Inhoud leereenheid 7

Leereenheid 7

Communicatietheorieën

INTRODUCTIE

In deze leereenheid richten we ons op signalen als vervolg op leereenheid 6.

In de vorige leereenheid hebben we kennisgemaakt met sinusvormige signalen. Sinusvormige signalen hebben de eigenschap dat hun vorm behouden blijft als ze door een kanaal worden getransporteerd; dit in tegenstelling tot signalen van andere vormen. Om de vormverandering van een signaal te kunnen bestuderen, moeten we het signaal opgebouwd denken uit sinusvormige signalen. Elk signaal kunnen we zien als een samenstel van sinusvormige golven. De basis voor dit inzicht is gelegd door de Franse wiskundige Fourier in het begin van de negentiende eeuw. Aan de hand van voorbeelden gaan we op delen van deze theorie in en laten we zien dat signalen opgebouwd kunnen worden uit een reeks van sinusvormige signalen. Hierbij is het niet de bedoeling een wiskundig formeel correcte behandeling te geven, maar willen we vooral de onderliggende concepten duidelijk maken.
Tot nu toe bekeken we signalen steeds in het tijdsdomein, dat wil zeggen: een signaal als functie van de tijd. Signalen kunnen ook in het frequentiedomein worden beschouwd, wat soms grote voordelen biedt. Zo kunnen we de reeks van sinusvormige signalen waaruit het signaal is opgebouwd, op een handiger manier weergeven.

LEERDOELEN

Na het bestuderen van deze leereenheid wordt verwacht dat u
- het verband kunt beschrijven tussen een signaal in het tijdsdomein en een signaal in het frequentiedomein
- aan de hand van het begrip frequentiespectrum kunt uitleggen wat de bandbreedte van een signaal en van een kanaal inhoudt
- aan de hand van het begrip frequentiespectrum kunt uitleggen hoe signalen kunnen worden vervormd
- kunt uitleggen wat het bemonsteringstheorema inhoudt en waartoe het dient.

Studeeraanwijzingen

Ter verduidelijking is voor paragraaf 1 (Fourieranalyse) een ondersteunende animatie gemaakt die te vinden is via de link op de cursussite. Bij de animatie is een experiment beschreven inclusief toelichting.

Studeeraanwijzing

De verwachte studielast voor deze leereenheid bedraagt 4 uur.

LEERKERN

1 Fourieranalyse

1.1 FREQUENTIECOMPONENTEN VAN SIGNALEN

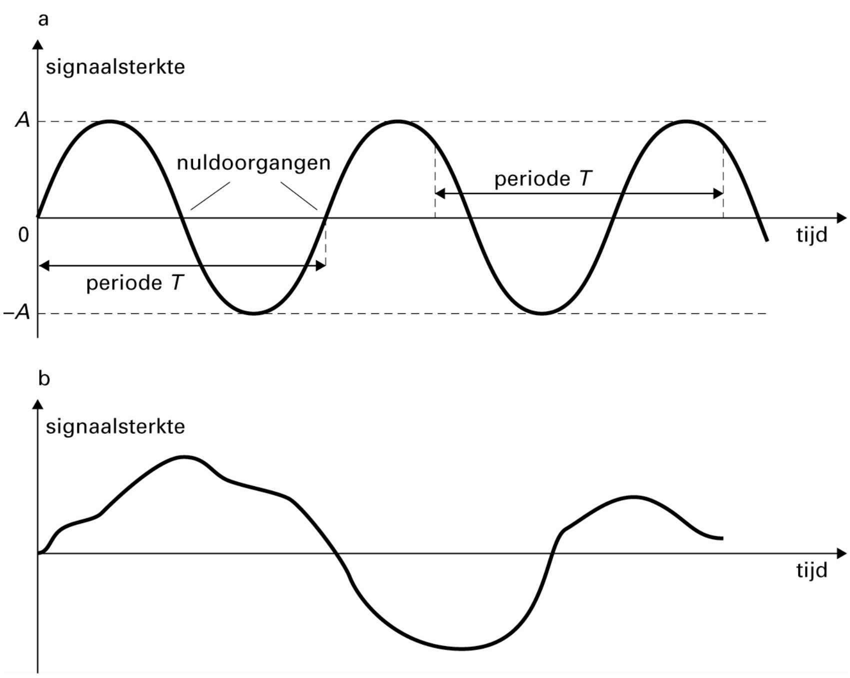
In deze paragraaf laten we zien dat een signaal als een samenstelling van sinusvormige signalen kan worden beschouwd. We moeten hierbij onderscheid maken tussen periodieke signalen en niet-periodieke signalen.

Periodiek signaal

Bij een *periodiek signaal* herhaalt de signaalvorm zich gedurende elke periode T. Een voorbeeld van een periodiek signaal is het sinusvormig signaal (figuur 7.1a). Na elke twee nuldoorgangen, met een totale tijdsduur gelijk aan periode T, herhaalt het sinusvormige signaal zich. Zoals figuur 7.1a aangeeft, maakt het niet uit waar periode T begint.

Niet-periodiek signaal

Alle signalen die hier niet aan voldoen, noemen we *niet-periodieke signalen*. Figuur 7.1b geeft een voorbeeld van een niet-periodiek signaal.



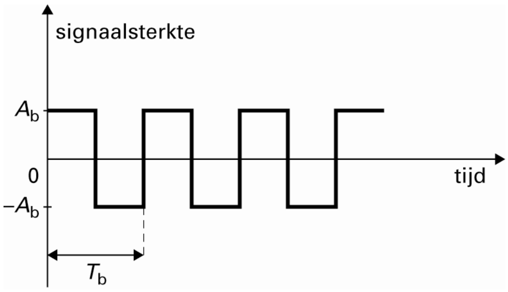
FIGUUR 7.1 a Een periodiek sinusvormig signaal
b Een niet-periodiek signaal

OPGAVE 7.1

a Wat is de definitie van een periodiek signaal?

b Een formele definitie is: een signaal is periodiek als voor elke t geldt: $f(t + T) = f(t)$. Probeer deze definitie uit te leggen. Zijn er meerdere waarden voor T mogelijk? Voor welke waarde zou u kiezen?

Een ander periodiek signaal is het blokvormig signaal $b(t)$ dat zich elke T_b seconden herhaalt met amplitude A_b (zie figuur 7.2).



FIGUUR 7.2 Een blokvormig signaal met periode T_b en amplitude A_b

We gaan dit blokvormige signaal $b(t)$ nu construeren door middel van een reeks van sinusvormige signalen. In feite wordt dit een oneindig lange reeks van sinusvormige signalen, maar we zullen zien dat als we een beperkt aantal termen van die reeks nemen, we al een aardige benadering van het blokvormig signaal krijgen. Aan het eind van deze paragraaf komen we kort terug op de niet-periodieke signalen.

