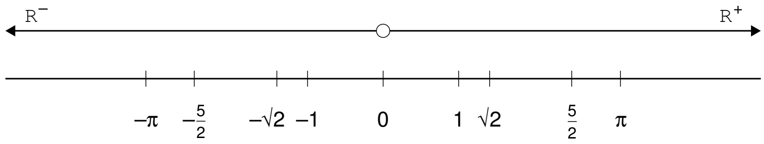
In $\mathbb{R}$ gebruiken we de symbolen $>$ ('*groter dan*') en $<$ ('*kleiner dan*') om de positieve en de negatieve elementen aan te geven. De positieve en negatieve reële getallen $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^-$ worden dan gegeven door:

Positieve reële getallen
Negatieve reële getallen

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ en } x > 0\}, \\ \mathbb{R}^- &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ en } x < 0\}. \end{aligned}$$

$\geq$, ten minste
$\leq$, ten hoogste

Naast de symbolen $>$ en $<$ gebruiken we ook de symbolen $\geq$ voor 'ten minste' (groter dan of gelijk aan) en $\leq$ voor 'ten hoogste' (kleiner dan of gelijk aan).



FIGUUR 5.3 De getallenlijn en de positieve en negatieve reële getallen

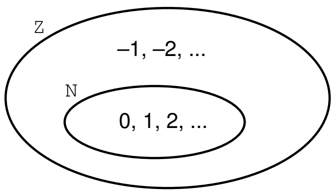
In figuur 5.3 zijn de getallen uit $\mathbb{R}$ (en dus ook uit $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Z}$) met behulp van de 'getallenlijn' gevisualiseerd; de verzameling getallen rechts van 0 is $\mathbb{R}^+$, de verzameling getallen links van 0 is $\mathbb{R}^-$.

Met $>, <, \geq$ en $\leq$ kunnen allerlei andere deelverzamelingen van $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ handig beschreven worden. Zo kunnen we de verzameling van alle gehele getallen groter dan -30 en kleiner dan of gelijk aan 30 weergeven met $\{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ en } -30 < x \leq 30\}$. We zullen dit meestal afkorten tot $\{x \in \mathbb{Z} \mid -30 < x \leq 30\}$. In het algemeen wordt een impliciete definitie van de vorm $\{x \mid x \in A \text{ en } P(x)\}$ afgekort tot $\{x \in A \mid P(x)\}$. Dan kan $\mathbb{R}^+$ bijvoorbeeld beschreven worden met $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Strikte voorschriften over het gebruik van dit soort verschillende notaties zijn er niet.

OPGAVE 5.15

a Geef een expliciete definitie van $\{x \in \mathbb{N} \mid -5 < x \leq 6\}$.
b Geef een impliciete definitie van de verzameling getallen in $\mathbb{Z}$ die oneven zijn en groter dan 6.
c Geef een impliciete definitie van $\{2, 4, 6, 8, \ldots, 16, 18\}$.
d Geef een impliciete definitie van de verzameling getallen in $\mathbb{Q}^+$ waarvan het kwadraat kleiner is dan 2. Is een expliciete definitie van deze verzameling mogelijk?

Het werken met verzamelingen, zoals het kunnen volgen of het zelf kunnen geven van een bewijs, wordt vereenvoudigd door verzamelingen visueel weer te geven. Een verzameling tekenen we dan meestal als een ovaal. Geldt er voor verzamelingen A en B dat $A \subset B$, dan wordt het ovaal voor A geheel binnen het ovaal voor B getekend. Voor concrete verzamelingen is het vaak handig om enige 'typische' elementen in de ovalen te noteren. In figuur 5.4 zien we dit voor de situatie $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.



FIGUUR 5.4 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ visueel weergegeven

Venndiagram

Zulke visuele representaties van verzamelingen heten *Venndiagrammen*, vernoemd naar de Engelse logicus John Venn. In de volgende paragraaf zullen we andere varianten van Venndiagrammen introduceren.

OPGAVE 5.16

a Waarom is $\mathbb{Z}^+$ een echte deelverzameling van $\mathbb{N}$? Teken ook een Venndiagram van deze situatie en geef daarin een aantal typische elementen aan.

b Is $\{x \mid x \text{ is een oneven getal in } \mathbb{Z}^+\}$ een echte deelverzameling van $\{x \mid x \text{ is een oneven getal in } \mathbb{N}\}$? Teken weer een Venndiagram van deze situatie met een aantal typische elementen.

OPGAVE 5.17

Beschouw de taal L die bestaat uit alle eindige rijtjes van nullen en enen met een even aantal enen.

a Welk alfabet Σ wordt hier gebruikt?

b Laat zien dat L een echte deelverzameling is van Σ^*.

c Geef een impliciete definitie van L.

OPGAVE 5.18

a Geef een impliciete definitie van de verzameling van reële getallen waarvan de derde macht groter is dan π.

b Geef een expliciete definitie van $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 50\}$.

c Geef een impliciete definitie van $\{1, -1, 3, -3, 5, -5, \ldots, 15, -15\}$.

OPGAVE 5.19

Bewijs het volgende: als $A \subset B$ en $B \subset C$, dan geldt $A \subset C$. Teken ook een Venndiagram van deze situatie.

3 Operaties op verzamelingen

Verzamelingen kunnen op verschillende manieren met elkaar gecombineerd worden. De eenvoudigste daarvan zullen we in deze paragraaf invoeren, te zamen met de corresponderende Venndiagrammen.

3.1 DOORSNEDE EN LEGE VERZAMELING

Als we ons de vraag stellen welke elementen in $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ positief zijn, dan vragen we in feite welke elementen er zowel tot A als tot $\mathbb{Z}^+$ behoren. Dat zijn precies de elementen 1 en 2 en we zeggen dan dat deze elementen de doorsnede van de verzamelingen A en $\mathbb{Z}^+$ vormen.

