Lineaire vergelijkingen

Introductie *13*

Leerkern *14*

1.1 Twee-bij-twee-stelsels en lijnen in het vlak *14*
1.2 Algemene stelsels vergelijkingen *21*
1.2.1 De elementaire bewerkingen van de gausseliminatie *21*
1.2.2 De uitgebreide matrix *23*
1.2.3 Geen of oneindig veel oplossingen *28*
1.2.4 Minder vergelijkingen dan onbekenden *30*
1.2.5 Meer vergelijkingen dan onbekenden *33*

Samenvatting *35*

Leereenheid 1

Lineaire vergelijkingen

INTRODUCTIE

We beginnen deze introductie met een praktisch voorbeeld.

Stel, we moeten een aantal computersystemen aanschaffen, te kiezen uit drie types. We noemen ze type I, II en III. Bij de aanschaf moeten we rekening houden met het beschikbare budget, het energieverbruik en de ruimte die ze innemen.
Type I kost 1.000 euro per stuk, type II kost 2.000 euro en type III kost 4.000 euro per stuk. We hebben 30.000 euro beschikbaar.
Het energieverbruik van type I is 20 watt per apparaat, van type II is het 32 watt en type III verbruikt 50 watt per apparaat. Er mag in totaal 500 watt energie verbruikt worden.
Het volume van type I is 1 dm^3, van type II is het ook 1 dm^3 en het volume van type III is 1,5 dm^3. De beschikbare ruimte is 20 dm^3.
De vraag is nu welke aantallen we aan moeten schaffen, zodat we voldoen aan de voorwaarden voor het budget, het energieverbruik en de plaats die ze innemen.
We kunnen dit probleem wiskundig formuleren. We noemen x het aantal computersystemen van type I dat we aanschaffen, y het aantal van type II en z het aantal van type III dat we aanschaffen. Om nu de gestelde vraag te beantwoorden, moeten we x, y en z zodanig kiezen dat geldt:

$$x \cdot 1.000 + y \cdot 2.000 + z \cdot 4.000 = 30.000$$
$$x \cdot 20 + y \cdot 32 + z \cdot 50 = 500$$
$$x \cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 1{,}5 = 20$$

Hiermee hebben we drie lineaire vergelijkingen geformuleerd, ook wel een stelsel lineaire vergelijkingen genoemd. De uitdaging is nu waarden voor x, y en z te vinden, zodat de vergelijkingen kloppen. Daarmee hebben we dan het probleem opgelost. In deze leereenheid gaan we een systematische methode behandelen om dit te doen. We verklappen u alvast dat de oplossing van dit probleem gevonden wordt voor $x = 12$, $y = 5$ en $z = 2$. Met die waarden kloppen alle drie de vergelijkingen, zoals u eenvoudig na kunt gaan.

Bovenstaand probleem is typisch een vraagstuk uit de lineaire algebra. Aan de basis van de lineaire algebra staat het oplossen van een aantal lineaire vergelijkingen met meerdere onbekenden $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ofwel het bepalen van $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uit een aantal vergelijkingen van de vorm $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c$, waarin de constanten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en c gegeven zijn. De term 'lineair' drukt uit dat naast de onbekenden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er verder geen andere functies van $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in de vergelijkingen voorkomen, zoals hogere machten (bijvoorbeeld x_2^5), producten ($x_2x_3x_5$),

Lineair

wortels ($\sqrt{x_1}$), enzovoort. Op het begrip lineair zullen we nog een aantal maal terugkomen (onder meer in paragraaf 1.1).
Veel problemen uit de praktijk en de (toegepaste) wiskunde kunnen beschreven worden met behulp van zulke lineaire vergelijkingen. Hiervoor zagen we daarvan al een bijvoorbeeld. Ook komen ze vaak tevoorschijn als 'bijproduct' in een oplossingsmethode. Een voorbeeld hiervan is het bepalen van de vergelijking $y = ax + b$ van een lijn als we twee punten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kennen die op de lijn liggen. Als dit de punten (1, 2) en (2, 5) zijn, dan volgt door invullen van de waarden van x en y dat $a + b = 2$ en $2a + b = 5$. Dit zijn twee lineaire vergelijkingen in de onbekenden a en b waaruit a en b eenvoudig zijn op te lossen. Voor een groter aantal vergelijkingen in meer onbekenden zal in het algemeen het oplossen niet meer zo eenvoudig zijn. We beginnen dit blok dan ook met een systematische en efficiënte methode waarmee de oplossingen van een aantal lineaire vergelijkingen in meer onbekenden bepaald kunnen worden. Bovendien leent deze methode zich goed voor een computer-implementatie, waardoor tegenwoordig ook (steeds) grotere problemen aangepakt kunnen worden.

Linearisatie

Is een probleem te ingewikkeld om het met lineaire vergelijkingen weer te geven, dan wordt vaak geprobeerd om het probleem zo te vereenvoudigen dat het wel met lineaire vergelijkingen te beschrijven is. Men noemt dit wel de *linearisatie* van een probleem. De oplossing van het 'gelineariseerde' probleem kunnen we dan zien als een eerste benadering, die als uitgangspunt kan dienen om het oorspronkelijke probleem verder aan te pakken. Zo kan de lineaire algebra een eerste stap vormen in een uitgebreidere oplossingsmethode.

LEERDOELEN

Na het bestuderen van deze leereenheid wordt verwacht dat u
- het verband kent tussen lijnen in het vlak en oplossingen van een stelsel van twee lineaire vergelijkingen in twee onbekenden
- de drie elementaire operaties in de gausseliminatie kunt omschrijven
- met behulp van gausseliminatie een stelsel lineaire vergelijkingen kunt oplossen
- met behulp van gausseliminatie kunt bepalen of een stelsel lineaire vergelijkingen geen, precies één dan wel oneindig veel oplossingen heeft
- de oplossingen van een stelsel lineaire vergelijkingen in termen van parameters kunt geven als er oneindig veel oplossingen zijn
- voor concrete problemen een stelsel lineaire vergelijkingen op kunt stellen.

LEERKERN

1.1 Twee-bij-twee-stelsels en lijnen in het vlak

In een vergelijking als $x + 2y - z = 1$ worden de onbekenden x, y en z alleen met constanten vermenigvuldigd en bij elkaar opgeteld: x wordt met 1 vermenigvuldigd, y met 2 en z met -1 en vervolgens worden de resultaten x, $2y$ en $-z$ bij elkaar opgeteld. We zullen ons in dit blok voortdurend met dit soort vergelijkingen bezighouden en in de volgende definitie voeren we daarom alvast een aantal basisbegrippen in.

Lineaire vergelijking

DEFINITIE 1.1

Een lineaire vergelijking in de n onbekenden $x_1, x_2, ..., x_n$ is een vergelijking van de vorm

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = c$$

waarin $a_1, a_2, ..., a_n$ en c gegeven (reële) constanten zijn.
Het getal a_i heet de coëfficiënt van x_i.
Het getal c heet de constante term (ook wel het rechterlid).
Een n-tupel $(x_1, x_2, ..., x_n)$ heet een oplossing van de lineaire vergelijking als de coördinaten $x_1, ..., x_n$ aan de vergelijking voldoen.

Coëfficiënt
Constante term
Oplossing

Twee onbekenden geven we meestal met x en y aan en drie onbekenden met x, y en z. De lineaire vergelijking $x + 2y - z = 1$ heeft bijvoorbeeld de 3-tupels (1, 1, 2) of (0, 1, 1) of $(1, \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ als oplossingen. Zoals we al in de introductie zagen, zullen we vooral naar oplossingen zoeken van *stelsels* lineaire vergelijkingen, dat wil zeggen n-tupels $(x_1, x_2, ..., x_n)$ die tegelijkertijd aan *meer dan één* gegeven lineaire vergelijking voldoen. De 3-tupel (1, 1, 2) is bijvoorbeeld een oplossing van zowel $x + 2y - z = 1$ als van $2x - z = 0$ en $3x + y + 2z = 8$. Hebben we m lineaire vergelijkingen in dezelfde n onbekenden $x_1, x_2, ..., x_n$, dan noemen we dit kortweg een *m-bij-n-stelsel*. De vergelijkingen $x + 2y - z = 1$ en $2x - z = 0$ vormen dus een 2-bij-3-stelsel. De verzameling van *alle* oplossingen $(x_1,x_2, ..., x_n)$ van een gegeven m-bij-n-stelsel noemen we de *oplossingsverzameling* van het stelsel.

m-bij-n-stelsel

Oplossingsverzameling

Het centrale probleem van deze leereenheid is het systematisch bepalen van de oplossingsverzameling van een m-bij-n-stelsel. We illustreren dit aan de hand van een eenvoudig geval: twee lineaire vergelijkingen in twee onbekenden ofwel een 2-bij-2-stelsel.

$$\begin{array}{rcrcr} 8x & + & 2y & = & 24 \\ 6x & - & 3y & = & 0 \end{array}$$

Systematische methode geven

Het is niet moeilijk om de oplossing (2, 4) te vinden. Het gaat ons echter nu niet om de eenvoudigste manier om dit stelsel op te lossen (zie daarvoor opgave 1.2b), maar om een *systematische methode* te beschrijven waarmee de oplossing gevonden kan worden en die ook voor grotere stelsels bruikbaar is. We zullen de methode eerst beschrijven aan de hand van het gegeven stelsel. Een nadeel hiervan is dat voor 2-bij-2-stelsels de methode niet veel voorstelt en wellicht zelfs overdreven overkomt. Maar het voordeel is dat we de essentiële stappen in de methode kunnen illustreren, terwijl het rekenwerk eenvoudig blijft. Tevens is de situatie meetkundig goed te illustreren met behulp van lijnen in het platte vlak.