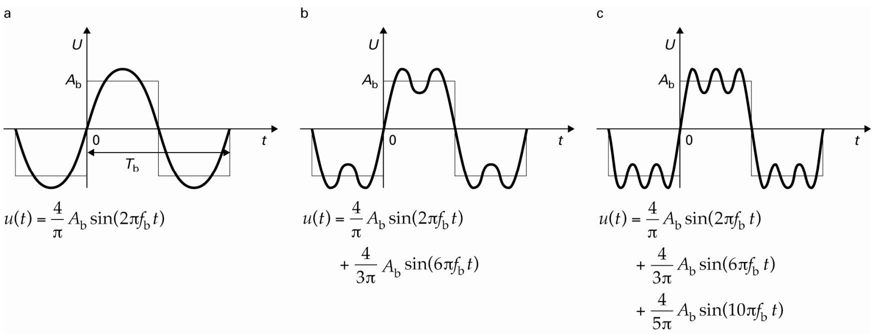
$\omega = 2\pi f$

De constructie van het blokvormig signaal $b(t)$ bestaat uit het optellen van een reeks sinusvormige signalen van de vorm $u(t) = A_s \sin(2\pi f_s t)$. De eerste term uit deze reeks heeft een frequentie die gelijk is aan die van het blokvormig signaal, zodat $f_s = f_b$. De amplitude is iets groter dan die van het blokvormige signaal, namelijk $A_s = 4A_b/\pi$. Deze eerste term is daarmee gelijk aan

$$\frac{4}{3\pi} A_b \sin(6\pi f_b t)$$

Grondtoon, grondharmonische of eerste harmonische

Deze eerste term of frequentiecomponent f_b noemen we de *grondtoon.* Andere namen hiervoor zijn *grondharmonische* of *eerste harmonische.* Zie figuur 7.3a.



FIGUUR 7.3 De constructie van een blokvormig signaal door optelling van sinusvormige signalen
a eerste harmonische
b eerste en derde harmonischen
c eerste, derde en vijfde harmonischen

Derde harmonische

Vervolgens tellen we bij deze eerste harmonische de *derde harmonische* op. De frequentie van de derde harmonische is driemaal de frequentie van de eerste harmonische ($f_s = 3f_b$) en deze harmonische heeft een amplitude die drie keer zo klein is als de amplitude van de eerste harmonische ($A_s = (4A_b/3\pi)$). Daarmee is de derde harmonische gelijk aan

$$\frac{4}{3\pi} A_b \sin(6\pi f_b t)$$

Vijfde harmonische

Na optelling van de eerste en derde harmonischen verkrijgen we het signaal dat is te zien in figuur 7.3b. De vorm van het bloksignaal is nu al zichtbaar. Figuur 7.3c laat het resultaat zien door de *vijfde harmonische*

$$\frac{4}{5\pi} A_b \sin(10\pi f_b t)$$

er ook bij op te tellen. De vijfde harmonische heeft een amplitude vijf keer zo klein als van de eerste harmonische ($A_s = (4A_b/5\pi)$) en een frequentie die vijf maal zo hoog is als van de eerste harmonische ($f_s = 5f_b$). Zonder bewijs stellen we dat het resulterende signaal $u(t)$ gelijk is aan het blokvormige signaal $b(t)$ door deze reeks *oneindig* voort te zetten:

$$u(t) = \frac{4}{\pi} A_b \sin(2\pi f_b t) + \frac{4}{3\pi} A_b \sin(6\mathrm{p} f_b t) + \frac{4}{5\pi} A_b \sin(10\pi f_b t) + \frac{4}{7\pi} A_b \sin(14\pi f_b t) + \ldots$$

OPGAVE 7.2

Bij de constructie van het blokvormig signaal $b(t)$ heeft de eerste harmonische een amplitude die iets groter is dan de amplitude van de blokgolf. Kunt u hiervoor een verklaring bedenken?

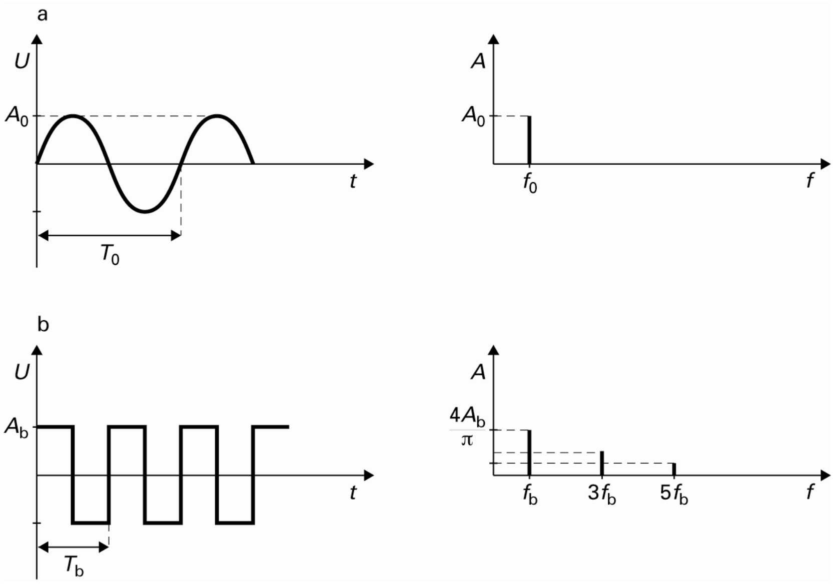
In de praktijk is er geen oneindige reeks van sinusvormige signalen nodig om een *voldoende nauwkeurige* beschrijving te hebben van, in dit geval, de blokgolf. De amplitudes van de hogere harmonischen worden in snel tempo kleiner en dragen zo nauwelijks nog bij aan de vorm van het te construeren signaal. We komen hier op terug in paragraaf 1.2.1 bij het onderwerp ‘bandbreedte’.

De theorie van Fourier leert ons dat *elk periodiek* signaal geconstrueerd kan worden door een bepaalde reeks van sinusvormige signalen, elk met een eigen amplitude, frequentie en fase. In het voorgaande voorbeeld is alleen de sinusfunctie gebruikt. Naast de sinus is de cosinus als sinusvormig signaal ook vaak nodig voor de constructie van periodieke signalen. Het bepalen van de reeks sinus- en cosinusfuncties die het signaal gezamenlijk beschrijven gebeurt door middel van de *Fourieranalyse*. Op deze analyse gaan we in deze cursus niet nader in, we stellen slechts vast dat het mogelijk is periodieke signalen op te bouwen uit sinussen en cosinussen.

Fourieranalyse

Voordat we overgaan naar niet-periodieke signalen, bekijken we eerst het sinusvormige signaal en het blokvormige signaal in het frequentiedomein. We spreken van een *frequentiespectrum*. Het frequentiespectrum van een signaal verkrijgen we door de amplitudes van de sinusvormige signalen waaruit het signaal is opgebouwd, uit te zetten tegen de frequentie (zie figuur 7.4).