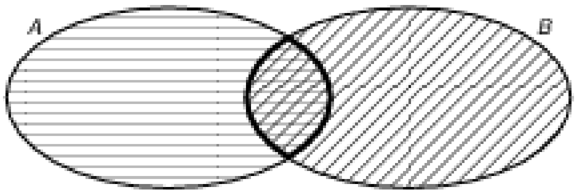
Doorsnede
Notatie $A \cap B$

Definitie 5.6: Doorsnede. Laat A en B twee verzamelingen zijn. De *doorsnede* van A en B is de verzameling die bestaat uit de elementen x die zowel tot A als tot B behoren. De doorsnede van A en B noteren we met $A \cap B$.

VOORBEELD 5.6

Zij $A = \{0,1,2,3,4\}$ en $B = \{3,4,5\}$. Dan geldt $A \cap B = \{3,4\}$ en $A \cap \mathbb{N} = A$.

De doorsnede van A en B correspondeert in een Venndiagram met het overlappende gedeelte van de ovalen voor A en B.



FIGUUR 5.5 Het dubbel gearceerde gebied correspondeert met $A \cap B$

In figuur 5.5 is verzameling A horizontaal gearceerd, en B diagonaal. De doorsnede is nu het gebied dat zowel horizontaal als diagonaal is gearceerd en vet-omlijnd is weergegeven. Voor voorbeeld 5.6 moeten we 3 en 4 in het gearceerde middengebied zetten, 0, 1 en 2 in het linkergebied en 5 in het rechtergebied.

OPGAVE 5.20
Bepaal de doorsneden van de volgende verzamelingen.
a $E = \{-8,-6,-4,-2,2,4,6\}$ en $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 20\}$.
b $A = \{a,b,0,\alpha\}$ en $B = \{\alpha,\{a\},b,\{0,a\}\}$.
c $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}^+$.

Notatie $\wedge$

De omslachtige uitdrukking 'de elementen x die zowel tot A als tot B behoren' zullen we meestal vervangen door het veel kortere '$x \in A$ en $x \in B$'. Bovendien is het gebruikelijk om het voegwoord 'en' te vervangen door het symbool $\wedge$. De doorsnede van A en B kunnen we dan als volgt beschrijven: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$. We zullen het symbool $\wedge$ ook gebruiken om de doorsnede van twee impliciet gedefinieerde verzamelingen $\{x \mid P(x)\} \cap \{x \mid Q(x)\}$ te noteren als $\{x \mid P(x) \wedge Q(x)\}$. Zo schrijven we in plaats van $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\} \cap \{x \mid x \text{ is even}\}$ voortaan ook $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5 \wedge x \text{ is even}\}$.

OPGAVE 5.21
Beschouw de verzameling $V = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -2 \wedge x^2 < 20\}$.
a Schrijf V als de doorsnede van twee afzonderlijke verzamelingen.
b Geef een expliciete definitie van V.
c Bepaal de doorsnede van V met $\mathbb{Z}^+$ en geef zowel een expliciete als een impliciete definitie van deze doorsnede.

Welke elementen hebben $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ en $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, \ldots\}$ met elkaar gemeen? Geen enkele. Oftewel, er zit geen enkel element in $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}^-$. We zeggen dan dat de doorsnede 'leeg' is. Omdat we de doorsnede weer als een verzameling willen zien (zie definitie 5.6), voeren we nu de *lege verzameling* in, dat wil zeggen: de verzameling die geen enkel element bevat. Voor deze lege verzameling wordt het symbool $\emptyset$ gebruikt. Het feit dat $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}^-$ geen elementen gemeen hebben, ofwel een lege doorsnede hebben, kan dan uitgedrukt worden als: $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}^- = \emptyset$. Verder spreken we af dat $\emptyset \subset A$ voor iedere verzameling A (en dus ook voor $A = \emptyset$). Verwar overigens $\emptyset$ niet met het veel gebruikte computersymbool voor het getal 0.

Lege verzameling
Notatie $\emptyset$

$\emptyset \subset A$ voor alle A

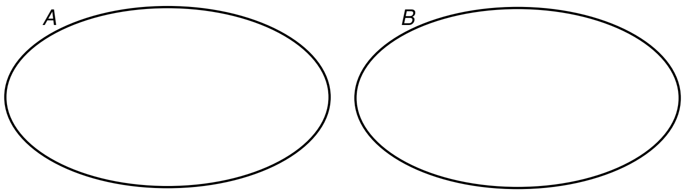
OPGAVE 5.22

Voor welke A en B geldt er dat $A \cap B = \emptyset$? Motiveer uw antwoorden.

a $A = \mathbb{Z}^+$ en $B = \mathbb{Z}^-$.
b $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ en $B = \mathbb{N}$.
c $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 4\}$ en $B = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid 2^x > 4\}$.

Disjunct

Als geldt dat $A \cap B = \emptyset$, dan worden de verzamelingen A en B *disjunct* genoemd. De verzamelingen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}^-$ zijn dus disjunct. In een Venndiagram geven we dit weer door de ovalen niet te laten overlappen.



FIGUUR 5.6 Disjuncte verzamelingen A en B

In voorbeeld 5.5, over formele taal, zijn de begrippen alfabet en taal geïntroduceerd. De voorwaarde dat een alfabet Σ minstens één element moet bevatten, kan nu handig als volgt geformuleerd worden: $\Sigma \neq \emptyset$. Stel dat Σ_1 en Σ_2 twee alfabetten zijn, L_1 een taal over Σ_1 en L_2 een taal over Σ_2. Is $L_1 \cap L_2$ dan te zien als een taal? We bekijken eerst eens twee voorbeelden.