Elimineren

Stap 1: elimineer

De methode begint met het verwijderen of *elimineren* van de onbekende x uit de tweede vergelijking. Dit is te bereiken door de eerste vergelijking met $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ te vermenigvuldigen en het resultaat $6x + \frac{3}{2}y = 18$ van de tweede vergelijking af te trekken. Merk op dat we de eerste vergelijking met $\frac{6}{8}$ vermenigvuldigen om zo een vergelijking te krijgen waarin de coëfficiënt van x hetzelfde is als in de tweede vergelijking, dus 6.

Omdat $(6x - 3y) - (6x + \frac{3}{2}y) = -\frac{9}{2}y$ en $0 - 18 = -18$, krijgen we dan als resultaat een vergelijking waaruit x inderdaad verdwenen is, namelijk $-\frac{9}{2}y = -18$. We zeggen nu dat x uit de tweede vergelijking is geëlimineerd en vervangen het oorspronkelijke 2-bij-2-stelsel door het nieuwe 2-bij-2-stelsel, dus:

$$\begin{array}{rcrcr} 8x & + & 2y & = & 24 \\ 6x & - & 3y & = & 0 \end{array} \xrightarrow[\text{vergelijking 2}]{\text{elimineer } x \text{ uit}} \begin{array}{rcrcr} 8x & + & 2y & = & 24 \\ & & -\frac{9}{2}y & = & -18 \end{array}$$

Kern van de methode: onbekende elimineren

Hiermee hebben we in feite de kern van de methode al te pakken: een vergelijking wordt gebruikt om een onbekende in andere vergelijkingen mee te elimineren, waarna we een stelsel overhouden waarin vergelijkingen voorkomen met minder onbekenden.

Stap 2: los op (eerst y, dan x)

In ons voorbeeld is een stelsel ontstaan waarin een vergelijking voorkomt met nog maar één onbekende, namelijk $-\frac{9}{2}y = -18$. Hieruit is y op te lossen: $y = 4$. Door vervolgens $y = 4$ te substitueren in de eerste vergelijking, vinden we $8x + 8 = 24$, dus $x = 2$. Hiermee is de enige oplossing (2, 4) van de twee vergelijkingen gevonden.

OPGAVE 1.1

Als de punten (1, 2) en (2, 5) op de lijn l met vergelijking $y = ax + b$ liggen, dan volgt dat $a + b = 2$ en $2a + b = 5$ (zie de introductie). Geef de vergelijkingen in a en b die ontstaan na eliminatie van a in $2a + b = 5$. Los deze vergelijkingen op en geef ten slotte ook de vergelijking van l.

Hoe weten we eigenlijk zeker dat we met de gevonden oplossing ook echt de volledige oplossingsverzameling van het stelsel te pakken hebben? De belangrijke opmerking is dat we bij eliminatie *dezelfde oplossingsverzameling* houden. Laten we eens kijken wat er precies met het stelsel gebeurt bij eliminatie.

Delen door een constante behoudt de oplossingsverzameling ...

Allereerst verandert de oplossingsverzameling niet als we een vergelijking uit het stelsel met een constante $\neq 0$ vermenigvuldigen, of, wat op hetzelfde neerkomt, door een constante delen (die dan $\neq 0$ *moet* zijn).

... en vergelijkingen optellen of aftrekken behoudt de oplossingsverzameling ...

Ook verandert de oplossingsverzameling niet als we twee vergelijkingen uit het stelsel bij elkaar optellen, of, wat weer op hetzelfde neerkomt, van elkaar aftrekken. Immers, als (x, y) voldoet aan $ax + by = c$ en $dx + ey = f$, dan zien we (door optellen) dat (x, y) ook voldoet aan het stelsel $ax + by = c$ en $(a + d)x + (b + e)y = (c + f)$, en omgekeerd, als (x, y) voldoet aan $ax + by = c$ en $(a + d)x + (b + e)y = (c + f)$, dan zien we (door aftrekken) dat (x, y) ook voldoet aan het stelsel $ax + by = c$ en $dx + ey = f$. De twee stelsels hebben dus dezelfde oplossingen.

... dus elimineren behoudt de oplossingsverzameling.

Deze twee bewerkingen zijn precies de bewerkingen die we uitvoeren bij het elimineren. Elimineren verandert dus de oplossingsverzameling niet en de gevonden oplossingen zijn dan ook echt alle oplossingen van het oorspronkelijke stelsel.

Zoals gezegd is de geschetste oplossingsmethode voor ons voorbeeld nogal overdreven. Er zijn vele manieren om de oplossing te vinden en zelfs als we aan de eliminatie van x vasthouden, dan zou menigeen waarschijnlijk de (vervelende) vermenigvuldiging met de breuk 6/8 als volgt vermijden. Eerst gebruiken we de opmerking dat de oplossingsverzameling van een stelsel niet verandert als we een vergelijking door een constante delen. Deel nu de eerste vergelijking door 2 en de tweede door 3.

Dit geeft als 2-bij-2-stelsel:

$$\begin{aligned} 4x &+ y = 12 \\ 2x &- y = 0 \end{aligned}$$

Verwisselen van vergelijkingen behoudt ook de oplossingsverzameling.

Vervolgens is de vermenigvuldiging met 2/4 te vermijden door de twee vergelijkingen te verwisselen. We kunnen dit doen omdat ook het verwisselen van vergelijkingen de oplossingsverzameling niet verandert. (Dit lijkt een flauwe opmerking, maar is zeer nuttig!). Zo ontstaat het volgende 2-bij-2-stelsel, waaruit x zonder het gebruik van breuken is te elimineren:

$$\begin{aligned} 2x &- y = 0 \\ 4x &+ y = 12 \end{aligned}$$

OPGAVE 1.2

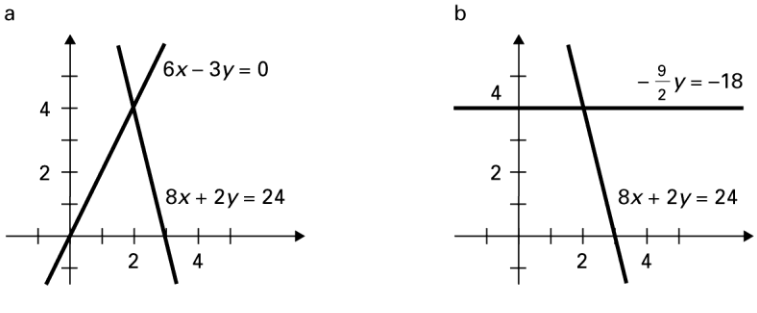
a Geef het 2-bij-2-stelsel dat ontstaat na eliminatie van $4x$ in voorgaand voorbeeld. Los het 2-bij-2-stelsel ook op.

b Eliminatie van y ligt nog veel meer voor de hand in ons voorbeeld. Voer dit uit en bepaal zo de oplossing.

Nogmaals, het lijkt hier allemaal wat vergezocht, maar als we grotere stelsels ‘met de hand’ gaan uitrekenen, dan kunnen de hiervoor beschreven handigheidjes (delen door een constante en verwisselen van vergelijkingen) veel vervelend rekenwerk besparen. Zelfs voor een computerimplementatie kan een handige keuze van de vergelijking waarmee geëlimineerd wordt, van groot belang zijn. Dan is het niet zozeer de ‘afkeer van breuken’, maar het mogelijke optreden van ongewenste afrondfouten die de keuze bepaalt.

één oplossing ↔ snijdende lijnen

Dat het 2-bij-2-stelsel $8x + 2y = 24$ en $6x - 3y = 0$ precies één oplossing heeft, kan geïllustreerd worden met behulp van lijnen in het (platte) vlak. Punten in het vlak laten we via een rechthoekig coördinatenstelsel corresponderen met elementen in $\mathbb{R}^2$. Een vergelijking $ax + by = c$, waarbij a, b en c constanten zijn, stelt dan een lijn in het vlak voor. Ieder van de vergelijkingen $8x + 2y = 24$ en $6x - 3y = 0$ ‘is’ dus een lijn en het *snijpunt* (2, 4) van de lijnen geeft de *enige oplossing* van het stelsel (zie figuur 1.1a). Het stelsel $8x + 2y = 24$ en $-\frac{9}{2}y = -18$, dat door eliminatie uit $8x + 2y = 24$ en $6x - 3y = 0$ is verkregen, geeft twee lijnen met hetzelfde snijpunt (zie figuur 1.1b).



FIGUUR 1.1 Het snijpunt van de lijnen $8x + 2y = 24$ en $6x - 3y = 0$ (a), dan wel de lijnen $8x + 2y = 24$ en $-\frac{9}{2}y = -18$ (b), is de oplossing van het 2-bij-2-stelsel.

We kunnen nu ook de term 'lineair' verklaren die in dit blok vele malen zal vallen en ook in de titel voorkomt: het Latijnse woord voor 'lijn' is 'linea' (denk ook aan 'liniaal').

Linea (Latijn) = lijn

OPGAVE 1.3
De vergelijkingen $a + b = 2$ en $2a + b = 5$ uit opgave 1.1 stellen twee lijnen in het 'a,b'-vlak voor. Teken deze lijnen, lees uit de figuur de oplossing af en controleer deze.

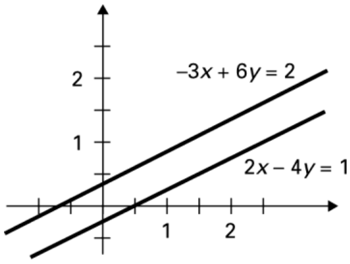
Bekijk nu eens het 2-bij-2-stelsel

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 4y & = & 1 \\ -3x & + & 6y & = & 2 \end{array}$$

Ga dit na.