Frequentie-spectrum



FIGUUR 7.4 a het sinusvormige signaal in het tijds- en frequentiedomein
b het blokvormige signaal in het tijds- en frequentiedomein

Spectraal element

Figuur 7.4a geeft het frequentiespectrum weer van een sinusvormig signaal, $A_0 \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$, waarbij $\varphi_0 = 0$. Dit sinusvormig signaal in het tijdsdomein resulteert in slechts één *spectraalelement* met frequentie f_0 en amplitude A_0 in het frequentiedomein. In figuur 7.4b is het frequentiespectrum van de blokvormige golf te zien. Bij de frequenties f_b, $3f_b$, $5f_b$, ..., zijn spectraalelementen aanwezig met amplitudes $4A_b/\pi$, $4A_b/3\pi$, $4A_b/5\pi$, ... Merk op dat deze spectraalelementen overeen komen met de termen uit de formule voor $u(t)$. Algemeen heeft een periodiek signaal een *discreet frequentiespectrum*: verschillende frequentiecomponenten hebben een amplitude ongelijk aan nul.

Discreet frequentiespectrum

Amplitude-frequentie-karakteristiek

Fase-frequentie-karakteristiek

We hebben nu van de harmonischen de amplitudes ten opzichte van de frequentie vastgelegd. We noemen dit een amplitude-frequentie-karakteristiek. Om het periodieke signaal geheel vast te leggen, moet ook de *fase* van elke harmonische ten opzichte van de frequentie vastgelegd worden. Zo is het voor het blokvormige signaal uit figuur 7.2 nodig dat alle harmonischen op $t = 0$ s een fase $\varphi_0 = 0$ rad hebben. Op de fase-frequentie-karakteristiek gaan we in deze cursus niet nader in.

OPGAVE 7.3

Een tijdsafhankelijk signaal kan geschreven worden als

$$s(t) = \sin(2\pi \cdot 10^3 t) + 0{,}8\sin(4\pi \cdot 10^3 t) + 0{,}5\sin(8\pi \cdot 10^3 t) + 0{,}1\sin(12\pi \cdot 10^3 t)$$

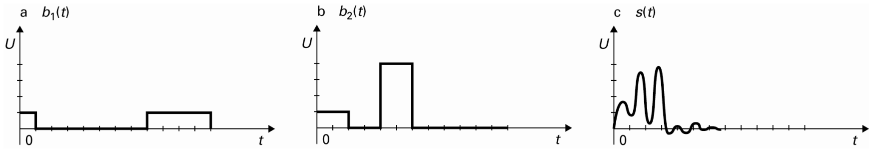
a Bepaal zowel de frequentie f van $s(t)$ als de hoekfrequentie ω.
b Schets het frequentiespectrum van $s(t)$.

OPGAVE 7.4

In het frequentiedomein moet naast de amplitude ook de fase als functie van de frequentie worden vastgelegd.
a Waarom is dit?
b Wat gebeurt er met het signaal als de fase van één harmonische verandert?

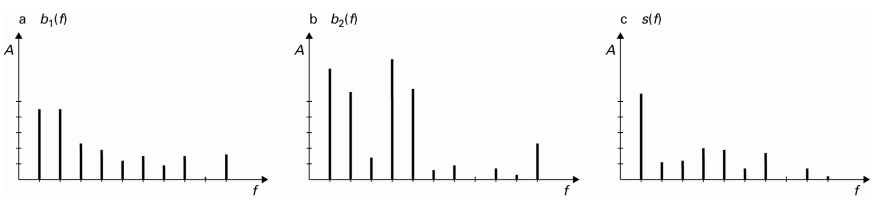
Niet-periodieke signalen

We eindigen deze paragraaf met enkele opmerkingen over hoe niet-periodieke signalen in het frequentiedomein er uitzien. Niet-periodieke signalen (eigenlijk alle reële signalen), zoals spraak en muziek, kunnen zeer onregelmatig van vorm zijn (zie figuur 7.5c voor een voorbeeld). Maar er zijn ook niet-periodieke signalen die wat minder onregelmatig van vorm zijn. Voorbeelden daarvan zien we bij tijd- en amplitude discrete signalen als in de figuren 7.5a en 7.5b. Figuur 7.5a toont een binair signaal dat de bitreeks 100000001111 zou kunnen voorstellen. Figuur 7.5b toont een tijds- en amplitudediscreet signaal, waarin meerdere discrete amplitudes voorkomen.



FIGUUR 7.5 Drie voorbeelden van niet-periodieke signalen
a Een min of meer regelmatig binair signaal $b_1(t)$
b Een meer onregelmatig signaal $b_2(t)$
c Een volledig onregelmatig signaal $s(t)$

Om niet-periodieke of aperiodieke signalen samen te stellen, benaderen we ze als wel periodiek en passen vervolgens weer Fourieranalyse toe. Deze benadering is alleen redelijk als we een flink stuk van het signaal, met voldoende karakteristieke variaties, in de tijd beschouwen. In feite maken we het signaal hiermee kunstmatig periodiek door te veronderstellen dat het signaal na de beschouwde karakteristieke tijd weer ongeveer hetzelfde zal zijn.
Voor niet-periodieke signalen zijn meer verschillende frequentiecomponenten nodig ten opzichte van periodieke signalen, waardoor in het frequentiedomein het aantal spectraalelementen toeneemt ('het wordt drukker'). Naast de toename van het aantal spectraalelementen is de vorm van het spectrum minder regelmatig, dat wil zeggen: de spectraalelementen liggen niet meer op regelmatige afstanden van elkaar (in tegenstelling tot bijvoorbeeld de blokvormige golf: f_b, $3f_b$, $5f_b$, ...) en de amplitudes zijn wisselend (eveneens in tegenstelling tot de blokvormige golf: $4A_b/\pi$, $4A_b/3\pi$, $4A_b/5\pi$, ...). Figuur 7.6 toont een deel van de bijbehorende frequentiespectra van de signalen uit figuur 7.5.



FIGUUR 7.6 De signalen $b_1(f)$, $b_2(f)$ en $s(f)$ in het frequentiedomein

Alleen de amplitude-frequentie-karakteristieken zijn opgenomen.

Continu spectrum

Als er zoveel spectraalelementen aanwezig zijn dat ze niet meer van elkaar onderscheiden kunnen worden, dan spreken we van een *continu spectrum*. Veel signalen uit de macrofysische wereld, zoals omgevingsgeluiden, hebben een continu spectrum.

Met kennis van het begrip frequentiespectrum kunnen we een aantal belangrijke aspecten uit de communicatietechnologie beter begrijpen, zoals de bandbreedte van een signaal en een kanaal, signaalvervorming en het bemonsteren van signalen voor digitalisering. In de paragraaf hierna bespreken we deze toepassingen.