VOORBEELD 5.7
Is $L_1 \cap L_2$ een taal?

In het eerste voorbeeld nemen we $\Sigma_1 = \{a, b\}$ en $L_1 = \Sigma_1^*$, dus L_1 is de taal die bestaat uit alle mogelijke eindige rijtjes die we met de symbolen `a` en `b` kunnen maken. Net zo nemen we $\Sigma_2 = \{b, c\}$ en $L_2 = \Sigma_2^*$. Een string als `abab` behoort tot L_1, maar niet tot L_2, en een string als `bccb` behoort tot L_2, maar niet tot L_1. Willen we een string in $L_1 \cap L_2$ verkrijgen, dan zullen we alleen symbolen moeten gebruiken die zowel tot Σ_1 als tot Σ_2 behoren. Maar dit betekent dat we alleen het symbool `b` kunnen gebruiken: de strings `b`, `bb`, `bbb` bijvoorbeeld behoren zowel tot L_1 als tot L_2 en dus tot $L_1 \cap L_2$. In dit geval bestaat $L_1 \cap L_2$ dus uit alle strings die we met het symbool `b` kunnen maken, ofwel $L_1 \cap L_2 = \{b\}^*$. De verzameling $L_1 \cap L_2$ is dus inderdaad een taal en wel over het alfabet $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{b\}$. In het tweede voorbeeld nemen we L_1 weer als hiervoor en nemen we voor L_2 een willekeurige taal over $\Sigma_2 = \{0, 1\}$.

Omdat geen enkele string uit L_1 de symbolen `0` of `1` bevat, zijn er geen strings te maken die tot $L_1 \cap L_2$ behoren. Het probleem is dat $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ in dit geval. Omdat afgesproken is dat een alfabet niet leeg mag zijn, zegt men nu dat de taal $L_1 \cap L_2$ niet bestaat.

Laten we nu terugkeren naar het algemene geval. Een element uit L_1 is een rijtje van symbolen uit Σ_1 en een element uit L_2 is een rijtje van symbolen uit Σ_2. Een element kan dus alleen tot $L_1 \cap L_2$ behoren als dit element een rijtje is dat uitsluitend symbolen bevat die zowel tot Σ_1 als tot $\Sigma 2$ behoren. Dit betekent dat de elementen uit $L_1 \cap L_2$ strings zijn over zowel Σ_1 als Σ_2. De verzameling $L_1 \cap L_2$ is dan een taal over het alfabet $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Omdat een alfabet niet leeg mag zijn, moet er wel gelden dat $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$, met andere woorden, Σ_1 en Σ_2 mogen niet disjunct zijn.

We zouden kunnen zeggen dat strikt genomen de 'lege verzameling' helemaal geen verzameling is, er worden immers geen objecten samengenomen tot één geheel. Dat het handig is om $\emptyset$ als verzameling toe te laten, volgt niet alleen uit het feit dat nu iedere doorsnede van twee verzamelingen opnieuw een verzameling is. De lege verzameling vervult namelijk een rol die vergelijkbaar is met die van 0 in de wereld van de getallen. Voor een willekeurig getal x geldt bijvoorbeeld dat $x \cdot 0 = 0$. Iets dergelijks is er ook voor verzamelingen: voor een willekeurige verzameling A geldt dat $A \cap \emptyset = \emptyset$. Dit zie je door op te merken dat $A \cap \emptyset$ geen enkel element bevat. Immers, als $x \in A \cap \emptyset$, dan volgt uit definitie 5.6 in het bijzonder dat $x \in \emptyset$, wat onmogelijk is.

$A \cap \emptyset = \emptyset$

De lege verzameling komt ook op natuurlijke wijze tevoorschijn bij de impliciete definitie van verzamelingen. Zo bevat de verzameling $E = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 1\}$ geen enkel element, ofwel $E = \emptyset$. In het algemeen is het bij een impliciete definitie $\{x \mid P(x)\}$ mogelijk dat er helemaal geen objecten x zijn waarvoor de uitspraak $P(x)$ geldt. Men zegt dan wel dat $P(x)$ een onvervulbare voorwaarde is. Een extreem voorbeeld is $\{x \mid x \neq x\} = \emptyset$. Hiermee wordt bedoeld dat er geen enkel object bestaat waarvan we ons kunnen voorstellen dat het ongelijk is aan zichzelf, ofwel $\{x \mid x \neq x\}$ bevat geen enkel element.

Venndiagrammen zijn een hulpmiddel, geen bewijs

Venndiagrammen zijn een goed hulpmiddel bij het ontdekken en bewijzen van eigenschappen voor verzamelingen. Met nadruk wijzen we op het woord 'hulpmiddel': een Venndiagram is een plaatje en geen bewijs. Misschien hebben we wel een verkeerd Venndiagram getekend! Als we in een Venndiagram een eigenschap denken te zien, dan moet daar ook steeds een bewijs van worden gegeven.

VOORBEELD 5.8

Laat A en B verzamelingen zijn. Het Venndiagram in figuur 5.5 suggereert dat $A \cap B \subset A$. Een bewijs gaat als volgt. Volgens definitie 5.3 moeten we laten zien dat ieder element uit $A \cap B$ ook tot A behoort. Neem dus een willekeurige $x \in A \cap B$. Uit dit gegeven en definitie 5.6 volgt dan dat $x \in A$ en dat $x \in B$. In het bijzonder behoort x dus tot A, waarmee inderdaad is aangetoond dat iedere $x \in A \cap B$ ook tot A behoort.