Elimineren we x uit de tweede vergelijking, dan ontstaat de vergelijking $0y = \frac{7}{2}$, wat voor geen enkele waarde van y oplosbaar is. Iets anders geformuleerd: als we aannemen dat (x, y) een oplossing is, dan leidt dit tot de onware uitspraak $0 = \frac{7}{2}$. Dit 2-bij-2-stelsel heeft dus *geen* oplossing, wat ook direct blijkt als we de lijnen in het vlak tekenen: ze zijn *evenwijdig* en er is dus geen snijpunt (zie figuur 1.2).

geen oplossing ↔ evenwijdige lijnen



FIGUUR 1.2 De lijnen $2x - 4y = 1$ en $-3x + 6y = 2$ zijn evenwijdig; het 2-bij-2-stelsel heeft geen oplossing.

Ten slotte is het ook mogelijk dat een 2-bij-2-stelsel meer oplossingen heeft. Bekijk maar eens het stelsel

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 4y & = & 1 \\ -3x & + & 6y & = & -\frac{3}{2} \end{array}$$

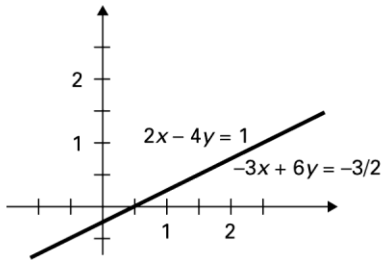
Ga dit na.

Elimineren we x uit de tweede vergelijking, dan ontstaat de vergelijking $0y = 0$, ofwel $0 = 0$, wat voor *iedere* waarde van y geldt. De vergelijking $0 = 0$ kunnen we dan weglaten uit het stelsel en zo blijft er één vergelijking over: $2x - 4y = 1$. Het enige wat we hier mee kunnen doen, is bijvoorbeeld y in termen van x uitdrukken: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$. Kiezen we een waarde voor x, dan volgt hieruit een waarde voor y. Voor $x = 0$ krijgen we bijvoorbeeld de oplossing $(0, -\frac{1}{4})$, voor $x = 1$ de oplossing $(1, \frac{1}{4})$. Omdat we $x \in \mathbb{R}$ *vrij mogen kiezen*, heeft dit stelsel dus oneindig veel oplossingen die gegeven worden door alle geordende paren van de vorm $(x, \frac{1}{2}x - \frac{1}{4})$ waarbij $x \in \mathbb{R}$. Het vrij te kiezen getal x in de oplossing wordt de *parameter* genoemd en meestal met de Griekse letter λ ('lambda') aangegeven. De oplossingen worden dan genoteerd als $(\lambda, \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4})$ waarbij $\lambda \in \mathbb{R}$.

Parameter Notatie: λ

oneindig veel oplossingen ↔ samenvallende lijnen

Het stelsel heeft *oneindig* veel oplossingen, omdat $2x - 4y = 1$ en $-3x + 6y = -\frac{3}{2}$ dezelfde lijn voorstellen, ofwel lijnen voorstellen die 'samenvallen'. De oplossingsverzameling van het stelsel bestaat uit alle punten in $\mathbb{R}^2$ die op deze lijn liggen. Zie figuur 1.3.



FIGUUR 1.3 De lijnen $2x - 4y = 1$ en $-3x + 6y = -\frac{3}{2}$ vallen samen; het 2-bij-2-stelsel heeft oneindig veel oplossingen.

OPGAVE 1.4

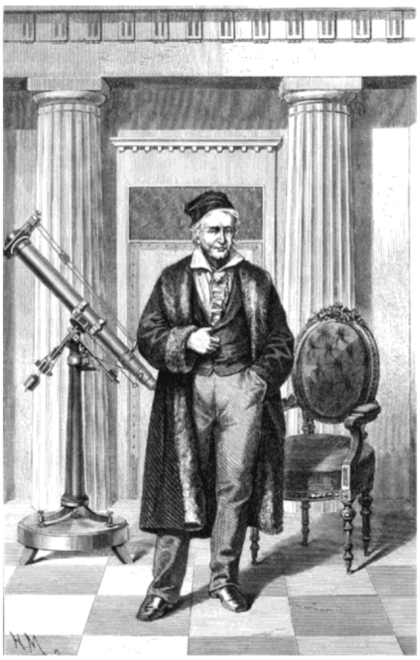
a Laat zien dat het stelsel $3x + 6y = 4$ en $5x + 10y = 2$ geen oplossingen heeft. Teken ook de bijbehorende lijnen in het vlak.

b Laat zien dat het stelsel $3x + 6y = 2\frac{2}{5}$ en $5x + 10y = 4$ oneindig veel oplossingen heeft en geef alle oplossingen weer met behulp van een parameter. Teken ook de bijbehorende lijnen in het vlak.

Gausseliminatie

Eén, geen of oneindig veel oplossingen

De hiervoor geschetste methode van elimineren voor het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen wordt *gausseliminatie* genoemd. Bij het proces van elimineren ontdekken we vanzelf welke van de drie mogelijkheden zich voordoet: precies één oplossing, geen oplossingen of oneindig veel oplossingen. Bovendien kunnen we met behulp van eliminatie de oplossingsverzameling precies beschrijven. Zoals we in paragraaf 1.2 zullen zien, is deze methode voor ieder stelsel lineaire vergelijkingen toepasbaar.



Carl Friedrich Gauss (1777-1855) was de zoon van een arbeider uit Braunschweig in Duitsland, die door zijn grote begaafdheid op jonge leeftijd zozeer opviel bij de hertog, dat deze voor zijn opleiding betaalde. In 1795 ging Gauss studeren aan de beroemde universiteit van Göttingen. Een bekend resultaat uit deze tijd is zijn verrassende ontdekking dat een regelmatig 17-hoek met passer en liniaal geconstrueerd kan worden. De jaren in Göttingen waren zeer productief en in 1799 promoveerde hij op een proefschrift waarin onder meer de zeer fundamentele 'hoofdstelling van de algebra' (over nulpunten van veeltermen) voor het eerst volledig werd bewezen.

Het jaar 1801 was voor hem een belangrijk jaar. Allereerst werd zijn boek 'Disquisitiones arithmeticae' gepubliceerd, waarin hij belangrijke problemen uit de getaltheorie oploste. Tegenwoordig beschouwt men dit werk als het begin van de moderne getaltheorie. Een andere belangrijke gebeurtenis was de ontdekking van de asteroïde *Ceres*. Asteroïden zijn 'kleine planeten': ze hebben hun eigen baan om de zon, net als de planeten, maar zijn veel kleiner. De meeste asteroïden bevinden zich tussen de banen van Mars en Jupiter; Ceres is de grootste. Op 1 januari 1801 werd Ceres ontdekt en gedurende korte tijd waargenomen. Door de helderheid van de zon verloor men Ceres uit het oog. Uit het geringe aantal waarnemingen kon Gauss echter de baan bepalen en men vond Ceres terug. Hij gebruikte hiervoor zijn nieuwe *kleinste-kwadratenmethode*, waarmee een stelsel met meer vergelijkingen dan onbekenden bij benadering wordt opgelost. Een jaar later bepaalde hij zo ook de baan van weer een nieuw ontdekte asteroïde (Pallas). Gauss was inmiddels een beroemd man geworden en in 1807 werd hij hoogleraar en directeur van de sterrenwacht in Göttingen, waar hij tot zijn dood verbleef en een ontzaglijke hoeveelheid ontdekkingen aan zijn oeuvre toevoegde, zowel in de 'zuivere' als in de 'toegepaste' wiskunde (samen met de fysicus Weber ontwikkelde hij bijvoorbeeld in 1833 de eerste elektrische telegraaf). Niet voor niets heeft Gauss de erenaam 'vorst der wiskundigen' gekregen.

OPGAVE 1.5
Ga van de volgende stelsels na of er oplossingen zijn. Is er één oplossing, geef deze dan. Zijn er oneindig veel oplossingen, geef deze dan weer met een parameter. Teken ook de bijbehorende lijnen in het vlak.
a $3x + 4y = 6$ en $x - 2y = -8$.
b $3x - 6y = 0$ en $-x + 2y = 2$.
c $3x + 6y = 0$ en $x - 2y - 1 = 0$.
d $3x - 6y + 6 = 0$ en $-x + 2y = 2$.

OPGAVE 1.6
Beschouw voor willekeurige $a \in \mathbb{R}$ het stelsel $x - y = 1$ en $ax + y = 2$.
a Geef de vergelijking die ontstaat als we de eliminatiemethode toepassen om x uit de tweede vergelijking te elimineren.
b Voor welke waarde(n) van a heeft het stelsel geen oplossing? En voor welke waarde(n) precies één?

OPGAVE 1.7
Er is een lineair verband $y = ax + b$ tussen de temperatuur x °F (graden Fahrenheit) en y °C (graden Celsius). Een reiziger naar de V.S. (waar °F gebruikt wordt) vindt dit verband moeilijk te onthouden, maar kan wel de volgende 'ezelsbrug' onthouden: –40 ° is in beide eenheden hetzelfde, terwijl 40 °C = 104 °F (104 is 100 plus 04, wat uit 40 ontstaat door de cijfers te verwisselen). Bepaal het lineaire verband tussen °C en °F.

OPGAVE 1.8
Een fabrikant wil van appels en peren met een totaal gewicht van 2 kilo een liter appel-peren-stroop maken waarvan de kostprijs € 7,– bedraagt. De appels en peren die men op het oog heeft, kosten € 3,– respectievelijk € 5,– per kilo. Bepaal de hoeveelheid appels en peren die de fabrikant moet aanschaffen voor een liter appel-peren-stroop.