1.2 ENKELE TOEPASSINGEN

1.2.1 *Bandbreedte van een signaal en een kanaal*

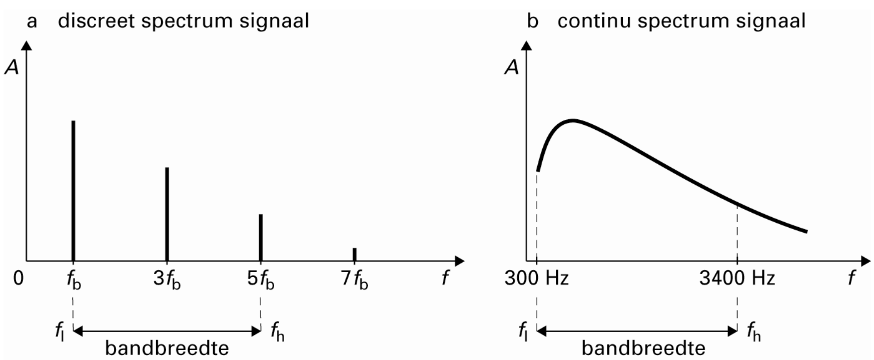
Met een frequentiespectrum kunnen we precies aangeven welke frequenties een signaal in het frequentiedomein aanneemt. Deze frequenties samen bepalen de bandbreedte van een signaal.

Bandbreedte van een signaal

Definitie

dimensie: s^{-1}, per seconde

De *bandbreedte van een signaal* (B_s) wordt gevormd door het verschil van de gewenste hoogste (f_h) en laagste (f_l) frequenties van het signaal, ook wel de grensfrequenties genoemd. Wat de hoogste en laagste frequenties zijn, wordt bepaald door de vereiste nauwkeurigheid waarmee men het signaal aan het kanaal aan wil bieden. De eenheid van bandbreedte is hertz (Hz), de dimensie s^{-1} (per seconde). Figuur 7.7 toont twee voorbeelden. Figuur 7.7a toont een discreet spectrum van een periodiek signaal, een blokgolf, dat in dit geval met drie spectraalelementen voldoende getypeerd wordt. Dat wil zeggen: er blijken drie harmonischen nodig te zijn om de vereiste nauwkeurigheid van het signaal te verkrijgen. Zoals figuur 7.7a toont, valt het spectraalelement $7f_b$ buiten de benodigde bandbreedte van het signaal. Figuur 7.7b toon een continu spectrum van bijvoorbeeld een spraaksignaal. De gewenste bandbreedte van dit signaal loopt van 300 tot 3400 Hz (ga dit na). De frequentiecomponenten buiten deze bandbreedte zijn niet nodig om de vereiste nauwkeurigheid te halen.



FIGUUR 7.7 De grensfrequenties van a) het blokvormig signaal $b(t)$ en b) een spraaksignaal

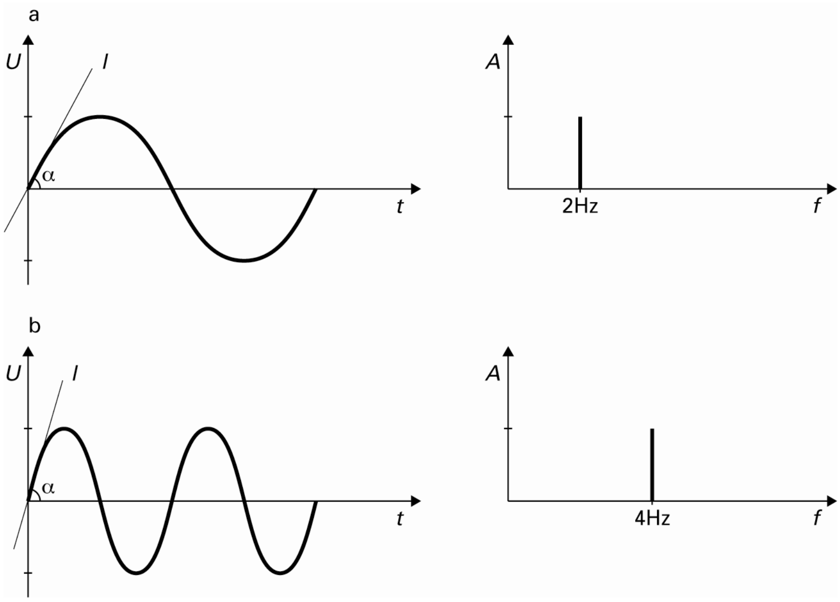
Grensfrequenties

Bij zowel periodieke als niet-periodieke signalen zijn zogenaamde *grensfrequenties* (f_l en f_h) aan te wijzen waaronder en waarboven geen frequentiecomponenten meegenomen behoeven te worden om het signaal voldoende nauwkeurig weer te geven. Een voorbeeld daarvan hebben we gezien bij het blokvormig signaal: de amplitudes van de hogere harmonischen boven $5f_s$ zijn verwaarloosbaar klein geworden, het signaal in het tijdsdomein verandert nauwelijks meer van vorm door meer harmonischen mee te nemen. De bandbreedte van de beschouwde blokvorm van figuur 7.4b is daarom $5f_b - f_b = 4f_b$ en is in figuur 7.7a weergegeven.

Binnen de communicatietechnologie worden alle signalen in het frequentiespectrum begrensd. Een voorbeeld van het gebruik van grensfrequenties zien we bij telefonie. Van het frequentiespectrum wordt alleen het frequentiegebied tussen 300 Hz en 3400 Hz gebruikt om het spraaksignaal weer te geven. Hiermee is het stemgeluid voldoende herkenbaar. Voor muziek is een hoogste grensfrequentie van 16000 Hz noodzakelijk. Door de beperkingen van ons gehoor nemen de meeste mensen hogere frequenties toch niet waar.
De bandbreedte van signalen wordt vooral bepaald door het verloop van het signaal in het tijdsdomein, in die zin dat hoe sneller het signaal wisselt over een tijdseenheid, hoe hoger de ‘bovenste’ grensfrequentie.

Stijgtijd en daaltijd

Dit is in te zien door te kijken naar de *stijgtijd* (en *daaltijd*) van de afzonderlijke sinusvormige signalen waaruit het signaal is opgebouwd. Figuur 7.8 toont twee sinusvormige signalen, waarbij elk signaal bestaat uit één sinusvormige component in zowel het tijds- als het frequentiedomein. Het sinusvormige signaal in figuur 7.8a heeft een frequentie (f_a = 2 Hz) die lager is dan die van het sinusvormige signaal in figuur 7.8b (f_b = 4 Hz), terwijl de grootte van de amplitude voor beide gelijk is.



FIGUUR 7.8 Twee sinusvormige signalen met verschillende stijg- en daaltijden: a) met f_a = 2 Hz en b) met f_b = 4 Hz; in het tijdsdomein zijn de raaklijnen (l) en de hellingshoek (α) aangegeven.