We herinneren nog even aan de methode om te bewijzen dat twee verzamelingen A en B aan elkaar gelijk zijn: als we bewijzen dat zowel $A \subset B$ als $B \subset A$, dan volgt dat $A = B$ (zie het begin van paragraaf 2).

OPGAVE 5.23
Laat A en B verzamelingen zijn met $A \subset B$.
a Teken een Venndiagram van deze situatie en geef hierin $A \cap B$ aan.
b Het Venndiagram uit onderdeel a suggereert dat $A \cap B = A$. Geef een bewijs van deze eigenschap.

OPGAVE 5.24
Geef een redenering waaruit blijkt of de volgende beweringen over de lege verzameling waar zijn of niet.
a $\emptyset \subset \emptyset$
b Het aantal elementen van $\{\emptyset\}$ is nul.
c $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 2\}$.
d $\emptyset \in \emptyset$.
e $\emptyset \in \{\emptyset\}$.
f $\emptyset \subset \{\emptyset\}$.

3.2 VERENIGING EN VERSCHIL

Worden de elementen uit $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}^-$ bij elkaar gevoegd, dan ontstaat de verzameling $\mathbb{Z}$. We noemen dit het verenigen van $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}^-$.

Vereniging
Notatie $A \cup B$

Definitie 5.7: Vereniging. Laat A en B twee verzamelingen zijn. De vereniging van A en B is de verzameling die bestaat uit de elementen x waarbij $x \in A$ of $x \in B$. De vereniging van A en B noteren we met $A \cup B$.

$A \cup \emptyset = A$ voor iedere A

In deze definitie is het voor een element x in de vereniging ook toegestaan dat x zowel tot A als tot B behoort, met andere woorden dat $x \in A \cap B$. Verder spreken we af dat $A \cup \emptyset = A$ voor iedere A.

VOORBEELD 5.9

Zij $A = \{1, 2, 3\}$ en $B = \{3, 4\}$. Dan geldt dat $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ en $A \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$.

Formele betekenis van 'of'

De definitie van vereniging gebruikt het voegwoord 'of'. In het dagelijkse leven zijn we eraan gewend dat in een samenstelling met 'of' de twee (of meer) geboden alternatieven elkaar uitsluiten: 'wil je koffie of thee?', 'is het een jongen of een meisje?'. We verwachten dat slechts één van deze alternatieven juist is en dat het antwoord dit alternatief zal aangeven: 'koffie graag', 'het is een meisje'. In informatica wordt 'of' in de betekenis 'en/of' gebruikt. Om dit te illustreren, beschouwen we de verzamelingen
$J = \{x \mid x \text{ is een jongen}\}$ en $M = \{x \mid x \text{ is een meisje}\}$. De vraag 'is x een jongen of een meisje?' wordt nu opgevat als de vraag 'behoort x tot J en/of tot M?', ofwel 'is x een element van $J \cup M$?'. Maar dit betekent dat wiskundig gezien deze vraag met een simpel 'ja' kan worden afgedaan, immers iedere persoon x zal tot $J \cup M$ behoren (althans, daar gaan we maar even van uit).

Notatie $\vee$

Om de strikte betekenis te benadrukken, wordt 'of' vaak vervangen door het symbool $\vee$. De vereniging van A en B kunnen we dan als volgt beschrijven: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$. Ook hier zullen we het symbool $\vee$ gebruiken om de vereniging van twee impliciet gedefinieerde verzamelingen $\{x \mid P(x)\} \cup \{x \mid Q(x)\}$ te noteren als $\{x \mid P(x) \vee Q(x)\}$. Zo schrijven we in plaats van $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\} \cup \{x \mid x \text{ is even}\}$ voortaan ook $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5 \vee x \text{ is even}\}$. Getallen die tot deze verzameling behoren, zijn bijvoorbeeld 4, 5 en 10.

OPGAVE 5.25

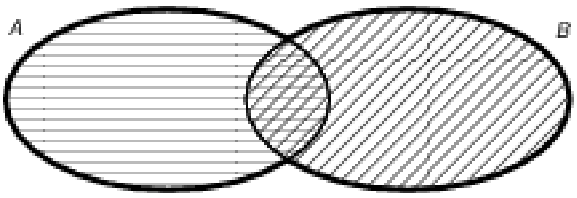
Beschouw de verzameling $V = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 10 \vee x^2 < 20\}$.

a Behoren de volgende getallen tot V: $-4, -5, 9, 10$? Motiveer uw antwoorden.
b Schrijf V als de vereniging van twee afzonderlijke verzamelingen.
c Geef een expliciete definitie van V.
d Bepaal de vereniging van V met $\mathbb{Z}^+$.

VOORBEELD 5.10

Neem Σ_1, Σ_2, L_1 en L_2 als in voorbeeld 5.7. Kunnen we nu met behulp van de vereniging uit L_1 en L_2 weer een nieuwe taal maken? In ieder geval zijn met de symbolen uit $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ alle strings te maken die in L_1 of L_2 voorkomen, immers $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ bevat alle hiervoor noodzakelijke symbolen. Dit betekent dat $L_1 \cup L_2$ een deelverzameling is van $(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*$, met andere woorden, een taal is over $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$. We moeten er wel op bedacht zijn dat we met $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ meestal ook strings kunnen maken die niet tot $L_1 \cup L_2$ behoren. Neem bijvoorbeeld voor L_1 een taal over $\Sigma_1 = \{0, 1\}$ en voor L_2 een taal over $\Sigma_2 = \{a, b\}$. De string `01aa0b` behoort dan niet tot $L_1 \cup L_2$, maar wel tot $(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*$. In het algemeen zal $L_1 \cup L_2$ dus een echte deelverzameling zijn van $(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*$.

