

1. Introductie

1.1. Voorwoord

In deze cursus leert u het krachtige computeralgebrasysteem Maxima gebruiken als een belangrijk hulpmiddel (tool) bij het oplossen van wiskundige problemen. Met Maxima leert u dus geen (nieuwe) wiskunde, maar leert u een hulpmiddel gebruiken waarmee u sneller wiskundige problemen kunt oplossen. Bij een juist gebruik van Maxima kunt u veel tijd besparen door het vermijden van foutgevoelige handmatige berekeningen.

In het algemeen is de kracht van een computeralgebrasysteem, zoals Maxima, gebaseerd op drie belangrijke pijlers:

- Symbolisch rekenen (formulemanipulatie), waarmee u vergelijkingen exact kunt oplossen, algebraïsch kunt differentiëren en integreren, en dergelijke.
- Numeriek rekenen, waarmee u nauwkeurige benaderingen kunt geven van oplossingen.
- Grafische mogelijkheden voor het presenteren van twee- of driedimensionale grafieken.

Een belangrijk voordeel van Maxima is gelegen in het feit dat Maxima tot de zogenaamde [OpenSource](#) software behoort (vrije en gratis toegang tot software, veelal via Internet). Dit in tegenstelling tot de zeer kostbare pakketten als Maple and Mathematica waarvoor een licentie vereist is.

Het pakket stelt u in staat om op vrij eenvoudige wijze veeltermen te ontbinden, vergelijkingen op te lossen, grafieken te tekenen, functies te differentiëren en te integreren, enzovoort. Omdat er erg veel mogelijk is met Maxima, is een pragmatische introductie in het gebruik gewenst, zodat u snel aan de gang kunt. Deze cursus is daarvoor bedoeld.

Om nuttig en plezierig met Maxima te kunnen werken gaan we er in deze cursus vanuit dat u minimaal beschikt over wiskundekennis op HAVO of 5VWO niveau. U kunt Maxima op velerlei manieren gebruiken, bijvoorbeeld als ondersteuning bij het wiskundeonderwijs dat u al volgt, als hulpmiddel om complexe problemen aan te pakken die u tegen kunt komen bij vakken of onderwerpen waar wiskunde wordt toegepast, maar bijvoorbeeld ook bij het maken van een wiskundig georiënteerd (profiel) werkstuk.

Deze cursus is bedoeld als een ondersteuning voor wie zich Maxima eigen wil maken. Het stelt u in staat om snel aan de slag te gaan met het pakket: in het tweede hoofdstuk vindt een eerste kennismaking plaats waarbij u snel en moeiteloos op weg wordt geholpen om globaal de mogelijkheden van Maxima te leren kennen. In de daaropvolgende hoofdstukken komen allerlei wiskundeonderwerpen aan bod, variërend van het tekenen van grafieken tot aan het rekenen met matrices en het oplossen van vergelijkingen. Dit alles wordt toegelicht met veel kleine voorbeelden, die gemakkelijk te reproduceren zijn.

In het laatste hoofdstuk wordt ook aandacht besteed aan het programmeren in Maxima via enkele eenvoudige voorbeelden.

Vanaf hoofdstuk 3 is in elk hoofdstuk een aantal opgaven opgenomen. Door het maken van deze opgaven kunt u de vele mogelijkheden van Maxima verder leren ontdekken.

We wensen u veel genoegen en succes bij het bestuderen van deze cursus. We houden ons aanbevolen voor uw commentaar en opmerkingen.

1.2. Wat is Maxima?

Maxima is een Computer-Algebra-Systeem (CAS). Een Computer-Algebra-Systeem is een krachtige rekenmachine die naast het gewone rekenen met getallen ook symbolisch en algebraïsch kan rekenen. Symbolisch rekenen is het rekenen met objecten zoals functies, rijen, vectoren en matrices. Met algebraïsch rekenen bedoelen we hier het niet-afgerond rekenen. De berekeningen/bewerkingen waaraan u hier kunt denken zijn bijvoorbeeld differentiëren, integreren, ontbinden in factoren, breuksplitsing, het oplossen van stelsels vergelijkingen e.d. Daarnaast hebben Computer-Algebra-Systemen uitgebreide grafische mogelijkheden voor het tekenen van tweedimensionale en driedimensionale figuren.