Raaklijn
Hellingshoek

Door de hogere frequentie van het sinusvormige signaal b duurt het, ten opzichte van het sinusvormige signaal a, minder lang voordat de maximale uitwijking (A) is bereikt. We kunnen dit goed zien door een raaklijn aan beide sinusvormige signalen te tekenen. De raaklijn (l) raakt aan de sinusvormige signalen en vormt een hoek, de *hellingshoek* (α), met de x-as. De raaklijn aan het sinusvormige signaal a verloopt minder steil dan de raaklijn aan het sinusvormige signaal b, anders gezegd, de hellingshoek α van de raaklijn aan het sinusvormige signaal a is kleiner dan die aan het sinusvormige signaal b. Hiermee is de stijg- (en daal)tijd van het sinusvormige signaal b korter dan die van het sinusvormige signaal a.

Het zijn de hogere harmonischen die in het tijdsdomein de *snelle* signaalwisselingen mogelijk maken, zoals bijvoorbeeld bij de blokvormige golf de (bijna) verticale lijnen. Bij een spraaksignaal zorgen de hogere frequenties voor duidelijke en korte t-klanken en scherpe s-klanken. Digitale signalen, waarbij sprake is van snelle veranderingen in signaalniveau, hebben deze hogere frequenties nodig: digitale signalen gaan minder zuinig om met bandbreedte dan tijds- en amplitudecontinue signalen.

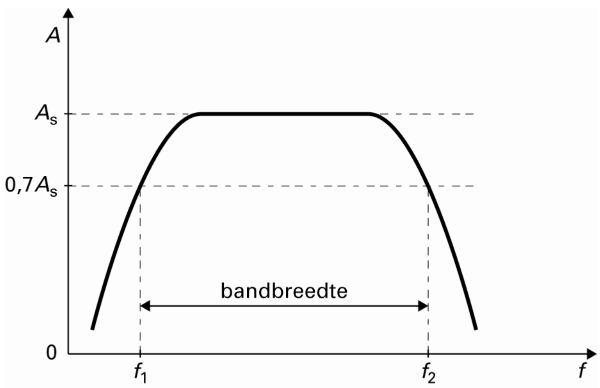
Tabel 7.1 geeft van enkele diensten de signaalbandbreedte en vergelijkt deze met de bandbreedte van een telefoonsignaal.

TABEL 7.1 De signaalbandbreedtes van enkele communicatiediensten

communicatiedienst	*signaalbandbreedte (Hz)*	*verhouding tot telefoonband*
telex	200	0,05
telefoon	4000	1
hi-fi	20000	5
televisie	5000000	1250

Bandbreedte van een kanaal Definitie

Net zoals een signaal een bepaalde bandbreedte heeft, heeft een kanaal dat ook. De *bandbreedte van een kanaal* (B_k) wordt bepaald door het verschil tussen de hoogste (f_h) en laagste (f_l) frequentie die door het kanaal verzonden kunnen worden. Figuur 7.9 geeft een voorbeeld.

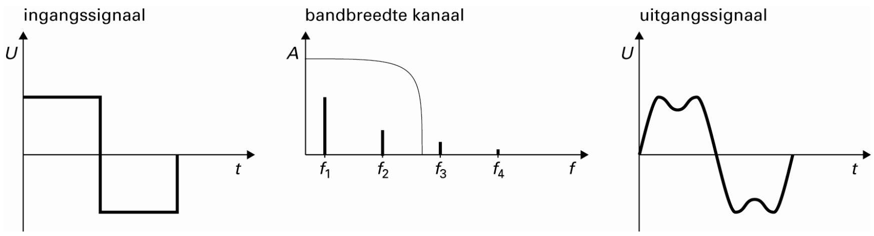


FIGUUR 7.9 De bandbreedte van een kanaal

In figuur 7.9 is te zien dat de afname van de amplitude van de frequentiecomponenten als functie van de frequentie geleidelijk is. In het middengedeelte worden de signalen onverzwakt doorgegeven. Aan de randen worden de signalen meer en meer verzwakt, naarmate de frequentie lager of hoger is. Van de sinusvormige signalen met alle mogelijke frequenties wordt, volgens figuur 7.9, maar een beperkt gedeelte, de *frequentieband*, door het kanaal doorgegeven. De grens is op die punten gelegd waar de amplitude tot 0,7 van de onverzwakte amplitude is afgenomen (het zogenaamde –3dB-punt). In figuur 7.9 gebeurt dit bij de frequenties f_1 en f_2.

Frequentieband

Als de bandbreedte van een kanaal *niet overeenkomt* met de bandbreedte van een signaal, treedt vervorming van een signaal op. In figuur 7.10 wordt dit aan de hand van een blokvormig signaal als ingangssignaal duidelijk gemaakt. In dit geval worden de hogere harmonischen niet doorgelaten, waardoor vervorming optreedt van het signaal, het signaal is minder nauwkeurig.



FIGUUR 7.10 Blokvormig signaal door een in bandbreedte begrensd kanaal

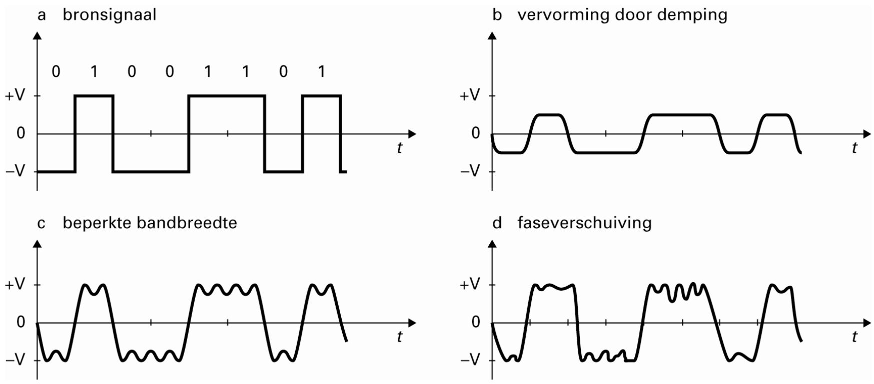
Bij de keuze van een medium voor signaaltransport, zoals glasvezel of koperdraad, moet hiermee rekening worden gehouden.

OPGAVE 7.5
Stel dat door de beperkte bandbreedte van een kanaal de eerste harmonische van een blokvormig signaal $b(t)$ wordt verwijderd. Ga ervan uit dat in het oorspronkelijke signaal de eerste drie harmonischen aanwezig zijn.
Wat is er gebeurd met de bandbreedte van het signaal en wat is hierdoor het effect op het signaal?
Maak een globale schets van het resulterende signaal.

OPGAVE 7.6
In Nederland wordt bij telefonie gewerkt met een frequentieband van 300 tot 3400 Hz. Kunt u bedenken wat u tijdens het telefoneren merkt als er meer lage en hoge spectraalelementen worden verwijderd?

1.2.2 *Signaalvervorming*

Signaalvervorming kan onder andere ontstaan door demping, een beperkte kanaalbandbreedte en vertraging van frequentiecomponenten. Figuur 7.11 geeft een overzicht van het effect op een signaal door deze oorzaken, waarin wordt uitgegaan van een binair bronsignaal. We zullen signaalvervorming hier kort behandelen.