1.2 Algemene stelsels vergelijkingen

1.2.1 DE ELEMENTAIRE BEWERKINGEN VAN DE GAUSSELIMINATIE

De gausseliminatie die in paragraaf 1.1 voor 2-bij-2-stelsels is geïntroduceerd, is op precies dezelfde wijze ook uit te voeren voor 3-bij-3-stelsels en heel algemeen voor m-bij-n-stelsels, dus m vergelijkingen met n onbekenden (op het tekenen van plaatjes na!). Als voorbeeld nemen we een 3-bij-3-stelsel. Voor de onbekenden gebruiken we niet de symbolen x, y en z maar x_1, x_2 en x_3. Voor meer onbekenden is deze indexnotatie onvermijdelijk en het is goed om er alvast aan te wennen. Beschouw nu het 3-bij-3-stelsel

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -3 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 12x_3 & = & 21 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 8 \end{array} \tag{1.1}$$

Van dit stelsel willen we de oplossingsverzameling bepalen, dat wil zeggen: alle 3-tupels $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ waarvan de coördinaten voldoen aan de drie vergelijkingen (de oplossingsverzameling vormt dus een deelverzameling van $\mathbb{R}^3$). De eerste stap in de gausseliminatie zou zijn om met behulp van de eerste vergelijking de onbekende x_1 uit de overige twee vergelijkingen te elimineren. Maar de eerste vergelijking bevat de onbekende x_1 helemaal niet en kan dus ook niet gebruikt worden om x_1 uit de andere vergelijkingen te elimineren. We verwisselen daarom de eerste twee vergelijkingen:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 6x_2 & - & 12x_3 & = & 21 \\ & & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 8 \end{array}$$

Equivalent stelsel

Verwisselen van vergelijkingen behoudt de oplossingsverzameling.

De oplossingsverzameling zal door het verwisselen van vergelijkingen zeker niet veranderen. Het oorspronkelijke en het nieuwe stelsel hebben dus dezelfde oplossingsverzameling. Twee stelsels vergelijkingen met dezelfde oplossingsverzameling zullen we *equivalente stelsels* noemen.

Pivot

In het nieuwe stelsel is de eerste vergelijking wél te gebruiken om x_1 uit de andere vergelijkingen te elimineren. We zien dus dat het voor de eliminatie van x_1 essentieel is dat de coëfficiënt van x_1 in de eerste vergelijking niet gelijk aan 0 is. Als de coëfficiënt $\neq 0$, dan wordt dit de eerste *pivot* genoemd. Het woord 'pivot' is Engels voor spil of draaipunt en wordt ook Engels uitgesproken (i als in '*i*n', o als de e in 'op*e*n' en met de klemtoon op de eerste lettergreep). In ons geval is de eerste pivot 3 en kan de eliminatie beginnen. In de tweede vergelijking komt x_1 niet voor en hoeft er niet geëlimineerd te worden. Om x_1 uit de derde vergelijking te elimineren, is het handiger om breuken te vermijden en een factor 3 uit de eerste vergelijking weg te delen:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 7 \\ & & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 8 \end{array}$$

Vergelijkingen delen door een constante behoudt de oplossingsverzameling.

Ook het delen door een constante ($\neq 0$) zal de oplossingsverzameling niet veranderen. Het stelsel is dus weer equivalent met het oorspronkelijke stelsel (en met het vorige stelsel). De eerste vergelijking vermenigvuldigen we nu met 2 en we trekken het resultaat van de derde vergelijking af. Omdat $(2x_1 + x_2 - 3x_3) - (2x_1 + 4x_2 - 8x_3) = -3x_2 + 5x_3$ en $8 - 14 = -6$, ontstaat zo het nieuwe 3-bij-3-stelsel:

Ga dit na.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 7 \\ & & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -3 \\ & - & 3x_2 & + & 5x_3 & = & -6 \end{array}$$

Eliminatie behoudt de oplossingsverzameling.

De laatste twee vergelijkingen bevatten nu een *onbekende minder*. Net als voor 2-bij-2-stelsels geldt ook hier dat eliminatie de oplossingsverzameling behoudt en we dus equivalente stelsels krijgen. De eerste vergelijking laten we voorlopig met rust. Omdat de coëfficiënt van x_2 in de tweede vergelijking uit voorgaand stelsel niet gelijk aan 0 is, kan deze vergelijking gebruikt worden om de volgende onbekende, dus x_2, te elimineren uit de derde vergelijking. De coëfficiënt van x_2 (mits $\neq 0$) wordt de *tweede* pivot genoemd en is in dit geval 3. Voeren we de eliminatie uit, dan ontstaat het equivalente stelsel

Ga dit na.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 7 \\ & & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -3 \\ & & & & 3x_3 & = & -9 \end{array}$$

Driehoeksvorm

Evenveel pivots als onbekenden

De laatste vergelijking bevat nu opnieuw een onbekende minder. De coëfficiënt van x_3 (mits $\neq 0$) wordt de *derde* pivot genoemd. In dit geval is de derde pivot 3. Vanwege de speciale gedaante van de drie linkerleden zeggen we dat het stelsel nu in *driehoeksvorm* is gebracht. Deze driehoeksvorm is ontstaan omdat we evenveel pivots als onbekenden hebben, in dit geval dus drie. Met het bereiken van de driehoeksvorm stoppen we de eliminatie, omdat de oplossing nu eenvoudig is te bepalen. Uit $3x_3 = -9$ volgt dat $x_3 = -3$. Substitueren we $x_3 = -3$ in de tweede vergelijking, dan volgt dat $3x_2 + 6 = -3$, ofwel $x_2 = -3$. Nu zijn $x_2 = -3$ en $x_3 = -3$ te substitueren in de eerste vergelijking en zien we dat $x_1 - 6 + 12 = 7$, ofwel $x_1 = 1$. Hiermee is de enige oplossing $(1, -3, -3)$ van het 3-bij-3-stelsel gevonden. De oplossingsverzameling is dus $\{(1, -3, -3)\}$ en bestaat uit één 'punt' in $\mathbb{R}^3$. (In paragraaf 1.2.3 geven we hier een meetkundige interpretatie voor.)

Achterwaartse substitutie

Het proces waarmee we eerst x_3 oplossen en daarna achtereenvolgens x_2 en x_1 vinden door substitutie, staat bekend als *achterwaartse substitutie*.

OPGAVE 1.9

Beschouw het 3-bij-3-stelsel

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & = & 15 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array}$$

a Bepaal door middel van gausseliminatie een driehoeksvorm voor het stelsel en geef ook de drie pivots die daarbij optreden.
b Los het stelsel op met behulp van achterwaartse substitutie.

Samenvatting van gausseliminatie

Samengevat bestaat de gausseliminatie uit een systematische eliminatie van onbekenden met behulp van drie bewerkingen op vergelijkingen die men de drie *elementaire bewerkingen* van de gausseliminatie noemt:

Elementaire bewerkingen van gausseliminatie

1 een constante maal een vergelijking optellen bij (of aftrekken van) een andere vergelijking
2 een vergelijking delen door een constante (≠ 0)
3 twee vergelijkingen verwisselen.

De elementaire bewerkingen geven equivalente stelsels.

Elk van deze bewerkingen verandert de oplossingsverzameling van een stelsel niet en voert een stelsel dus over in een equivalent stelsel. Met de elementaire bewerkingen brengen we een gegeven stelsel in een (equivalente) vorm waaruit de oplossing door achterwaartse substitutie is af te leiden. Tot nu toe leidde eliminatie steeds tot stelsels in driehoeksvorm, omdat er evenveel pivots als onbekenden waren. Later in de paragraaf bekijken we wat er gebeurt als er minder pivots dan onbekenden zijn.

1.2.2 DE UITGEBREIDE MATRIX

Bij het bepalen van de oplossingen van grote stelsels wordt het schrijfwerk erg vervelend. Gelukkig is veel van de notatie in feite overbodig. Immers, het is eigenlijk voldoende om van een stelsel alleen de *coëfficiënten van de onbekenden* en de *rechterleden* te noteren. We doen dit door de coëfficiënten en de rechterleden in een getallenschema te noteren, waarbij we zo veel mogelijk de vorm van het stelsel aanhouden.
Het stelsel 1.1 geven we als volgt kort weer:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & -12 & 21 \\ 2 & 1 & -3 & 8 \end{array}\right)$$

Rij

De getallen die horizontaal naast elkaar staan, vormen samen een *rij*.
De eerste rij is bijvoorbeeld 0, 3, –2, –3 en bevat de coëfficiënten en het rechterlid van de eerste vergelijking $3x_2 - 2x_3 = -3$. De getallen rechts van de verticale streep zijn dus de rechterleden uit de vergelijkingen. De verticale streep is dan ook toegevoegd om de coëfficiënten en de rechterleden duidelijk van elkaar te onderscheiden.

Kolom

De getallen die verticaal onder elkaar staan vormen samen een *kolom*. De eerste kolom is bijvoorbeeld 0, 3, 2 en bevat de coëfficiënten van x_1 uit de drie vergelijkingen. Het 3-bij-3-blok van getallen links van de verticale streep bevat dus alle coëfficiënten van de onbekenden (let erop dat de mintekens van de coëfficiënten meegenomen worden).