In tegenstelling tot numerieke programmatuur zijn Computer-Algebra-Systemen interactief: de gebruiker geeft opdracht(en), het CAS voert vervolgens berekeningen uit en op basis van de uitkomst(en) van de berekening beslist de gebruiker daarna wel/niet tot een nieuwe opdracht.

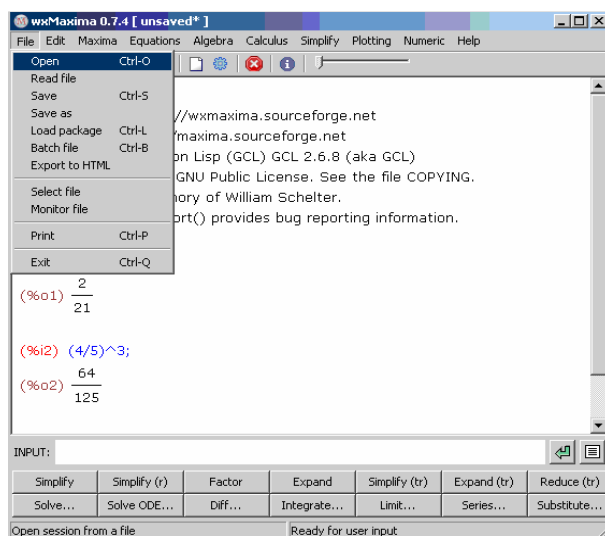
Kort en bondig kunnen we zeggen dat een CAS, zoals Maxima, een interactief programma is ten behoeve van symbolische en algebraïsche (wiskundige) berekeningen. Daarnaast zijn ook de grafische mogelijkheden van Maxima erg groot.

Maxima is een zogenaamd Open-Source-Programm en daarom kosteloos en vrij verkrijgbaar en te kopiëren voor en door iedereen. Maxima wordt al enige jaren beheerd door een groep van enthousiaste gebruikers en een forum van deskundige ontwikkelaars. Via de website <http://www.math.utexas.edu/mailman/listinfo/maxima> kunt u op de hoogte blijven van de meest recente ontwikkelingen rond Maxima. Via het e-mailadres maxima-request@math.utexas.edu kunt u vragen stellen en bugs rapporteren aan een forum van deskundigen en ontwikkelaars.

Het programma wxMaxima is een verbeterde grafische interface (schil) van Maxima. Maxima is het basisprogramma van het CAS, wat u ook nodig heeft als u wxMaxima zou willen gebruiken. In tegenstelling tot wxMaxima kan Maxima HTML-pagina's met Maximacommando's laden en verwerken (interpreteren). De commando's kunt u eenvoudig aanklikken en Maxima voert ze vervolgens uit. Het programma wxMaxima kan een sessie met alle wiskundige definities opslaan ("Save as") en weer laden ("Open"). Zie screenshot hieronder.

Daardoor is het bijvoorbeeld niet nodig steeds weer de elementen van een matrix opnieuw in te voeren. Voorts kan wxMaxima de uitvoer van een sessie als een HTML-file opslaan.

Onder wxMaxima is de gebruiksvriendelijkheid veel beter dan onder Maxima, omdat veel commando's via knoppen in het menu bereikbaar zijn (zie paragraaf 1.5)



1.3. Beknopte geschiedenis van Maxima

Maxima is een afstammeling van Macsyma, het legendarische Computer Algebra Systeem, dat in de late jaren 60 aan het Massachusetts Institute of Technology (MIT) is ontstaan.

Macsyma was de eerste in een serie van computer algebra systemen, welke geleid hebben tot programma's zoals Maple en Mathematica. Maxima behoort tot de zogenaamde freeware (gratis software, veelal verkrijgbaar via Internet). Dit in tegenstelling tot de zeer kostbare pakketten als Maple and Mathematica waarvoor een licentie vereist is.

Het hoofddoel van Maxima is de manipulatie van algebraïsche uitdrukkingen. Met Maxima kunnen we differentiëren, integreren, limieten berekenen, vergelijkingen oplossen, in factoren ontbinden, differentiaalvergelijkingen oplossen en nog heel veel meer. Met behulp van de plotmogelijkheden biedt Maxima ook veel mogelijkheden tot visualisering.