FIGUUR 7.11 Signaalvervorming
a bronsignaal
b demping
c beperkte bandbreedte
d faseverschuiving van frequentiecomponenten

Demping van een signaal

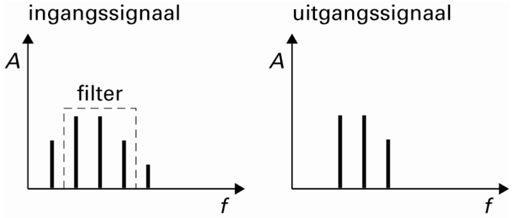
Frequentie-afhankelijke demping

Door energieverlies tijdens transport door een kanaal neemt, naarmate een kanaal langer is, de amplitude van het signaal steeds meer af. Deze afname noemen we *demping* van een signaal (ook wel signaaldemping). Dit probleem kan verholpen worden door het signaal tussentijds te versterken. De mate van demping blijkt voor verschillende frequenties, ook binnen de bandbreedte van een kanaal, veelal verschillend te zijn. We spreken van *frequentieafhankelijke demping*. Door frequentieafhankelijke demping vervormt het signaal. Om dit probleem te voorkomen, moeten frequentieafhankelijke versterkers worden ingezet. In figuur 7.11b is bij demping de amplitude van het gehele signaal afgenomen. Daarnaast zijn amplitudes van de hogere frequenties relatief meer afgenomen, waardoor het signaal ook minder nauwkeurig is geworden.

Beperkte bandbreedte van het kanaal

Filter

Wanneer de bandbreedte van een kanaal en de bandbreedte van het signaal elkaar niet of niet geheel overlappen, zullen alleen die frequentiecomponenten van het signaal ontvangen worden die binnen de bandbreedte van het kanaal vallen. Door het wegvallen van bepaalde frequentiecomponenten wordt, zoals we eerder hebben geconstateerd, het signaal vervormd. Een kanaal lijkt in dit opzicht op een *filter*. Een filter laat bepaalde frequenties wel of juist niet door. Figuur 7.12 toont de werking van een filter.



FIGUUR 7.12 Werking van een filter

In figuur 7.11c is de amplitude van het signaal nagenoeg gelijkgebleven. Door een beperkte bandbreedte zijn de hogere frequenties verzwakt of uitgefilterd: het signaal is minder nauwkeurig geworden.

Faseverandering van frequentiecomponenten

Er kunnen faseverschillen ontstaan tussen signaaldelen met verschillende frequenties, doordat de transportsnelheid frequentieafhankelijk is. Als van een signaal bepaalde sinusvormige componenten in fase verschuiven, verandert de vorm van het signaal. Zie figuur 7.11d.

Zie opgave 7.4b.

OPGAVE 7.7
Schets tweemaal een blokvormig signaal opgebouwd uit de eerste drie harmonischen, waarbij:
a de grondharmonische 90 graden in fase is verschoven
b de derde harmonische 90 graden in fase is verschoven.

1.2.3 *Het bemonsteren van signalen*

In de vorige leereenheid is, tijdens het bespreken van de continue en discrete signalen, de conversie van continue naar discrete signalen zijdelings aan bod gekomen. Nu we kennis hebben van de begrippen frequentiecomponenten en bandbreedte, behandelen we een belangrijk aspect bij deze omzetting, namelijk: hoeveel monsters moeten van het tijds- en amplitudecontinue signaal worden genomen, willen we uiteindelijk het originele (tijds- en amplitudecontinue) signaal weer kunnen terugwinnen uit het bemonsterde signaal?

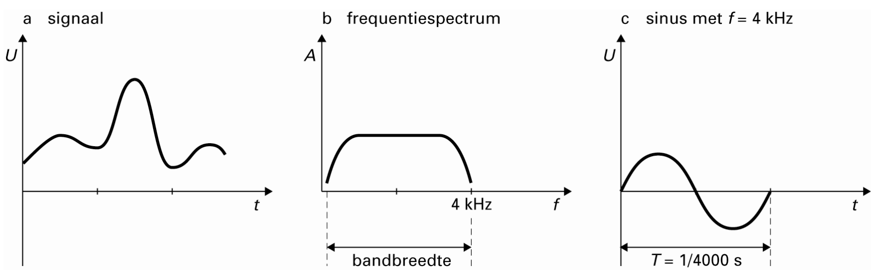
Bemonsteringstheorema

Het *bemonsteringstheorema* zegt dat als f_h overeenkomt met de hoogste frequentie in een continu signaal dat wordt bemonsterd, de bemonsteringsfrequentie f_b meer dan $2 \times f_h$ moet zijn, wil reconstructie van het oorspronkelijke signaal mogelijk zijn. Dus $f_b > 2 \times f_h$.

Criterium van Nyquist

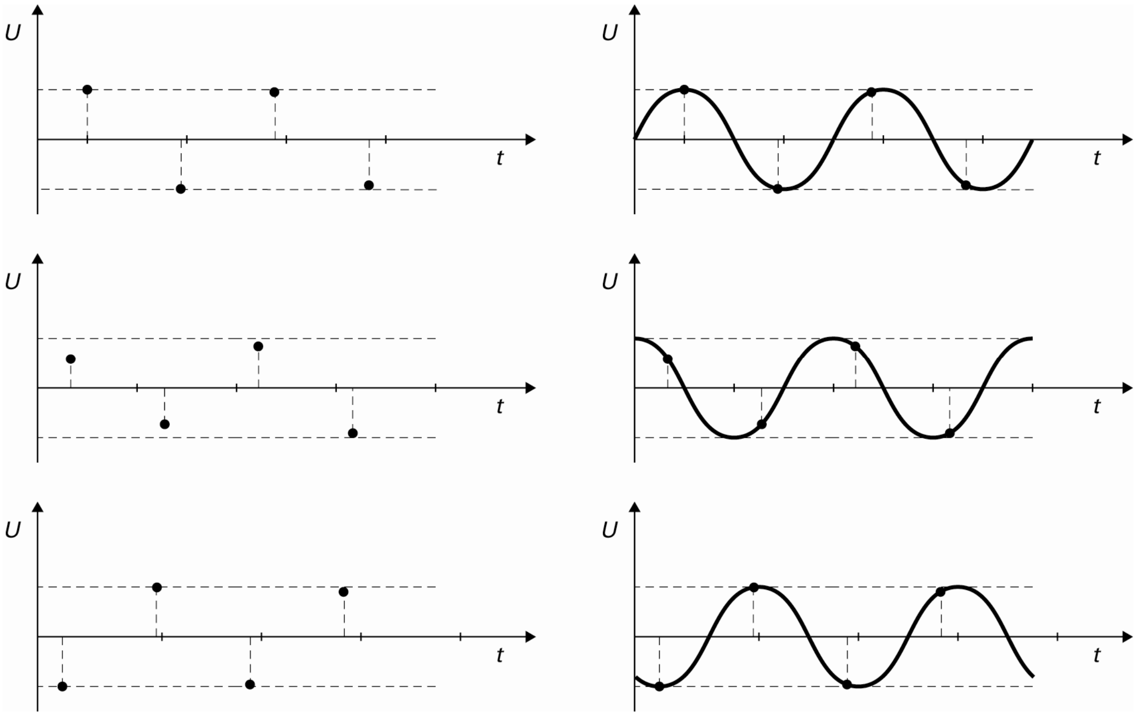
Dit theorema staat ook wel bekend als het criterium van Nyquist.