Uitgebreide matrix

Coëfficiëntenmatrix

Zo'n getallenschema wordt de *uitgebreide matrix* van het stelsel genoemd. Het woord matrix is Latijn voor 'moederstam' en is afgeleid van het Latijnse 'mater' voor 'moeder' (denk ook aan 'matrijs'). Worden de rechterleden (en dus ook de verticale streep) weggelaten, dan spreken we van de *coëfficiëntenmatrix* van het stelsel. Dit verklaart waarom we het hebben over een 'uitgebreide' matrix.

OPGAVE 1.10

a Geef de coëfficiëntenmatrix en de uitgebreide matrix die bij het stelsel uit opgave 1.9 horen.

b Geef het stelsel dat bij de volgende uitgebreide matrix hoort:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2\sqrt{2} & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Met behulp van de uitgebreide matrix kan gausseliminatie erg kort worden weergegeven. We gebruiken pijlen om aan te geven dat er een equivalent stelsel wordt afgeleid. Bij de pijlen vermelden we tevens welke stap er in het eliminatieproces uitgevoerd wordt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & -12 & 21 \\ 2 & 1 & -3 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{rijen 1 en 2}]{\text{verwissel}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -12 & 21 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -3 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{door 3}]{\text{deel rij 1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -3 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{uit rijen 2 en 3}]{\text{elimineer } x_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 5 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{uit rij 3}]{\text{elimineer } x_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{array}\right)$$

Vegen van kolommen

De uitgebreide matrix laat goed de werking van de gausseliminatie zien. Berekeningen zijn soms te vereenvoudigen door vergelijkingen door een constante te delen. Indien nodig passen we een rijverwisseling toe om ervoor te zorgen dat we een pivot hebben om mee te elimineren. Met een geschikte eerste rij worden dan de getallen in de eerste kolom nul gemaakt, waarbij de eerste rij onveranderd blijft. Dit komt overeen met het elimineren van x_1 uit alle overige vergelijkingen. Bevat de nieuwe tweede rij een tweede pivot (eventueel na rijverwisseling), dan worden de getallen in de tweede kolom nul gemaakt, waarbij nu de eerste twee rijen onveranderd blijven. Steeds wordt zo het bestaan van een volgende pivot (eventueel na rijverwisseling) gebruikt om de getallen in een volgende kolom nul te maken, waarbij de eerdere rijen onveranderd worden gelaten. Men zegt wel dat de kolommen 'geveegd' worden met behulp van de rijen. Dit vegen van kolommen wordt voortgezet tot de vergelijkingen in een vorm zijn gebracht waaruit door achterwaartse substitutie de oplossing is af te leiden.

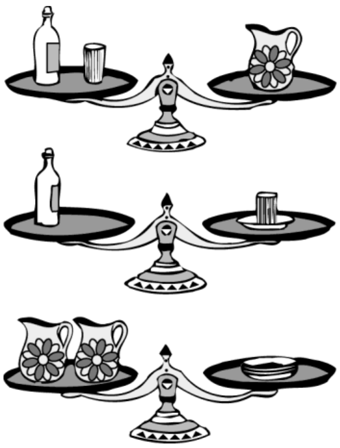
OPGAVE 1.11

In de introductie is het volgende stelsel vergelijkingen opgesteld. We zetten nu de onbekenden achter de coëfficiënten:

$1.000x + 2.000y + 4.000z = 30.000$
$20x + 32y + 50z = 500$
$x + y + 1{,}5z = 20$

Bepaal de oplossing van dit stelsel met behulp van gausseliminatie. Gebruik daarbij de notatie met de uitgebreide matrix.

OPGAVE 1.12
In figuur 1.4 wordt drie keer een weging uitgevoerd met flessen, glazen, kannen en schotels (in de derde weging staan er 3 schotels op de rechterschaal). We noemen het gewicht van het glas g. In dit probleem beschouwen we g als een gegeven constante (die ook in het antwoord voor zal gaan komen).



FIGUUR 1.4 Een weegpuzzel

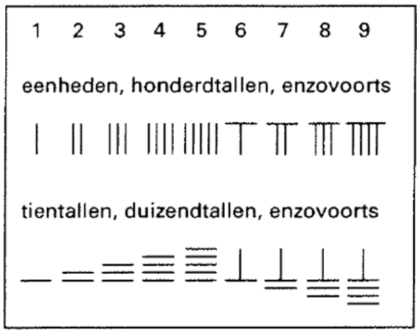
a Leidt uit de drie wegingen drie vergelijkingen in drie onbekenden af.
b Bepaal het gewicht van de fles, de kan en de schotel in termen van g.
Gebruik hierbij gausseliminatie in de notatie met de uitgebreide matrix om het stelsel in driehoeksvorm te brengen.

Chinese matrices
Gausseliminatie was in China al meer dan 1500 jaar bekend voordat C.F. Gauss haar in het westen introduceerde. Uit de tijd van de Han-dynastie stamt de oudst bewaard gebleven Chinese wiskundecursus *Chin Chang Suan Ching*, de 'Negen hoofdstukken over de kunst der wiskunde' (derde eeuw v.Chr.). De invloed van dit boek op de oosterse wiskunde lijkt vergelijkbaar met die van de uit dezelfde tijd stammende *Elementen* van Euclides op het westerse wiskundige denken. In de Chinese wiskunde lag de nadruk meer op algoritmen dan op bewijzen, en meer op algebra dan op meetkunde. De 'Negen hoofdstukken' bevat voornamelijk vraagstukken en algemene recepten voor de oplossing. Het achtste hoofdstuk opent met het volgende probleem.
'Topklasse rijstaren drie bundels, middenklasse rijstaren twee bundels en rijstaren van lage kwaliteit één bundel brengen 39 dõu [1 dõu = 10 liter] voort; topklasse rijstaren twee bundels, middenklasse rijstaren drie bundels en rijstaren van lage kwaliteit één bundel brengen 34 dõu voort; topklasse rijstaren één bundel, middenklasse rijstaren twee bundels en rijstaren van lage kwaliteit drie bundels brengen 26 dõu voort. Hoeveel dõu zit in een bundel van topklasse rijstaren, middenklasse rijstaren en rijstaren van lage kwaliteit?'
Hoewel de inkleding van dit vraagstuk aan de praktijk is ontleend, is het probleem zelf zuiver theoretisch: om het vraagstuk te kunnen formuleren, moeten we het antwoord al weten. Blijkbaar staat hier het aanleren van een techniek of het plezier in het oplossen meer centraal dan de directe toepasbaarheid.

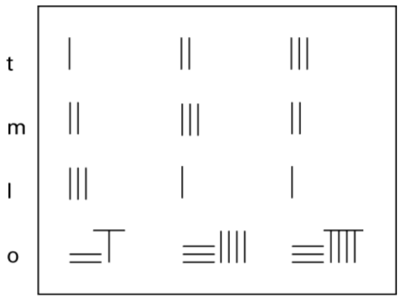
Om het probleem op te lossen, zouden wij de opbrengst van één bundel topklasse rijstaren, één bundel middenklasse rijstaren en één bundel rijstaren van lage kwaliteit respectievelijk x, y en z kunnen noemen.
Dit geeft dan als stelsel vergelijkingen:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 2y & + & z & = & 39 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 34 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 26 \end{array}$$

In de ‘Negen hoofdstukken’ is de aanpak anders: men vertaalt het probleem rechtstreeks in een rechthoekig getallenschema op een rekenbord. Het Chinese getalsysteem is, evenals het onze, positioneel en decimaal. De symbolen voor de cijfers één tot en met negen gaven de Chinezen op het rekenbord weer met bamboestaafjes, een lege plaats markeerde het getal nul en ook het cijfer nul werd in een getal door een open ruimte aangegeven.

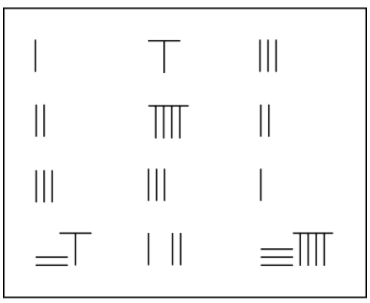


Met de Chinese getallen kan nu het rijstarenprobleem worden genoteerd zoals op het volgende rekenbord. Merk op dat de gegevens in kolommen zijn weergegeven van rechts naar links.

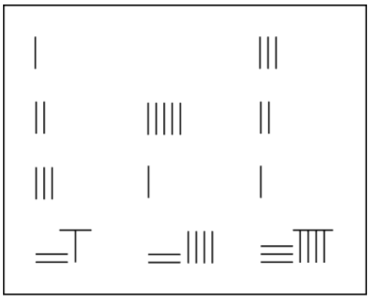


t topklasse rijstaren
m middenklasse rijstaren
l lage kwaliteit rijstaren
o totale opbrengst

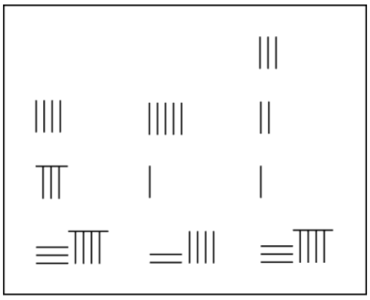
Vermenigvuldig nu de tweede kolom met het bovenste getal uit de derde kolom.

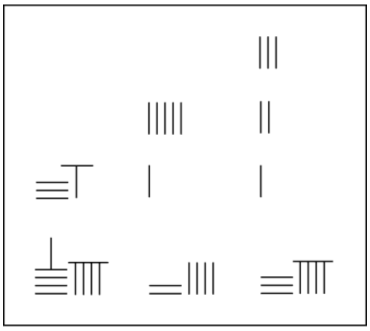


Trek nu tweemaal de elementen van de derde kolom af van de corresponderende elementen van de tweede kolom (zouden uitkomsten hier negatief worden, dan werd dit aangegeven met staafjes van een andere kleur, namelijk zwart in plaats van rood).