Maxima is in CommonLisp geschreven en kan, net als bijvoorbeeld Java, op de meest verschillende platforms (zoals Linux, Windows, Mac OS X) gecompileerd worden.

Macsyma werd verder ontwikkeld door het Amerikaanse ministerie van defensie (Department of Energy - DOE), maar werd in 1999 uit de markt genomen.

Een deel werd onder de naam Maxima door William Shelter vanaf 1982 verder ontwikkeld (tot aan zijn dood in 2001). In 1998 werd de sourcecode onder GNU General Public Licence (GPL) gepubliceerd. Sindsdien wordt Maxima beheerd door een groep van gebruikers en ontwikkelaars (<http://www.math.utexas.edu/mailman/listinfo/maxima>).

Gedurende de laatste jaren zijn er twee belangrijke componenten aan Maxima toegevoegd: wxMaxima, de grafische interface van Maxima (GUI) en de plotmogelijkheden op basis van gnuplot.

1.4. Installatie en testen van Maxima

De meest recente versie van Maxima kunt u vinden op de site:

<http://maxima.sourceforge.net/>

De meest recente versie van wxMaxima (grafische interface van Maxima) vindt u onder:

<http://wxmaxima.sourceforge.net/>

De online handleiding van Maxima is te vinden op de site:

<http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/en/maxima.html>

1.4.1. Installatie

Als u onder Windows werkt kunt u via <http://maxima.sourceforge.net/> de meest recente versie (momenteel [maxima-5.14.0a.exe](#)) downloaden en runnen. Vrijwel alles verloopt hierbij automatisch (de Windows versie bevat Maxima met wxMaxima en andere benodigheden). Vergeet niet de optie wxMaxima te selecteren tijdens het installatieproces! Tijdens het installeren wordt er tevens een wxMaxima-icoon op het bureaublad geplaatst.

Het installeren van een Grieks lettertype op uw systeem is een belangrijk hulpmiddel, want hierdoor kunnen alle Griekse letters, die in wiskundige formules voorkomen, op een nette manier worden weergegeven.

Hierbij een link naar een dergelijk Grieks lettertype:

<http://www.drshirley.org/fonts/SPIonic.ttf>

Bij Windows systemen plaatst u dit lettertype in de map \Windows\Fonts. Vervolgens start u wxMaxima op en gaat u naar het menuonderdeel "Edit ... Configure ... Style tab", selecteer "Use Greek Font", en selecteer het font "SPIonic".