De gedachte achter dit criterium is als volgt. Ga uit van het continue signaal in figuur 7.13a. Dit signaal heeft een hoogste frequentie van 4 kHz, zoals is aangegeven in figuur 7.13b. In figuur 7.13c hebben we dit sinusvormige signaal getoond. Elke 1/4000 seconde is er sprake van één heel sinusvormig signaal. De bemonsteringsfrequentie moet in ieder geval zo hoog zijn dat deze golf ‘gevangen’ kan worden, dat wil zeggen: aan de bestemmingszijde kan worden gereconstrueerd.



FIGUUR 7.13 a een continu signaal
b het bijbehorende frequentiespectrum
c een sinusvormig signaal met frequentie = 4 kHz

Onder voorwaarde dat we met sinusvormige signalen te maken hebben (en we weten dat alle signalen hiermee kunnen worden opgebouwd), stellen we zonder bewijs dat meer dan twee monsters per periode T nodig zijn om elke golf te reconstrueren. Hieruit volgt dat de bemonsteringsfrequentie tenminste twee maal de hoogste frequentie uit het signaal moet zijn. Overigens worden van alle sinusvormige signalen met een lagere frequentie dan f_h meer monsters genomen. In figuur 7.14 geven we enkele voorbeelden.



FIGUUR 7.14 Enkele voorbeelden van signaalreconstructie bij een bemonsteringsfrequentie dicht bij het criterium van Nyquist

OPGAVE 7.8

Een signaal heeft een frequentieband van 200 Hz tot 16000 Hz. Dit signaal wordt gedigitaliseerd en verzonden als een binair signaal. Een stap uit het omzettingsproces is het bemonsteren. Met welke frequentie moet dit signaal bemonsterd worden?

SAMENVATTING

Wij hebben in deze leereenheid getoond dat elk periodiek signaal geconstrueerd kan worden uit een reeks van sinusvormige signalen, elk met een bepaalde amplitude, frequentie en fase. Zowel periodieke signalen als niet-periodieke signalen kunnen in het frequentiedomein weergegeven worden. We spreken van een frequentiekarakteristiek. Een frequentiekarakteristiek bestaat uit een amplitude-frequentie- en een fase-frequentie-karakteristiek. Een periodiek signaal heeft een discreet frequentiespectrum. Bij een niet-periodiek signaal neemt het aantal spectraalelementen zo toe, dat deze niet meer van elkaar te onderscheiden zijn. We spreken dan van een continu spectrum. Vervolgens hebben we naar de bandbreedte van een signaal en een kanaal gekeken. De bandbreedte van een signaal (B_s) wordt gevormd door het verschil van de aangewezen hoogste (f_h) en laagste (f_l) frequenties van het signaal. Wat de hoogste en laagste frequenties zijn,

wordt bepaald door de vereiste nauwkeurigheid. De hogere harmonischen van een signaal maken in het tijdsdomein de snelle signaalwisselingen mogelijk. Snel veranderende signalen hebben dan ook een grotere bandbreedte. De bandbreedte van een kanaal (B_k) wordt bepaald door het verschil tussen de hoogste (f_h) en laagste (f_l) frequenties die door het kanaal verzonden kunnen worden. Als de bandbreedte van een kanaal niet overeenkomt met de bandbreedte van een signaal, treedt vervorming van een signaal op of kan het signaal in het geheel niet doorgelaten worden. Andere oorzaken van signaalvervorming zijn onder andere demping en vertraging van de frequentiecomponenten.
Met de kennis van frequentiespectra hebben we het bemonsteringstheorema behandeld. Dit theorema zegt dat als f_h overeenkomt met de hoogste frequentie in een continu signaal dat wordt bemonsterd, de bemonsteringsfrequentie f_b minstens $2 \times f_h$ moet zijn, wil reconstructie van het oorspronkelijke signaal mogelijk zijn. Dit theorema staat ook wel bekend als het criterium van Nyquist.

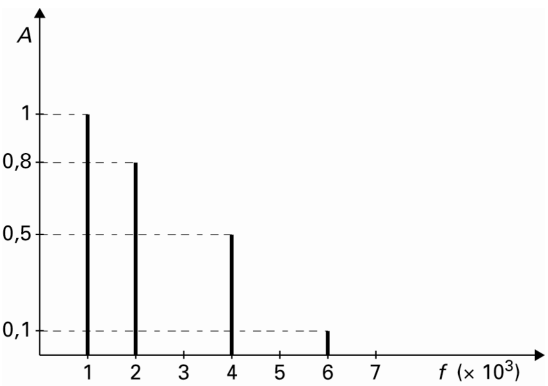
TERUGKOPPELING

1 Uitwerking van de opgaven

7.1 a Een periodiek signaal is een signaal waarbij de signaalvorm zich gedurende elke periode van T s herhaalt.
b De tijdsduur waarmee het signaal zich periodiek herhaalt, is de periode T. Als een periodiek signaal op tijdstip t een uitwijking heeft gelijk aan $f(t)$, dan is de uitwijking T seconde later (of eerder) hieraan gelijk, zodat geldt $f(t) = f(t + T)$ (of $f(t) = f(t - T)$). Als T een goede waarde is (dat wil zeggen een waarde die het signaal correct beschrijft), dan is $2T$ of $3T$ dit ook. Er zijn dus meerdere waarden mogelijk. Natuurlijk is de kleinste waarde van T de waarde waar we voor kiezen.
Algemeen geldt dus: $f(t) = f(t + n \cdot T)$ met $n = ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$

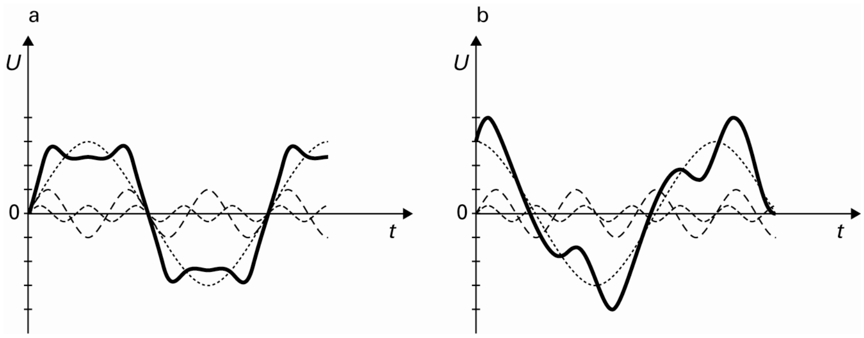
7.2 Het resulterend signaal is een optelsom van sinusvormige signalen, waarbij positieve uitwijkingen (naar boven) en negatieve uitwijkingen (naar beneden) opgeteld worden. Om uiteindelijk bij optelling van alle harmonische signalen op de amplitude A_b van de blokgolf uit te komen, moet de amplitude van de eerste harmonische groter zijn.