Op dezelfde wijze worden de elementen van de eerste kolom met drie vermenigvuldigd en worden de elementen van de derde kolom van het resultaat afgetrokken (zie het volgende rekenbord).
Ten slotte wordt de eerste kolom vermenigvuldigd met het tweede getal uit de tweede kolom en worden de elementen van de tweede kolom viermaal van de corresponderende elementen van de eerste kolom afgetrokken.





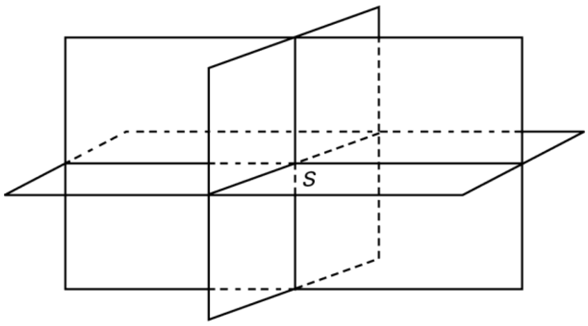
In de eerste kolom staat nu dat 36 bundels rijstaren van lage kwaliteit 99 dõu opleveren, dus één bundel 11/4 dõu. De tweede kolom geeft dat 5 bundels middenklasse rijstaren en 1 bundel lage kwaliteit rijstaren 24 dõu opleveren, zodat één bundel middenklasse rijstaren 17/4 dõu oplevert. Eén bundel topklasse rijstaren blijkt 37/4 dõu te leveren.
Het rekenbord kan een rol gespeeld hebben bij de ontdekking van deze methode: een rekenbord schept immers de ideale voorwaarden om hier en daar staafjes te verplaatsen. Wat zeker is, is dat men in de ‘Negen hoofdstukken’ de stap overslaat om de onbekenden te noteren. De oplossingsmethode is in essentie dezelfde als die Gauss introduceerde en ze is even systematisch als onze huidig aanpak, nu meer dan tweeduizend jaar later.

1.2.3 GEEN OF ONEINDIG VEEL OPLOSSINGEN

Net als 2-bij-2-stelsels kan een m-bij-n-stelsel één, geen of oneindig veel oplossingen hebben. Als voorbeeld gebruiken we nog even 3-bij-3-stelsels omdat daarvoor, net als voor 2-bij-2-stelsels, een meetkundige interpretatie te geven is. Erg diep zullen we hier niet op ingaan, vooral niet omdat het tekenen van figuren toch niet mogelijk is voor stelsels met meer dan 3 onbekenden. Voor 3-bij-3-stelsels geeft het echter een aardige illustratie die de intuïtie over oplossingen van stelsels kan verbeteren.

In $\mathbb{R}^2$ is een lineaire vergelijking een lijn en in $\mathbb{R}^3$ is het een vlak.

In paragraaf 1.1 werd $\mathbb{R}^2$ opgevat als het platte vlak en stelde $ax + by = c$ een *lijn* voor. Analoog is $\mathbb{R}^3$ te zien als de driedimensionale ruimte waarin we leven en is de vergelijking $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c$ voor te stellen als een *vlak* in $\mathbb{R}^3$. We zullen dit verder niet bewijzen. Twee van zulke vergelijkingen stellen dus twee vlakken voor die in het algemeen een *snijlijn* zullen hebben. Denk bijvoorbeeld aan de vloer en een muur in een kamer. Wordt er een derde vergelijking toegevoegd, dan zal dit derde vlak in het algemeen precies één punt met de snijlijn gemeen hebben. Denk hierbij aan de vloer en twee muren die haaks op elkaar staan. Zie figuur 1.5.



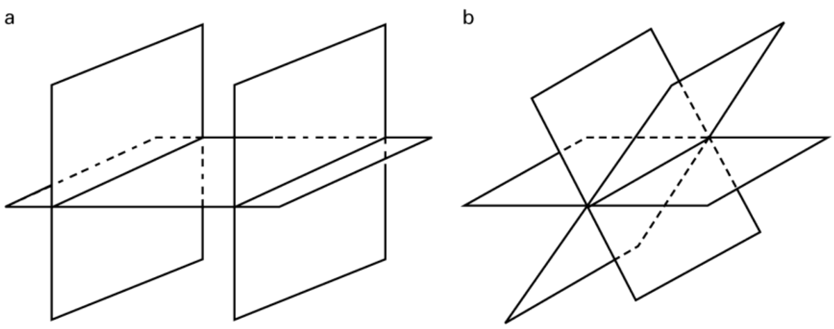
FIGUUR 1.5 Drie vlakken met één snijpunt S

Eén oplossing

Geen oplossingen

Oneindig veel oplossingen

Het gemeenschappelijke *snijpunt* S van de drie vlakken correspondeert met de (enige) oplossing van het 3-bij-3-stelsel. Het is dan duidelijk dat er ook voor 3-bij-3-stelsels geen of oneindig veel oplossingen kunnen zijn. Als we een vloer combineren met twee evenwijdige muren, dan hebben deze drie vlakken geen punten gemeenschappelijk en het bijbehorende stelsel heeft dan geen oplossingen. Maar nemen we drie vlakken in een waaiervorm, dan is er een lijn gemeenschappelijk en heeft het bijbehorende stelsel oneindig veel oplossingen. Zie figuur 1.6.



FIGUUR 1.6 Drie vlakken zonder gemeenschappelijke punten (a) en met een gemeenschappelijke snijlijn (b)

Er zijn nog meer mogelijkheden waarbij er geen of oneindig veel oplossingen zijn (maar we lopen die niet allemaal langs) en het is niet eenvoudig om dit aan een gegeven stelsel af te lezen. Hoe groter het stelsel, des te moeilijker dit wordt. Hoe zijn deze mogelijkheden te herkennen in de gausseliminatie?

Bekijk voor het volgende stelsel eens het eliminatieproces, dat we in uitgebreide-matrixnotatie weergeven:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 7 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{uit rijen 2 en 3}]{\text{elimineer } x_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & -5 & 5 \\ 0 & -3 & 5 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{uit rij 3}]{\text{elimineer } x_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Zie ook paragraaf 1.1, het geval 'geen oplossingen'.

Geen oplossingen als links van de streep nullen en rechts niet.

Strijdig stelsel

Drie onbekenden en slechts twee pivots.

In de laatste uitgebreide matrix correspondeert de derde rij met de vergelijking $0 = -1$, wat een onware uitspraak is. Het stelsel heeft dan *geen* oplossingen. Algemeen geldt dat een stelsel geen oplossingen heeft als er tijdens het elimineren een rij optreedt die links van de streep uitsluitend nullen bevat en rechts van de streep een getal a met $a \neq 0$. Immers, dit geeft de onware uitspraak $0 = a$. Een stelsel dat geen oplossingen heeft, wordt wel een *strijdig stelsel* genoemd: de vergelijkingen zijn 'met elkaar in strijd'. We merken nog op dat er in dit geval drie onbekenden, maar slechts twee pivots zijn, omdat de coëfficiënt van x_3 in de derde vergelijking 0 is.

OPGAVE 1.13

Laat met behulp van gausseliminatie zien dat

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

een strijdig stelsel is. Gebruik de notatie met de uitgebreide matrix.

Een kleine verandering in ons voorbeeld leidt tot een stelsel met oneindig veel oplossingen. In plaats van -2 nemen we nu -1 als rechterlid in de tweede vergelijking:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 7 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{uit rijen 2 en 3}]{\text{elimineer } x_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 5 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{uit rij 3}]{\text{elimineer } x_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

In de laatste uitgebreide matrix correspondeert de derde rij nu met de vergelijking $0 = 0$, wat een ware uitspraak is, maar die geen informatie bevat over de onbekenden. Deze vergelijking kunnen we net zo goed weglaten uit het stelsel, waardoor we een stelsel overhouden van twee vergelijkingen met drie onbekenden, namelijk

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 7 \\ & & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 6 \end{array} \qquad (1.2)$$

Drie onbekenden en twee pivots.

Het eliminatieproces is nu niet verder meer voort te zetten en we moeten stoppen. Merk weer op dat ook hier drie onbekenden en slechts twee pivots zijn.
Het is niet moeilijk om oplossingen van het stelsel 1.2 te vinden. Kiezen we bijvoorbeeld $x_3 = 0$, dan volgt uit de tweede vergelijking dat $x_2 = 2$. Door deze waarden te substitueren in de eerste vergelijking, volgt dat $x_1 = 3$. Hiermee vinden we de oplossing (3, 2, 0). Kiezen we nu $x_3 = -3$, dan vinden we met dezelfde procedure de oplossing (1, –3, –3). Blijkbaar heeft het stelsel 1.2 meer dan één oplossing. Terugdenkend aan 2-bij-2-stelsels, verwachten we nu dat dit stelsel oneindig veel oplossingen heeft. Dit is eenvoudig aan te tonen, immers, voor x_3 kunnen we een willekeurig getal $\lambda \in \mathbb{R}$ kiezen en met achterwaartse substitutie is dan de bijbehorende oplossing als volgt te bepalen. Uit de tweede vergelijking volgt dat $3x_2 - 5\lambda = 6$, ofwel $x_2 = \frac{5}{3}\lambda + 2$. Substitueren we $x_3 = \lambda$ en $x_2 = \frac{5}{3}\lambda + 2$ in de eerste vergelijking, dan zien we dat $x_1 + 2(\frac{5}{3}\lambda + 2) - 4\lambda = 7$, ofwel $x_1 = \frac{2}{3}\lambda + 3$. Hiermee zijn oneindig veel oplossingen gevonden, die in termen van de *parameter* $\lambda \in \mathbb{R}$ beschreven worden door alle 3-tupels van de vorm $(\frac{2}{3}\lambda + 3, \frac{5}{3}\lambda + 2, \lambda)$. Overigens, van de breuken in het antwoord is af te komen door λ te vervangen door 3μ (μ is de Griekse letter 'mu'). Immers $\{(\frac{2}{3}\lambda + 3, \frac{5}{3}\lambda + 2, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(2\mu + 3, 5\mu + 2, 3\mu) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$! Voor $\mu = 0$ en $\mu = -1$ krijgen we bijvoorbeeld de voornoemde oplossingen (3, 2, 0) en (1, –3, –3).