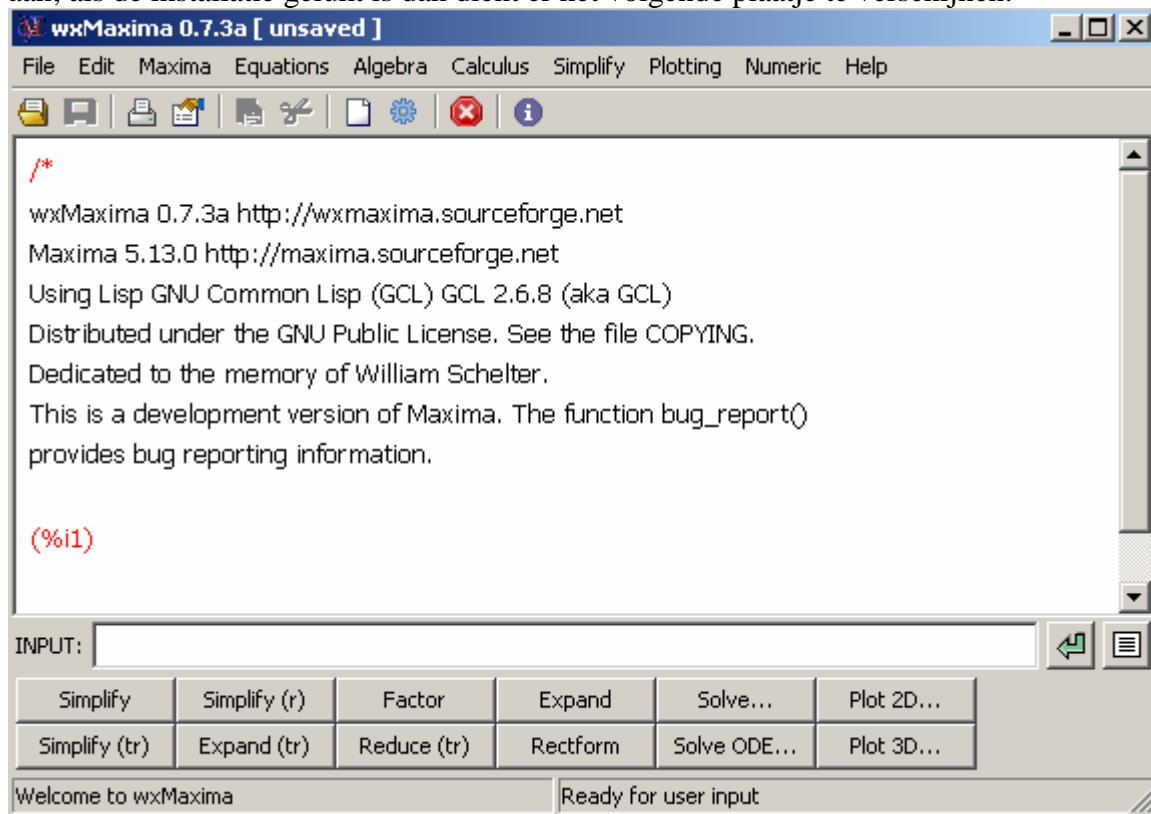
Deze verandering behoort onmiddellijk effect te hebben. Om te testen of wxMaxima een en ander correct kan weergeven, typt u voorbeelden in van Griekse letters in de invoerregel van wxMaxima op de volgende wijze:



```
(%i1) %Omega;  
(%o1) Ω  
  
(%i2) %omega;  
(%o2) ω  
  
(%i3) %beta;  
(%o3) β  
  
(%i4) %psi;  
(%o4) ψ
```

1.4.2. Testen

Om na te gaan of wxMaxima correct werkt klikt u de wxMaxima-icoon op uw bureaublad aan; als de installatie gelukt is dan dient er het volgende plaatje te verschijnen:

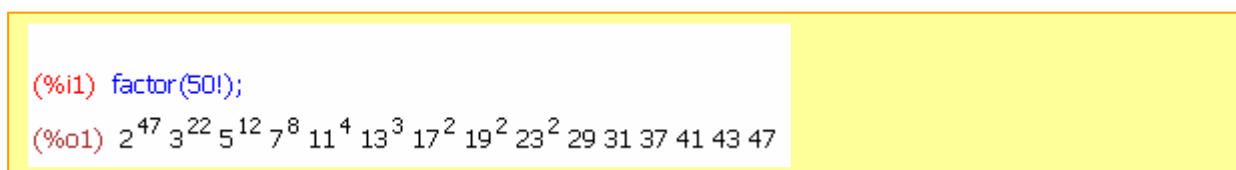


De ontwerper van wxMaxima heeft bepaald dat u de opdrachten moet intypen in de invoerregel INPUT onder in de display,



waar de communicatie met Maxima plaatsvindt (strikt genomen, een afzonderlijk draaiend programma) en Maxima's antwoord verschijnt dan in het grote centrale venster.

Als voorbeeld typen we in: `factor(50!)`. Het antwoord dient er dan als volgt uit te zien:

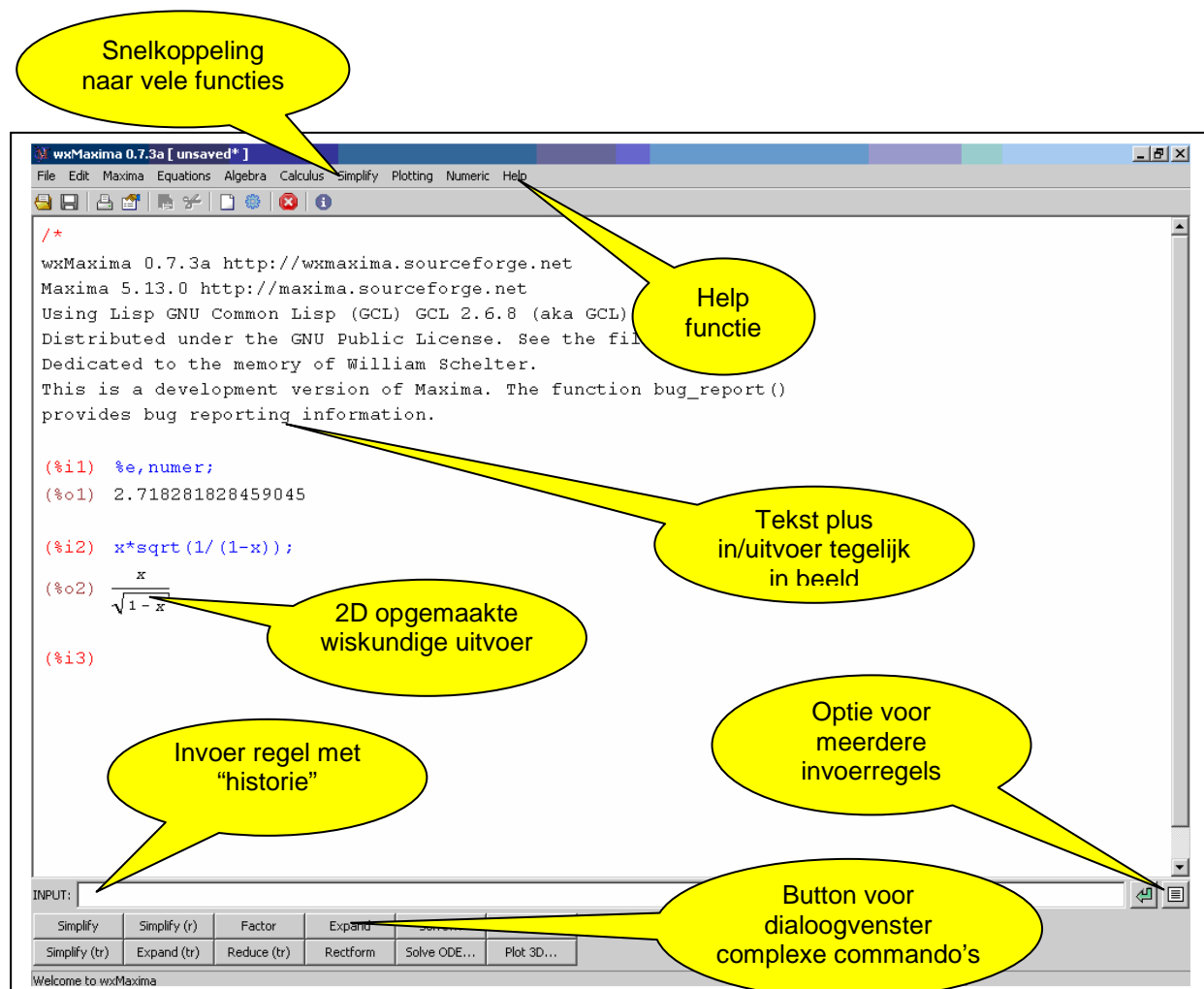


Als u dit resultaat niet te zien krijgt, dan is het raadzaam om de installatie nog eens over te doen.

Wellicht is het u bij het intypen opgevallen dat wxMaxima een rechter haakje produceert op het moment dat u een linker haakje heeft ingetikt. Dat is vriendelijk en tijdbesparend bedoeld, maar het kan zijn dat u dat toch niet prettig vindt. U kunt deze optie desgewenst uitschakelen door in het wxMaxima configuratiescherm het blokje bij de optie "Match parenthesis in text controls" uit te vinken.

1.5. De grafische interface (schil) wxMaxima

Maxima beschikt over een lineaire invoer in een daarvoor beschikbare invoerregel. De belangrijkste toepassingen van het programma vormen de “harde” wiskundige faciliteiten. Bovendien heeft Maxima (in combinatie met de grafische interface wxMaxima) goede uitvoermogelijkheden naar TEX en HTML.