De vereniging van de verzamelingen A en B correspondeert in een Venndiagram met alles binnen de ovalen van A en B.



FIGUUR 5.7 Het gearceerde gebied correspondeert met $A \cup B$

Verzameling A is horizontaal gearceerd, B diagonaal. De vereniging is het gehele gearceerde gebied – alles wat horizontaal, diagonaal of dubbel gearceerd is. De vereniging is vet-omlijnd aangegeven.

Het Venndiagram in figuur 5.7 is zo getekend, dat de ovalen elkaar overlappen. Dit is gebruikelijk zolang er sprake is van willekeurige verzamelingen A en B. Zijn er extra gegevens voorhanden, zoals $A \subset B$ of $A \cap B = \emptyset$, dan gaat het bijbehorende Venndiagram er anders uit zien (zoals in opgaven 5.23 en 5.27). Voor niet nader gespecificeerde verzamelingen laten we ook in het vervolg de ovalen in het Venndiagram elkaar overlappen. We geven nog een voorbeeld waarin een eigenschap van verzamelingen bewezen wordt.

VOORBEELD 5.11

Laat V en W twee verzamelingen zijn zo dat $V \subset A$ en ook $W \subset A$. Als we deze situatie in een Venndiagram schetsen (doe dit zelf even op een kladblaadje), dan suggereert dit dat $V \cup W \subset A$. Om dit te bewijzen, moeten we laten zien dat voor iedere $x \in V \cup W$ geldt dat $x \in A$. Neem dus $x \in V \cup W$ willekeurig. Volgens de definitie van vereniging geldt dan dat $x \in V$ of dat $x \in W$. Deze twee gevallen behandelen we even apart. Als $x \in V$, dan volgt uit $V \subset A$ dat $x \in A$. Evenzo volgt uit $x \in W$ en $W \subset A$ dat ook in dat geval $x \in A$. In beide gevallen geldt dus dat $x \in A$, wat bewijst dat iedere $x \in V \cup W$ ook tot A behoort, ofwel dat $V \cup W \subset A$.

OPGAVE 5.26
Bepaal de vereniging van de volgende verzamelingen.
a $E = \{-8, -6, -4, -2, 2, 4, 6\}$ en $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 20\}$.
b $A = \{a, b, 0, \alpha\}$ en $B = \{\alpha, \{a\}, b, \{0, a\}\}$.
c $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}^+$.
d $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 > 9\}$ en $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\}$.

OPGAVE 5.27
Laat A en B verzamelingen zijn met $A \subset B$. Teken een Venndiagram van deze situatie en geef hierin $A \cup B$ aan. Geef een bewijs van de eigenschap die hierdoor gesuggereerd wordt. (Kijk eventueel eerst nog eens naar de vergelijkbare opgave 5.23.)

OPGAVE 5.28
Stel dat $A \subset V$ en $B \subset W$. Bewijs dat $(A \cup B) \subset (V \cup W)$. Teken ook een Venndiagram van deze situatie.

Naast het bij elkaar nemen van twee verzamelingen, kunnen we ook de ene verzameling van de andere 'aftrekken'.

Definitie 5.8: Verschil. Het verschil van twee verzamelingen A en B, notatie $A \setminus B$, is de volgende verzameling:

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Ezelsbrug

We kunnen $A \setminus B$ lezen als 'A zonder B'.

OPGAVE 5.29
a Wat is $\{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{1, 3, 5\}$?
b Wat is $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$?
c Wat is $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}$?
d Is $(A \cup B) \setminus B$ per definitie hetzelfde als A? Leg uit waarom.

3.3 COMPLEMENT EN UNIVERSUM

Als we lezen dat "niet-rokers een verminderde kans hebben op ...", dan is duidelijk dat de auteur hier alle mensen op het oog heeft die niet roken. Maar als we lezen dat "niet-natuurlijke getallen de eigenschap hebben dat ...", dan is niet duidelijk welke getallen er bedoeld worden. Zijn dit alle niet-natuurlijke getallen in $\mathbb{Z}$, of in $\mathbb{Q}$, of in $\mathbb{R}$, of in ...? Echter, zo'n uitspraak wordt meestal in een zekere context gedaan, met andere woorden, er zal één of andere van te voren afgesproken verzameling zijn waarbinnen op dat moment gewerkt wordt. Zo'n verzameling, die verder de context zal vormen van al wat volgt, noemen we een *universum* en geven we met de letter U aan.

Universum
Notatie U

Nemen we $\mathbb{Z}$ als universum, dan zijn de niet-natuurlijke getallen precies de elementen in $\mathbb{Z}^-$. De verzameling $\mathbb{Z}^-$ wordt dan het complement van $\mathbb{N}$ ten opzichte van het universum $\mathbb{Z}$ genoemd. Kiezen we $U = \mathbb{Q}$, dan is het complement van $\mathbb{N}$ ten opzichte van U eigenlijk alleen maar te omschrijven als 'alle elementen in $\mathbb{Q}$ die niet tot $\mathbb{N}$ behoren'. Hier voeren we een aparte notatie voor in.

Complement
Notatie A^c

Definitie 5.9: Complement. Laat U een gekozen universum zijn en $A \subset U$. Het *complement* van A (ten opzichte van U) is de verzameling van alle $x \in U$ waarbij $x \notin A$. Het complement van A noteren we met A^c.

Met behulp van het symbool $\wedge$ is het complement te beschrijven als $A^c = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$. Meestal is uit de context duidelijk wat het afgesproken universum U is (of moet zijn). Het is dan heel gebruikelijk om U niet langer in de notatie te vermelden. In dat geval spreekt men kortweg van 'het complement' van A en noteert dit als $A^c = \{x \mid x \notin A\}$. Ook een impliciete definitie van de vorm $\{x \in U \mid P(x)\}$ wordt dan wel korter genoteerd als $\{x \mid P(x)\}$. Let in al dit soort gevallen steeds goed op wat het universum is!