Zie paragraaf 1.1, het geval 'oneindig veel oplossingen'.

Parameter

Dat het stelsel 1.2 oneindig veel oplossingen heeft, is ook weer meetkundig te verklaren. De twee vergelijkingen stellen twee vlakken in $\mathbb{R}^3$ voor met een gemeenschappelijke snijlijn. Iedere keuze van een $\mu \in \mathbb{R}$ geeft een punt $(2\mu + 3, 5\mu + 2, 3\mu)$ op deze snijlijn.

Trapvorm

De linkerleden van het stelsel 1.2 hebben geen driehoeksvorm meer omdat de derde vergelijking weggelaten is. Van een stelsel als in formule 1.2 zullen we voortaan zeggen dat het in *trapvorm* staat. Vooral bij willekeurige *m*-bij-*n*-stelsels zullen we deze trapvorm veel vaker tegenkomen dan de driehoeksvorm.

OPGAVE 1.14
Laat met behulp van gausseliminatie zien dat het stelsel

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & -6 \end{array}$$

oneindig veel oplossingen heeft en geef alle oplossingen in termen van een parameter.

1.2.4 MINDER VERGELIJKINGEN DAN ONBEKENDEN

Het is illustratief om op te merken dat we hiervoor ook het volgende 2-bij-3-stelsel opgelost hebben:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 7 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array}$$

Immers, na eliminatie van x_1 in de tweede vergelijking komen we uit op stelsel 1.2. Alle oplossingen van dit 2-bij-3-stelsel worden dus gegeven door $(2\lambda + 3, 5\lambda + 2, 3\lambda)$, waarbij $\lambda \in \mathbb{R}$. In deze zin is het oplossen van een stelsel met *minder* vergelijkingen dan onbekenden op te vatten als een speciaal geval van het oplossen van een stelsel met evenveel vergelijkingen als onbekenden. Er verandert dan ook niets aan de methode als we dit soort stelsels willen oplossen. Het eindpunt van de eliminatie is alleen geen stelsel in driehoeksvorm meer, maar een stelsel in trapvorm. Uit de trapvorm is door achterwaartse substitutie de oplossingsverzameling te bepalen. Zijn er oneindig veel oplossingen, dan gebruiken we parameters om alle oplossingen mee te beschrijven.

OPGAVE 1.15

Bepaal alle oplossingen (in termen van een parameter) van het stelsel

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

Een stelsel met minder vergelijkingen dan onbekenden heeft ‘waarschijnlijk’ oneindig veel oplossingen omdat er ‘te weinig voorwaarden’ aan de onbekenden opgelegd worden. Denk maar eens aan een stelsel van 2 vergelijkingen in 3 onbekenden. In $\mathbb{R}^3$ stelt dit twee vlakken voor die meestal wel een snijlijn gemeenschappelijk zullen hebben. Maar het is ook mogelijk dat er geen oplossingen zijn. Twee vlakken in $\mathbb{R}^3$ kunnen evenwijdig zijn en met meer dan drie onbekenden wordt de situatie weer een stuk ingewikkelder. Het volgende 3-bij-4-stelsel levert na eliminatie van x_1:

Controleer de eliminatie.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 11 \\ -1 & -2 & 9 & 2 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

In dit stelsel is door het vegen van de eerste kolom meteen ook de tweede kolom geveegd. De tweede kolom bevat dus geen pivot en hoewel dit in zekere zin ‘bijzonder’ is, verandert het weinig aan de eliminatiemethode. Het enige is dat we de tweede pivot pas in de derde kolom aantreffen. Om x_3 met deze tweede pivot te elimineren uit de derde vergelijking, trekken we de tweede rij van de derde rij af. De derde rij wordt dan 0, 0, 0, 0, –8, wat de vergelijking 0 = –8 representeert. Het stelsel heeft dus geen oplossingen.

Als we in het dit stelsel het rechterlid van de derde vergelijking veranderen van –3 in 5, dan ontstaat na eliminatie de trapvorm

Controleer de eliminatie.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De laatste rij uit dit stelsel kan weggelaten worden en we houden dan het volgende 2-bij-4-stelsel over:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & & & = & 2 \\ & & & & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 7 \end{array} \qquad (1.3)$$

Vier onbekenden en twee pivots.

Loop deze berekeningen na ...

Merk op dat we hier 4 onbekenden en slechts 2 pivots hebben.
Om de oplossingen te beschrijven, kiezen we x_4 als parameter λ.
Uit de tweede vergelijking volgt dan dat $x_3 = -\frac{2}{7}\lambda + 1$. Substitueren we $x_3 = -\frac{2}{7}\lambda + 1$ in de eerste vergelijking (x_4 komt niet voor), dan houden we de vergelijking $x_1 + 2x_2 = -\frac{4}{7}\lambda + 4$ in de twee onbekenden x_2 en x_1 over. Hiermee zijn x_2 en x_1 niet uit te drukken in termen van λ en daarom moeten we een tweede parameter introduceren. Kiezen we nu x_2 als parameter μ, dan volgt $x_1 = -\frac{4}{7}\lambda - 2\mu + 4$. Met de twee parameters λ en μ zijn alle oplossingen te beschrijven:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\tfrac{4}{7}\lambda - 2\mu + 4 \\ x_2 &= \mu \\ x_3 &= -\tfrac{2}{7}\lambda + 1 \\ x_4 &= \lambda \end{aligned}$$

Vrijheidsgraad

Aantal vrijheidsgraden = aantal onbekenden – aantal pivots

Voor $\lambda = 7$ en $\mu = -2$ krijgen we de oplossing $(4, -2, -1, 7)$, voor $\lambda = 0$ en $\mu = 0$ de oplossing $(4, 0, 1, 0)$, enzovoort. We zeggen nu wel dat de oplossing twee *vrijheidsgraden* heeft. Het aantal vrijheidsgraden is precies gelijk aan het aantal onbekenden minus het aantal pivots. Hoe meer onbekenden, hoe groter het aantal parameters of vrijheidsgraden in de oplossing kan worden. Overigens is er ook nog een grote vrijheid in de keuze van de parameters. Door andere onbekenden als parameters te kiezen, kan de oplossing er heel anders uit gaan zien, hoewel natuurlijk wel dezelfde oplossingsverzameling wordt beschreven!

OPGAVE 1.16
De oplossing van stelsel 1.3 werd gegeven in termen van $x_2 = \mu$ en $x_4 = \lambda$.
Geef de oplossing ook in termen van $x_1 = \mu$ en $x_3 = \lambda$. Welke keuzen zijn er nog meer mogelijk voor de parameters?

Uitgaande van de trapvorm van stelsel 1.3 konden we eerst de parameter λ kiezen en daarmee een deel van de onbekenden uitdrukken (x_3 en x_4). Vervolgens kozen we μ en konden we de overige onbekenden (x_1 en x_2) uitdrukken. Bij een iets andere trapvorm worden we gedwongen om de parameters 'in één keer' te kiezen. Stel dat we een of ander stelsel na eliminatie in de volgende trapvorm hebben gekregen:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 2 \end{array}$$

Loop deze berekeningen na.

Kiezen we uitsluitend $x_4 = \lambda$, dan kunnen we niet verder.
Daarom kiezen we ook meteen $x_3 = \mu$ en uit achterwaartse substitutie volgt dan dat $x_2 = \lambda - 2\mu + 2$ en $x_1 = -\lambda - 3\mu + 3$. Alle oplossingen worden nu gegeven door $(-\lambda - 3\mu + 3, \lambda - 2\mu + 2, \mu, \lambda)$ waarbij $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

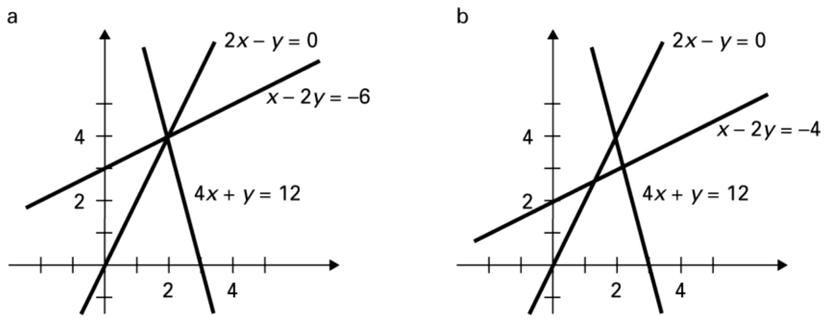
OPGAVE 1.17
Voor zekere $c \in \mathbb{R}$ is het volgende 3-bij-4-stelsel gegeven:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & = & c \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & c+2 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & c+4 \end{array}$$

Bepaal alle oplossingen (eventueel in termen van parameters) van het stelsel als $c = 2$ en ook als $c = -1$.