Het Maximabeeldscherm bevat (van boven naar beneden) de volgende elementen:

- de menulijst (waarmee de meeste Maximacommando's direct uitgevoerd kunnen worden.)
- de symboollijst (geeft specifieke Windows-functies, zoals opslaan, printen, ...)
- het eigenlijke algebravenster (bij het opstarten alleen voorzien van een verwijzing naar o.a. de versies van Maxima en wxMaxima)
- de invoerregel met een knop, waarmee meerregelige invoer mogelijk is
- de dialoogknoppen voor vaak gebruikte en complexe Maximacommando's, welke via dialoogboxen gestuurd kunnen worden (vereenvoudiging van de ingevoerde syntax)
- de statusregel met aanvullende informatie

De opmaak van Maxima kan tot op zekere hoogte individueel worden aangepast. Het lettertype en de lettergrootte evenals enkele andere basisinstellingen kunnen worden veranderd en daarmee aan de eigen behoefte worden aangepast.

1.6. Diversen

1.6.1. Invoer van expressies

Als na het opstarten Maxima klaar is voor de invoer verschijnt in het algebrafenster de label (%i1) (erboven staat nog een korte tekst met betrekking tot licenties, herkomst en versie van het programma; zie de schermafdruck in paragraaf 1.4.2).

De invoerregels worden van opeenvolgende nummers voorzien. Als een invoerregel wordt afgesloten, krijgen we als respons de eerste uitvoerregel – voorzien van de label (%o1)– en het label (%i2) voor de volgende mogelijkheid van een invoer

Bij verder gebruik van invoerregels kan in opdrachten/expressies verwezen worden naar deze invoer- en uitvoerlabels.

```
(%i1) solve(x^2-3*x+1,x);
(%o1) [ x =  $-\frac{\sqrt{5}-3}{2}$ , x =  $\frac{\sqrt{5}+3}{2}$  ]

(%i2) ev(x,first(%o1));
(%o2)  $-\frac{\sqrt{5}-3}{2}$ 

(%i3) float(%o2), numer;
(%o3) 0.38196601125011
```

In regel (%i3) wordt de opdracht gegeven om het getal in (%o2) om te zetten in een decimaal getal.

Een invoerregel hoeft niet met een puntkomma te worden afgesloten, maar in elk geval wel met een ENTER. Voor het onderdrukken van de uitvoer kunt u de invoerregel afsluiten met het dollarteken (\$).

Meerdere invoergegevens kunnen worden opgenomen in een lijst tussen vierkante haken en onderling gescheiden door komma's. De uitvoer heeft dan ook de vorm van een lijst.

```
(%i4) pi_benadering : 3.14;
(%o4) 3.14

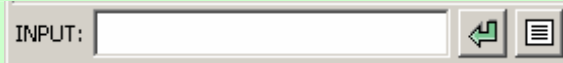
(%i5) e_benadering :2.718$

(%i6) [4*3.5,4*4.5,4*5.5,4*6.5];
(%o6) [ 14.0 , 18.0 , 22.0 , 26.0 ]

(%i7) p:first(%o6);
(%o7) 14.0

(%i8) q:last(%o6);
(%o8) 26.0
```

Hint: Meerregelige invoer kan zeer wenselijk zijn bij de invoer van ingewikkelde expressies en vooral bij de invoer van programma's. Dat kan via het menu "Edit → Long input", met behulp van de sneltoets CTRL + I of via een knop aan het eind van de invoerregel (zie grafiek hieronder)



Bij het gebruik van wxMaxima is het (soms) handig gebruik te maken van de volgende sneltoetsen of sneltoetscombinaties:

Sneltoets	Opdracht/commando	Opmerking
F1	Open de helpfunctie	
F2	Selecteer laatste input	
F3	Ga naar uitvoerscherm	
F4	Ga naar invoerregel	
F5	Kopieer selectie naar invoerregel	Wanneer expressie geselecteerd is in uitvoervenster
F6	Voeg nieuwe tekstgroep toe	Selecteer label om aan groep toe te voegen
F7	Voeg nieuwe opdrachtgroep toe	Selecteer label om aan groep toe te voegen
ENTER	Bewerk tekst	Wanneer bewerkbare tekst geselecteerd is in uitvoervenster
CTRL-ENTER	Beëindig bewerking van tekst	Wanneer uitvoervenster in bewerkmodus verkeert
CTRL-ENTER	Bereken expressie opnieuw	Wanneer expressie geselecteerd is in uitvoervenster
ESC	Beëindig bewerken van tekst, maar schrijf veranderingen niet weg	Wanneer uitvoervenster in bewerkmodus verkeert
UP/DOWN-PIJLEN	Wissel tussen te bewerken teksten	Wanneer te bewerken tekst geselecteerd is in uitvoervenster

1.6.2. Verschillende vormen van “is gelijk”

In praktisch alle programmeertalen, en ook in computeralgebrsystemen wordt een syntactisch onderscheid gemaakt tussen de begrippen “is” en “is gelijk” waar het gaat om toekennen en vergelijken.