VOORBEELD 5.12

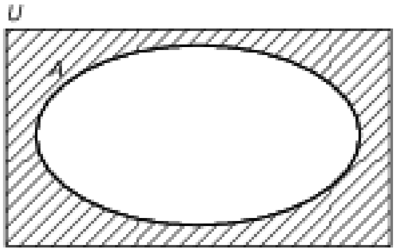
Als $A = \mathbb{Z}^+$ en het universum U is $\mathbb{Z}$, dan geldt $A^c = \{0, -1, -2, \ldots\} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$. Nemen we $U = \mathbb{N}$ als universum, dan geldt $A^c = \{0\}$.

OPGAVE 5.30
Zij $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
a Bepaal A^c als het universum $\mathbb{N}$ is.
b Bepaal A^c als het universum $\mathbb{Z}$ is.

VOORBEELD 5.13
Complement van een taal

Is L een taal over een alfabet Σ, dan geldt $L \subset \Sigma^*$ (zie voorbeeld 5.5). Het *complement van de taal* L ten opzichte van Σ wordt gedefinieerd als het complement van de verzameling L ten opzichte van Σ^*. (Let op de twee verschillende betekenissen van 'complement' hier). Het universum is in dit geval Σ^*. Omdat het complement van L bevat is in Σ^*, is het opnieuw een taal over Σ. Als bijvoorbeeld L de taal is over $\Sigma = \{0, 1\}$ die bestaat uit alle rijtjes nullen en enen met een even aantal enen, dan is het complement van L ten opzichte van Σ de taal over Σ die bestaat uit alle rijtjes nullen en enen met een oneven aantal enen.

Het complement van A correspondeert in een Venndiagram met het gebied buiten het ovaal voor A, maar binnen het universum U. Om de speciale rol van U te benadrukken, tekenen we dit als een rechthoek.

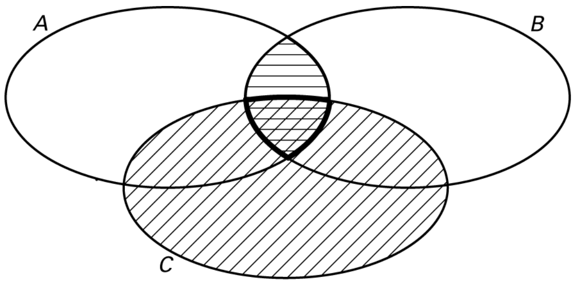


FIGUUR 5.8 Het gearceerde gebied correspondeert met A^c

OPGAVE 5.31
Bepaal het complement van A ten opzichte van het gegeven universum.
a $A = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x^2 > 9\}$ en $U = \mathbb{Z}$.
b $A = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x^2 > 9\}$ en $U = \mathbb{Z}^+$.
c $A = \{a, e, i, o, u\}$ en
$U = \{\alpha \mid \alpha$ is een letter in het Nederlandse alfabet$\}$.
d $A = \{a, b\}$ en $U = \{a, \{a\}, b, \{a, b\}\}$.
e $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \vee x > 1\}$ en $U = \mathbb{R}$.

OPGAVE 5.32
a Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat een complement leeg kan zijn.
b Voor ieder universum U geldt dat $\emptyset \subset U$. Wat is nu $\emptyset^c$?

Omdat de doorsnede $A \cap B$ van de verzamelingen A en B zelf weer een verzameling is, kan deze opnieuw doorsneden worden met een verzameling C. Zo ontstaat $(A \cap B) \cap C$, waarvan een Venndiagram in figuur 5.9 is getekend. (Het Venndiagram is weer zo getekend dat alle combinaties van ovalen elkaar overlappen.)



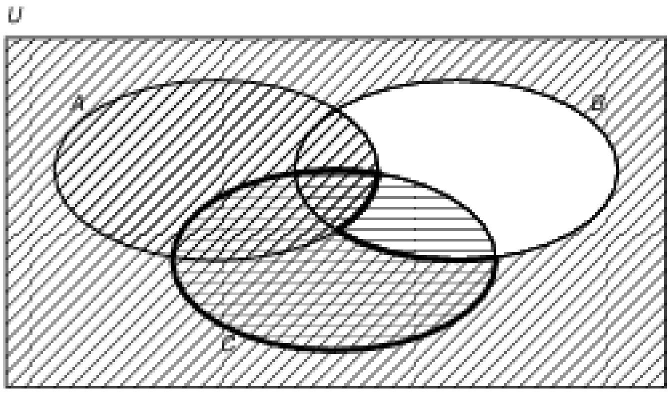
FIGUUR 5.9 De verzameling $(A \cap B) \cap C$

$A \cap B$ is horizontaal gearceerd, C diagonaal. De doorsnede van $A \cap B$ en C is nu zowel horizontaal als diagonaal gearceerd en vet-omlijnd aangegeven.

De verzameling $(A \cap B) \cap C$ kan men opnieuw doorsnijden met een verzameling D, enzovoort. Vergelijkbare opmerkingen gelden voor verenigingen van verzamelingen, terwijl men ook doorsneden en verenigingen kan combineren met elkaar en met het nemen van complementen.

VOORBEELD 5.14

Laat A, B en C deelverzamelingen zijn van een universum U. Door eerst B^c te verenigen met A en vervolgens het resultaat te doorsnijden met C, ontstaat $(A \cup B^c) \cap C$. In figuur 5.10 is het Venndiagram getekend.