1.2.5 MEER VERGELIJKINGEN DAN ONBEKENDEN

Hebben we een stelsel met meer vergelijkingen dan onbekenden, dan zijn er ‘waarschijnlijk’ geen oplossingen. Denk als voorbeeld aan een 3-bij-2-stelsel, dus 3 vergelijkingen in 2 onbekenden. Ieder van de vergelijkingen stelt een lijn voor in het vlak, en voor drie lijnen in het vlak is het erg toevallig als ze alle drie door één en hetzelfde punt gaan. Maar het kan natuurlijk wel en in dat geval heeft het 3-bij-2-stelsel precies één oplossing. Naast $4x + y = 12$ en $2x - y = 0$ zijn in figuur 1.7 ook de lijnen $x - 2y = -6$ (a) respectievelijk $x - 2y = -4$ (b) getekend.



FIGUUR 1.7 Drie lijnen met precies één gemeenschappelijk snijpunt (a) en zonder gemeenschappelijk snijpunt (b)

Voor het 3-bij-2-stelsel dat met figuur 1.7a correspondeert, komt gausseliminatie er als volgt uit te zien (kies $x - 2y = -6$ als eerste vergelijking):

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -6 \\ 4 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 9 & 36 \\ 0 & 3 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 9 & 36 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De laatste vergelijking $0 = 0$ kan weggelaten worden en uit de overige twee vergelijkingen $9y = 36$ en $x = 2y - 6$ volgt door achterwaartse substitutie dat $(2, 4)$ inderdaad de enige oplossing van het stelsel is.

OPGAVE 1.18
a Laat met gausseliminatie zien dat het 3-bij-2-stelsel dat met figuur 1.7b correspondeert, geen oplossingen heeft.
b Kan een 3-bij-2-stelsel oneindig veel oplossingen hebben? Motiveer uw antwoord (ook) aan de hand van een voorbeeld met lijnen.

Overbepaald

In een stelsel met meer vergelijkingen dan onbekenden worden 'te veel voorwaarden' aan de onbekenden opgelegd. Men noemt zo'n stelsel *overbepaald* of *overgedetermineerd*. Hoewel een overbepaald stelsel meestal geen oplossingen heeft, blijkt uit de voorbeelden met 2 onbekenden dat er wel degelijk precies één of zelfs oneindig veel oplossingen kunnen zijn. In het algemeen is het niet van tevoren te zien welke van de drie mogelijkheden zich voordoet (zie bijvoorbeeld opgave 1.19).

OPGAVE 1.19

Bepaal alle oplossingen (eventueel in termen van parameters) van de volgende 4-bij-3-stelsels.

a
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & & & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -3 \\ 7x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 13 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 12 \end{array}$$

b
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & & & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -3 \\ 7x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 13 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

c
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & & & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & 6x_3 & = & 3 \\ 7x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 13 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 9x_3 & = & 0 \end{array}$$

Voor alle stelsels, die we tot nu toe gezien hebben, geldt dat zich steeds één van de volgende drie mogelijkheden voordoet: er zijn geen oplossingen, er is precies één oplossing of er zijn oneindig veel oplossingen. Denk bijvoorbeeld aan lijnen in het vlak die geen, precies één of oneindig veel punt(en) gemeenschappelijk kunnen hebben. Maar kan het voor een willekeurig m-bij-n-stelsel nu niet gebeuren dat er bijvoorbeeld precies twee oplossingen zijn, zoals bij kwadratische vergelijkingen het geval is? Het antwoord is dat de genoemde drie mogelijkheden inderdaad de enige zijn. Het bewijs hiervan stellen we uit tot de volgende leereenheid, waarin we handig met matrices (het meervoud van matrix) leren rekenen. Voor willekeurige m-bij-n-stelsels zijn geen absolute regels te geven om te bepalen welke van de drie mogelijkheden optreedt of hoeveel parameters er nodig zijn om alle oplossingen te kunnen beschrijven. Hiervoor moeten we eerst het m-bij-n-stelsel in trapvorm brengen met behulp van gausseliminatie. Bovendien geeft dit een precies inzicht in de oplossingsverzameling van een stelsel. In de volgende opgaven komen allerlei varianten aan bod. Als er oneindig veel oplossingen zijn, dan moet u deze in termen van parameters beschrijven.

OPGAVE 1.20

Beschouw het volgende 3-bij-3-stelsel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -7x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array}$$

a Bepaal alle oplossingen van het stelsel.

b Bepaal alle oplossingen van het 2-bij-3-stelsel dat ontstaat als we de eerste vergelijking uit het 3-bij-3-stelsel weglaten.

c Bepaal het aantal oplossingen van het 4-bij-3-stelsel dat ontstaat als we $3x_1 - 3x_2 - x_3 = -1$ aan het 3-bij-3-stelsel toevoegen.
d Bepaal het aantal oplossingen van het 4-bij-3-stelsel dat ontstaat als we $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ aan het 3-bij-3-stelsel toevoegen.

OPGAVE 1.21
Voor zekere $a \in \mathbb{R}$ is het volgende 3-bij-3-stelsel gegeven:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & = & 5 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & a \end{array}$$

a Bepaal de waarde(n) van a waarvoor het stelsel geen oplossingen heeft.
b Bepaal de waarde(n) van a waarvoor het stelsel oneindig veel oplossingen heeft en geef voor deze waarde(n) alle oplossingen.

OPGAVE 1.22
Geef de oplossingsverzameling van het 4-bij-5-stelsel dat wordt gegeven door de volgende uitgebreide matrix:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & -6 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 5 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

SAMENVATTING

Een m-bij-n-stelsel bestaat uit m lineaire vergelijkingen in n dezelfde onbekenden $x_1, x_2, ..., x_n$, dus uit m vergelijkingen van de vorm $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = c$, waarin $a_1, a_2, ..., a_n$ en c gegeven constanten zijn. Zo'n m-bij-n-stelsel kan geen oplossing, precies één oplossing of oneindig veel oplossingen hebben. Met behulp van gausseliminatie is te bepalen welke van deze drie mogelijkheden zich voordoet. Het stelsel wordt daartoe in trapvorm gebracht met behulp van de drie elementaire bewerkingen van de gausseliminatie:

1 een constante maal een vergelijking optellen bij (of aftrekken van) een andere vergelijking
2 een vergelijking delen door een constante ($\neq 0$)
3 twee vergelijkingen verwisselen.

Door deze elementaire bewerkingen verandert de oplossingsverzameling van het stelsel niet en het resulterende stelsel is equivalent met het origineel. Gausseliminatie is handig weer te geven met behulp van de 'uitgebreide matrix'. Gausseliminatie komt in die weergave neer op het vegen van kolommen. De drie mogelijke typen oplossingen herkennen we aan de vorm van de uitgebreide matrix na vegen.

1 Precies één oplossing

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
d_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c_1' \\
0 & d_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & c_2' \\
0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_n & c_n' \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Kenmerkend is dat de diagonaal-elementen d_1 t/m d_n van de matrix na vegen alle ongelijk 0 zijn. De eventueel aanwezig laatste m-n rijen bevatten uitsluitend nullen. Men zegt dat de matrix in driehoeksvorm staat. De waarde van de c's in de aangevulde kolom hebben geen invloed op het *type* oplossing. De oplossing wordt bepaald door achterwaartse substitutie, beginnend met de n^e rij.
Het voorbeeld in paragraaf 1.2.1 illustreert dit geval.

2 Oneindig vele oplossingen (één of meer vrijheidsgraden)

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c}
d_1 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & c_1' \\
0 & 0 & d_2 & * & * & * & * & * & * & * & c_2' \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 & * & * & * & * & c_3' \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_4 & * & * & * & c_4' \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_5 & * & * & c_5' \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_k & c_k' \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Oneindig veel oplossingen treden op als de matrix na vegen in trapvorm is. Een voorbeeld van zo'n trapvorm ziet u in de matrix hierboven. De pivotelementen d_1 t/m d_k, met $1 \le k < n$, van de matrix zijn na vegen ongelijk 0. De laatste $(m - k)$ regels van de uitgebreide matrix bevatten alleen nullen. We kunnen deze trapvorm nu niet verder tot een driehoeksvorm omvormen. Er zijn in dit geval $(n - k)$ vrijheidsgraden, die corresponderen met de kolommen die geen pivot bevatten. Per vrijheidsgraad kiezen we in de oplossing een parameter (λ, μ, enzovoort). De oplossing wordt ook nu weer bepaald door achterwaartse substitutie, te beginnen met de k^e regel.
Het voorbeeld na opgave 1.13 waar er $(4 - 2) = 2$ vrijheidsgraden zijn, illustreert dit geval.

3 Géén oplossingen (strijdig stelsel)

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c} d_1 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & c_1' \\ 0 & 0 & d_2 & * & * & * & * & * & * & * & c_2' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 & * & * & * & * & c_3' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_4 & * & * & * & c_4' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_5 & * & * & c_5' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_k & c_k' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Er is nu na vegen minstens één regel van de laatste $(m - k)$ waarbij in de geveegde matrix alleen nullen staan en in de aangevulde kolom een waarde $\neq 0$ (na deling van de rij kan dat altijd 1 worden). Uiteraard bestaat er dan geen oplossing voor het stelsel.
Het voorbeeld vóór opgave 1.13 illustreert zo'n strijdig stelsel.

De hierboven beschreven drie soorten resultaten kunnen we illustreren aan de hand van het voorbeeld van een stelsel van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden. Deze stellen twee lijnen voor in een plat vlak. Wanneer de lijnen elkaar precies in één punt snijden hebben we te maken met geval 1: precies één oplossing. Het kan ook zo zijn dat de lijnen samenvallen; dat is het geval 2. En ten slotte kunnen de beide lijnen parallel lopen en dus geen snijpunt hebben, geval 3.