Voorbeeld:

Met $x = 3$ zouden we kunnen bedoelen:

een toekenning : *ik ken aan de variabele x de waarde 3 toe*
 óf

een vergelijking : *ik zoek alle x, welke voldoen aan de vergelijking $x = 3$*

Een bijzondere vorm van toekenning is een functie, ook hier zeggen we : f van x “is gelijk”..

Maxima gebruikt voor de verschillende betekenissen verschillende symbolen:

Toekenning	: $x : 3$	- gebruik van de dubbele punt
Vergelijking	: $x^2 - 4 = 0$	- het isgelijktteken
Functie	: $f(x) := 2^x - \sin(x)$	- een dubbele punt gevolgd door het isgelijktteken

```
(%i1) p:100;
(%o1) 100

(%i2) p;
(%o2) 100

(%i3) x^2-2*x-3=0;
(%o3) x2 - 2 x - 3 = 0

(%i4) x;
(%o4) x

(%i5) f(x):=cos(x^2)+1/x;
(%o5) f(x):=cos(x2)+1/x

(%i6) f(0.5);
(%o6) 2.968912421710645
```

1.6.3. Beheer van variabelen en functies

De grondslag van Maxima bestaat uit het manipuleren van algebraïsche uitdrukkingen. Daaruit volgt dat het nodig is met variabelen te kunnen werken. Variabelen beginnen met een letter, kunnen uit één letter of meerdere letters (woorden) bestaan en zijn daarbij “case-sensitive” (verschil tussen hoofdletters en kleine letters)

Opmerking: De ingebouwde functies en constanten worden met kleine letters geschreven

Met de opdrachten **values** en **functions** kunt u vaststellen welke variabelen resp. functies in de lopende Maximasessie gebruikt worden.

```
(%i1) [p:5, q:11, r:23, m1:47, m2:95];
(%o1) [ 5 , 11 , 23 , 47 , 95 ]

(%i2) values;
(%o2) [ p , q , r , m1 , m2 ]

(%i3) [opp_vierkant():=l^2, opp_rechthoek(l,b):=l*b, opp_driehoek(b,h):=0.5*b*h];
(%o3) [ opp_vierkant(l) := l2, opp_rechthoek(l, b) := l b, opp_driehoek(b, h) := 0.5 b h ]

(%i4) functions;
(%o4) [ opp_vierkant(l), opp_rechthoek(l, b), opp_driehoek(b, h) ]
```

Door middel van de opdracht **kill ()** kunnen variabelen en functies tijdens een Maximasessie gewist worden.

```
(%i5) kill(p,q,m2);
(%o5) done

(%i6) values;
(%o6) [ r , m1 ]

(%i9) kill(r,opp_rechthoek);
(%o9) done

(%i10) values;
(%o10) [ m1 ]

(%i11) functions;
(%o11) [ opp_vierkant(l), opp_driehoek(b, h) ]
```