FIGUUR 5.10 $(A \cup B^c) \cap C$ (diagonaal en horizontaal gearceerd)

$A \cup B^c$ is diagonaal gearceerd, C horizontaal. De doorsnede is het gebied dat zowel diagonaal als horizontaal gearceerd is.

Neem nu bijvoorbeeld $\mathbb{Z}$ als universum, $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \mathbb{Z}^-$ en $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ is even}\}$. Omdat $B^c = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, volgt dat $A \cup B^c = \mathbb{Z}^+ \cup \{-1, 0\}$ en dus $(A \cup B^c) \cap C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ is even}\}$.

OPGAVE 5.33

Laat A, B en C deelverzamelingen zijn van een universum U en vorm de verzameling $(A \cup B)^c \cup C$.

a Geef deze situatie weer in een Venndiagram.

b Stel $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \mathbb{Z}^-$, $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ is even}\}$ en $U = \mathbb{Z}$. Vereenvoudig $(A \cup B)^c \cup C$ zo ver mogelijk.

c Zij $U = \{\alpha \mid \alpha \text{ is een letter in het Nederlandse alfabet}\}$, $A = \{a, e, i\}$, $B = \{e, i, o, u\}$ en $C = \{\alpha \mid \alpha \text{ is een medeklinker}\}$. Laat zien dat $(A \cup B)^c \cup C = C$. Verklaar dit resultaat en teken een Venndiagram.

OPGAVE 5.34

Laat A een verzameling zijn in een universum U. Bewijs dat $A \cap A^c = \emptyset$ en geef dit weer in een Venndiagram.

OPGAVE 5.35

a Laat $\mathbb{Q}$ het universum zijn. Laat zien dat $\mathbb{Q}^+$ en $\{0\} \cup \mathbb{Q}^-$ elkaars complementen zijn.

b Bewijs dat $(A^c)^c = A$ voor iedere $A \subset U$ (U is een universum).

OPGAVE 5.36

Zij $\Sigma = \{a, b, c\}$ en $U = \Sigma^*$ het universum, dus U is de verzameling van alle mogelijke rijtjes van symbolen uit Σ. We definiëren drie deelverzamelingen van U:
$L_1 = \{x \mid \text{ het rijtje } x \text{ bevat minstens één a}\}$, $L_2 = \{x \mid \text{ het rijtje } x \text{ bevat minstens één b}\}$, $L_3 = \{x \mid \text{ het rijtje } x \text{ bevat een oneven aantal symbolen a en een oneven aantal symbolen b}\}$.

a Bepaal $L_1 \cap L_2$. Geldt $L_3 \subset L_1 \cap L_2$?

b Bepaal $(L_1 \cup L_2)^{\mathsf{c}}$.

c Is Σ een deelverzameling van U?

OPGAVE 5.37

Laat A en B deelverzamelingen van een universum U zijn. Geef in twee Venndiagrammen de volgende twee verzamelingen weer: $(A \cap B)^{\mathsf{c}}$ en $A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}}$. Welke regel suggereert dit? (U hoeft geen bewijs te geven.)

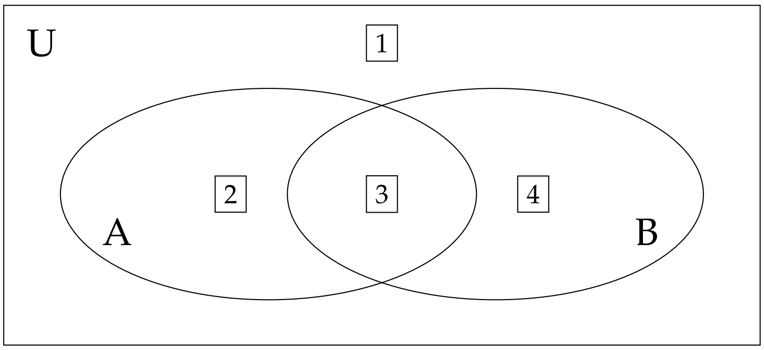
OPGAVE 5.38

Laat $\mathbb{R}$ het universum zijn, $A = \{x \mid x < -1 \vee x > 1\}$, $B = \{x \mid x \geq 0\}$ en $C = \{x \mid x^2 \geq 1\}$. Bepaal $A \cap B^{\mathsf{c}}$ en vervolgens $(A \cap B^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} \cup C$. Teken ook een Venndiagram van $(A \cap B^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} \cup C$ voor dit geval.

SAMENVATTING

Een verzameling is te omschrijven als 'het resultaat van het samennemen tot één geheel van een aantal onderscheidbare objecten'. De objecten in de verzameling heten de elementen. Twee verzamelingen zijn gelijk als ze dezelfde elementen bevatten. De volgorde van de elementen is niet van belang en elementen kunnen niet meer dan één keer voorkomen. Als de volgorde wel van belang is en we toelaten dat objecten meer dan één keer voorkomen, dan spreken we van rijen.

Bij de expliciete definitie van een verzameling worden de elementen van die verzameling opgesomd. Een impliciete definitie van een verzameling is van de vorm $\{x \mid P(x)\}$, waarbij $P(x)$ een uitspraak is waarmee de elementen van die verzameling vastgelegd worden. Een impliciete definitie van de vorm $\{x \mid x \in A$ en $P(x)\}$ wordt ook als $\{x \in A \mid P(x)\}$ geschreven. Naast de eindige verzamelingen, waarvan men de elementen kan tellen, wordt in de wiskunde veelvuldig gebruik gemaakt van oneindige verzamelingen, waarvan men de elementen niet kan tellen. Belangrijke voorbeelden zijn de getalverzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ en diverse deelverzamelingen hiervan, zoals de deelverzamelingen van de positieve en de negatieve elementen.