7.3 a De eerste harmonische is gelijk aan $1 \times \sin(2\pi \cdot 10^3 t)$. De hoekfrequentie ω is gelijk aan $2\pi \cdot 10^3$. Met $\omega = 2\pi f$ weten we dan dat de frequentie f van $s(t)$ gelijk is aan 103 Hz.
b De volgende frequentiecomponenten zijn aanwezig in het signaal:
1×103 Hz met amplitude 1,0
2×103 Hz met amplitude 0,8
4×103 Hz met amplitude 0,5
6×103 Hz met amplitude 0,1
Zie de figuur 7.15.



FIGUUR 7.15 Frequentiespectrum van $s(t)$

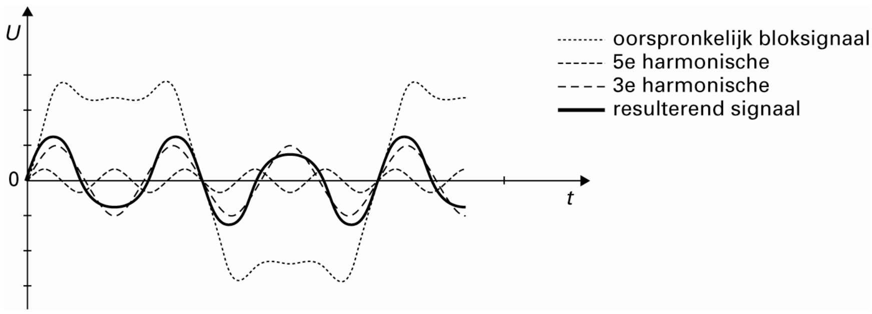
7.4 a Elke sinusvormige golf wordt bepaald door drie variabelen, namelijk de amplitude, de frequentie en de fase (zie leereenheid 6). Als de fase van de harmonischen niet vastligt, kan het gewenste signaal niet gereconstrueerd worden.
b De gevolgen van een faseverandering van één van de harmonischen kunnen desastreus zijn voor een signaal. Kijk bijvoorbeeld wat er met het blokvormig signaal gebeurt als de grondtoon een faseverschuiving heeft van 90 graden (zie figuur 7.16).



FIGUUR 7.16 Vervorming van een blokvormig signaal (a) door verschuiving van de grondtoon met 90 graden (b)

In figuur 7.16a is de dikke doorgetrokken lijn de blokgolf die opgebouwd is uit de eerste drie harmonischen. De drie harmonischen hebben elk een fase gelijk aan nul, dat wil zeggen: elke harmonische begint op $t = 0$ s met een uitwijking gelijk aan nul.
In figuur 7.16b heeft de grondharmonische een fase van 90 graden, waardoor deze naar links is opgeschoven. De fase van de andere twee harmonischen is onveranderd. De vervorming van de resulterende blokgolf is duidelijk waarneembaar.

7.5 In figuur 7.17 zijn de derde en vijfde harmonischen gestippeld getekend. De eerste harmonische is niet meer aanwezig. Het oorspronkelijke blokvormig signaal is eveneens gestippeld opgenomen. Het uiteindelijke resulterende signaal, opgebouwd uit de derde en vijfde harmonische, is sterk vervormd.

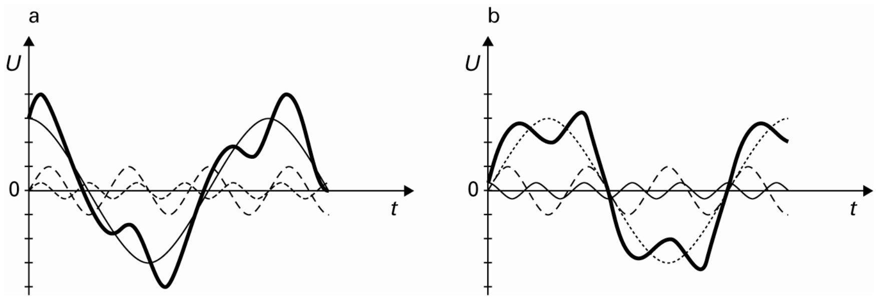


FIGUUR 7.17 Vervorming signaal door verlies eerste harmonische

We zien hier een effect van een beperkte bandbreedte op een signaal. Door de eerste harmonische uit het signaal weg te laten, vervormt het signaal. Het effect van het weglaten van hogere harmonischen hebben we al gezien: het resulterende signaal is minder nauwkeurig.
NB: in de links op de cursussite is een verwijzing naar een animatie opgenomen waarmee u eenvoudig kunt experimenteren met het effect van het toevoegen en verwijderen van harmonischen op het resulterende signaal.

7.6 Lage frequenties zorgen voor de lage tonen. Als er meer lage frequenties worden verwijderd, klinkt het geluid blikkerig. Hoge frequenties zorgen voor de hoge tonen. Als de hoge frequenties niet worden verzonden, klinkt het geluid dof. Bij een te kleine bandbreedte is het moeilijk of lukt het helemaal niet om spraak te verstaan. Het is dus belangrijk dat de bandbreedte van een kanaal overeenkomt met de bandbreedte van een signaal, dat wil zeggen: met die frequenties die nodig zijn om de informatie te representeren.

7.7 a In figuur 7.18a is de grondharmonische 90 graden in fase verschoven. De grondharmonische is als dunne doorgetrokken lijn weergegeven. De tweede en derde harmonischen zijn gestippeld weergegeven en zijn niet in fase verschoven. Het effect hiervan op het resulterende signaal, weergegeven door de dikke doorgetrokken lijn, is groot. Wanneer het signaal bits voorstelt, ontstaan hier bitfouten tijdens het lezen door de ontvanger.



FIGUUR 7.18 a Grondharmonische 90 graden verschoven
b Derde harmonische 90 graden verschoven

b In figuur 7.18b is de derde harmonische 90 graden verschoven; de eerste en tweede zijn niet in fase verschoven. De derde harmonische is als dunne doorgetrokken lijn weergegeven, de eerste twee als gestippelde lijnen. Het resulterende signaal is vervormd, dat wil zeggen: minder nauwkeurig geworden. De kans op het juist uitlezen van de bits is hier waarschijnlijk vergroot ten opzichte van de situatie waarbij de grondharmonische in fase verschoven is.

7.8 De hoogste frequentie in dit signaal f_h is gelijk aan 16000 Hz. De bemonsteringsfrequentie f_b moet minstens $2 \times f_h$ zijn, zodat f_b minstens $2 \times 16000 = 32000$ Hz (= 32 kHz).