1.7. Opslaan van Maximasessies

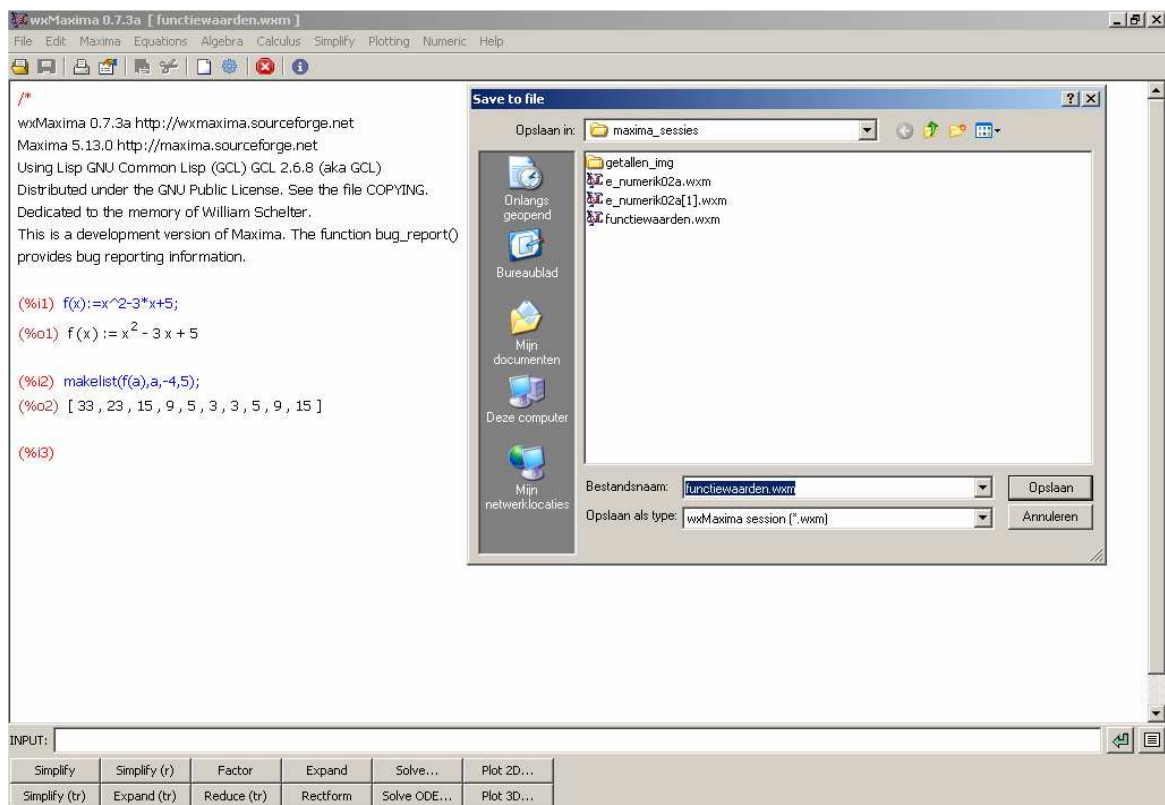
Via het menu “File → Save as” kunnen we een Maximasessie opslaan als een wxm-file in een zelf gekozen map.

Voorbeeld

We willen de volgende Maximasessie opslaan onder de naam functiewaarden.wxm in de map maxima_sessies:

```
(%i1) f(x):=x^2-3*x+5;
(%o1) f(x) := x2 - 3 x + 5

(%i2) makelist(f(a),a,-4,5);
(%o2) [ 33 , 23 , 15 , 9 , 5 , 3 , 3 , 5 , 9 , 15 ]
```



Via het menu “File → Open” kunnen we een opgeslagen wxm-file weer openen en desgewenst aanvullen. Uiteraard kan het opslaan en heropenen ook via de invoerregel met de volgende opdrachten:

```
(%i5) save("C:/functiewaarden.wxm",all)$  
  
(%i6) load("C:/functiewaarden.wxm")$
```

1.8. Uitbreidingen

Maxima beschikt over een groot aantal toepassingsprogramma's (packages), die al beschikbaar zijn binnen de software die u hebt geïnstalleerd. In het kader van het voortgezet onderwijs zijn de volgende pakketten interessant:

- **vect** pakket voor vectorrekening
- **dynamics** pakket voor dynamische systemen.
- **implicit_plot** 2D-grafiek, tekenen van impliciet gegeven functies / bijv. een cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 25$ kan direct getekend worden!
- **distrib** functies betreffende de normaalverdeling, binomiaalverdeling, etc.
- **sqdnst** Nested Roots, vereenvoudigen van geneste wortelvormen

Als we bijvoorbeeld het pakket **vect** willen laden dan gaat dat eenvoudig met de volgende opdracht : **load("vect") \$**. Via het menu "Help" kunt u tevens nagaan welke mogelijkheden (opdrachten) deze pakketten bieden.