FIGUUR 5.11 Overzicht van operaties op verzamelingenleer

Voor verzamelingen zijn de volgende begrippen geïntroduceerd (zie ook figuur 5.11):
- De lege verzameling, notatie $\emptyset$, is de verzameling die geen enkel element bevat.
- Het universum, notatie U, is een afgesproken verzameling die de context vormt voor al wat volgt, zoals impliciete definities. In figuur 5.11: gebieden $1 + 2 + 3 + 4$.
- A is een deelverzameling van B, notatie $A \subset B$, als voor elke $x \in A$ geldt dat $x \in B$; A is een echte deelverzameling van B als $A \subset B$ en $A \neq B$; er geldt dat $\emptyset \subset A$ voor iedere A.
- De doorsnede van A en B, notatie $A \cap B$, is $\{x \mid x \in A$ en $x \in B\}$, wat met behulp van het symbool $\wedge$ ook genoteerd wordt als $\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$; A en B zijn disjunct als $A \cap B = \emptyset$; er geldt dat $A \cap \emptyset = \emptyset$ voor iedere A. In figuur 5.11: gebied 3.

- De vereniging van A en B, notatie $A \cup B$, is $\{x \mid x \in A \text{ of } x \in B\}$, wat met behulp van het symbool $\vee$ ook genoteerd wordt als $\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$; er geldt dat $A \cup \emptyset = A$ voor iedere A. In figuur 5.11: gebieden $2 + 3 + 4$.
- het verschil van A en B, notatie $A \setminus B$, is $\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$. In figuur 5.11: gebied 2.
- Het complement van A (ten opzichte van U), notatie A^{c}, is $\{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$; als het universum U duidelijk is, dan wordt $x \in U \wedge$ ook wel weggelaten. In figuur 5.11: gebieden $1 + 4$.

Doorsneden, verenigingen en complementen van verzamelingen zijn met elkaar te combineren. Blijft het aantal verzamelingen dat men combineert beperkt, dan is dit met behulp van Venndiagrammen te visualiseren. Dit kan een goed hulpmiddel zijn bij het ontdekken en bewijzen van eigenschappen voor verzamelingen.

ZELFTOETS

1 In deze opgave is het universum $\mathbb{Z}$. Beschouw de verzamelingen $A = \{x \mid x \text{ is oneven } \wedge -9 \le x \le 9\}$, $B = \{x \mid x^2 \le 100\}$ en $C = \mathbb{Z}^+$.
a Geef een expliciete definitie van A.
b Bepaal het complement van A. Is dit een eindige of een oneindige verzameling? Als A^c eindig is, bepaal dan $|A^c|$.
c Bepaal $A \cap B^c$ en $(A \cap B^c)^c$.
d Bepaal $(A \cup B) \cap C^c$ en teken deze situatie in een Venndiagram.

2 Laat U een universum zijn en $A, B \subset U$.
a Bewijs dat $A \cup A^c = U$. Teken dit ook in een Venndiagram.
b Bewijs dat uit $A \subset B$ volgt dat $B^c \subset A^c$.

3 Laat $V = \{\emptyset, q, w, \{e, w\}, \{q, \{e, w\}\}, e\}$.
a Som alle elementen op van V en bepaal $|V|$.
b Geldt $\emptyset \in V$? Geldt $\emptyset \subset V$? Motiveer uw antwoorden.
c Geldt $\{\emptyset\} \in V$? Geldt $\{\emptyset\} \subset V$? Motiveer uw antwoorden.
d Geef 10 verschillende deelverzamelingen van V die bestaan uit 2 elementen.

4 Zij $\Sigma = \{j, n\}$ en vorm de verzameling Σ^* bestaande uit alle mogelijke rijtjes van symbolen uit Σ. Een rijtje van de vorm `jj...j` (k maal) noteren we als j^k (idem voor symbool n). Definieer nu L_1 en L_2 door:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{x \in \Sigma^* \mid \text{ het rijtje } x \text{ is van de vorm } j^k n^k \text{ voor zekere } k \in \mathbb{Z}^+\}, \\ L_2 &= \{x \in \Sigma^* \mid \text{ het rijtje } x \text{ is van de vorm } (jn)^l \text{ voor zekere } l \in \mathbb{Z}^+\}. \end{aligned}$$

a Geef vier verschillende elementen uit L_1 en ook uit L_2. Laat zien dat L_1 en L_2 echte deelverzamelingen zijn van Σ^*.
b Zijn L_1 en L_2 disjunct?
Zo ja, geef een bewijs. Zo nee, bepaal $L_1 \cap L_2$.

Door 37 studenten wordt een tentamen afgelegd dat bestaat uit 80 opgaven waarop een antwoord j (ja) dan wel n (nee) mogelijk is. We gaan ervan uit dat de studenten alle 80 opgaven beantwoorden. De 80 antwoorden van een student zullen we een antwoordenlijst noemen.
c Is het correct om na afloop van het tentamen te spreken van de verzameling van alle antwoordenlijsten?
d Voor tentamens met 80 opgaven zijn er allerlei lijsten van correcte antwoorden mogelijk. Zo'n lijst noemen we een antwoordmodel. Is het nu correct om te spreken van de verzameling van alle mogelijke antwoordmodellen?
e Welke merkwaardige eigenschap heeft het tentamen als het antwoordmodel uit onderdeel d tot L_1 behoort? En als het tot L_2 behoort?

5 Laat A en B verzamelingen zijn.
a Bewijs dat $(A \cap B) \subset (A \cup B)$.
b Bewijs dat uit $A \cup B \subset B$ volgt dat $A \subset B$.
c In welke situatie geldt dat $A \cap B = A \cup B$? Geef een bewijs van uw bewering.